Dénombrement

Énoncés 2
Les essentiels 2
Un peu de contextualisation 7
Des calculs classiques 10
Standard 13
Applications 19
Indications 22
Solutions 32

Énoncés

Les essentiels

Exercice 1 (◔★♣ Nombre de bijections)
Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

Combien y-a-t-il de bijections de E vers F ?

Indication p. 22

Exercice 2 (◔★♣ Nombre d'injections)
Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.

Combien y-a-t-il d'injections de E dans F ?

Indication p. 22

Exercice 3 (◔★♣ Les ronds et batons)
Soit n un entier naturel et p un entier naturel.

Combien existe-t-il de p-uplets $\left(k_1, ..., k_p\right) \in \mathbb{N}^p$ tels que

$$n = \sum_{i=1}^{p} k_i.$$

Indication p. 22

Exercice 4 (◑★ Dénombrement de fonctions monotones)
Soient n, p deux entiers.

1. Déterminer le nombre de fonctions strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.
2. Déterminer le nombre de fonctions croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$.

Indication p. 22

Exercice 5 (◔★♣ Symétrie des coefficients binomiaux)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

Montrer que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

1. À l'aide de la formule explicite.
2. En considérant la fraction rationnelle $X^n\left(1+\frac{1}{X}\right)^n$.
3. En considérant l'application $\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ définie par $\varphi : A \mapsto \overline{A}$.
4. À l'aide d'un raisonnement combinatoire.

Indication p. 22 · Solution p. 32

Exercice 6 (◔★♣ Une formule de Vandermonde)
Soient $(n, m, r) \in \mathbb{N}^3$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

1. Par une méthode polynomiale.
2. Par un raisonnement combinatoire.
3. À l'aide d'une bijection bien choisie.

Indication p. 22

Exercice 7 (◔★♣ Fonction indicatrice et cardinal)
Soit E un ensemble fini.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$:
$$|A| = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x).$$
2. Montrer que $\forall x \in E$
$$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A\cap B}(x)$$
3. En déduire une démonstration de la formule du crible.

Indication p. 22

Exercice 8 (◔★♣ Formule de la capitaine)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$.

Montrer que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

1. À l'aide de la formule explicite.
2. En considérant le polynôme $((1+X)^n)'$.
3. À l'aide d'un raisonnement combinatoire.
4. En considérant une bijection bien choisie.

Indication p. 23

Exercice 9 (◑★♠ Formule du crible)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A_1, ..., A_n$ des ensembles finis. Montrer que

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{i=1}^{n}\left((-1)^{i-1} \sum_{1\leq k_1<k_2<\cdots<k_i\leq n}\left|\bigcap_{p=1}^{i} A_{k_p}\right|\right).$$

Indication p. 23

Exercice 10 (◔★ Rappel sur les nombres de Fibonacci)
On définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence

$$F_0 = 1$$
$$F_1 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Déterminer une expression explicite pour la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 23

Exercice 11 (◔★ Coefficients multinomiaux)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k_1, ..., k_r$ des entiers naturels tels que $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$.

Combien y-a-t-il de façons de partitionner un ensemble à n éléments en r sous-ensembles de cardinaux respectifs $k_1, ..., k_r$?

Indication p. 23

Exercice 12 (◑★ Introduction aux nombres de Catalan)
On définit la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence

$$c_0 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}.$$

1. Déterminer une fonction $c \in \mathcal{C}^0(]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[, c(x) - 1 = xc(x)^2.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que c admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ et le déterminer de deux manières différentes.

3. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Indication p. 23

Exercice 13 (◔★♣ Autour des triangularités)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Combien existe-t-il de couples $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i \leq j$?

2. Combien existe-t-il de couples $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i < j$?

Indication p. 23

Exercice 14 (◔★♠ Formule d'inversion de Pascal)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^n$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall i \in [\![0,n]\!], u_i = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{i} v_j$$

ssi

$$\forall i \in [\![0,n]\!], v_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{i-j} \binom{j}{i} u_j.$$

2. Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k$$

ssi

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} u_k.$$

Indication p. 23

Exercice 15 (◔★ Le début des marches aléatoires)
On appelle chemin de longueur n une liste $((x_k, y_k))_{k\in[\![0,n]\!]}$ de points de $\mathbb{Z}^2$ tels que

$$(x_0, y_0) = (0,0)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 1 \\ y_{n+1} = y_n \pm 1 \end{cases}$$

1. Faire un schéma.
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$ déterminer le nombre de chemins de longueur n se terminant en (n,k).

Indication p. 23

Exercice 16 (◔★ Parité du cardinal des sous-ensembles de cardinal pair)
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$.

Montrer qu'il y a autant de sous-ensembles de E de cardinaux pairs que de sous-ensembles de E de cardinal impair;

1. En calculant la somme
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$
2. En considérant $a \in E$ et l'application
$$\varphi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$$
$$A \mapsto \begin{cases} A \cup \{a\} & \text{si } a \notin A \\ A \setminus \{a\} & \text{si } a \in A \end{cases}$$

Indication p. 23

Un peu de contextualisation

Exercice 17 (◔★ Chaussettes et tiroirs)

1. Combien y-a-t-il de façons de ranger 7 chaussettes différentes dans 3 tiroirs différents ?
2. Combien y-a-t-il de façons de ranger 7 chaussettes indistinguables dans 3 tiroirs différents ?
3. Combien y-a-t-il de façons de ranger 7 chaussettes indistinguables dans 3 tiroirs indistinguables ?
4. Combien y-a-t-il de façons de ranger 7 chaussettes différentes dans 3 tiroirs indistinguables ?

Indication p. 24

Exercice 18 (◔★ Le début des boules numérotées et des urnes)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

1. Combien y-a-t-il de façons de tirer trois boules à la fois ?
2. Combien y-a-t-il de façons de tirer trois boules les unes à la suite des autres en remettant la boule tirée dans l'urne après chaque tirage (remise) ?
3. Combien y-a-t-il de façons de tirer trois boules les unes à la suite des autres sans remise ?

Indication p. 24

Exercice 19 (◑★ Thé ou café ?)
Tous les matins le professeur de mathématiques boit une tasse de thé ou de café.

Sur n jours combien y-a-t-il de configurations

1. sans aucune contrainte supplémentaire,
2. telles que le professeur a bu au moins une fois du thé et une fois du café,
3. telles que le professeur a bu plus de tasses de café que de thé,
4. telles qu'il n'existe pas deux jours consécutifs où le professeur a bu la même boisson,
5. telles qu'il n'existe pas deux jours consécutifs où le professeur a bu du thé,
6. telles qu'il n'existe pas trois jours consécutifs où le professeur a bu la même boisson.

Indication p. 24

Exercice 20 (◔★ Anagrammes)
Déterminer le nombre d'anagrammes (ayant un sens ou non) des mots suivants:

- ▷ `\ textsc{chat}`
- ▷ `\ textsc{ellipse}`
- ▷ `\ textsc{anagramme}`

Indication p. 24

Exercice 21 (◔☆ Placement autour d'une table)
On dispose de n élèves option info et de n élèves option SI.

On cherche à les placer autour d'une table de telle façon qu'il n'y ait jamais deux élèves de la même option côte à côte.

1. Combien y-a-t-il de façons de les placer autour d'une table rectiligne ayant un seul côté ?
2. Combien y-a-t-il de façons de les placer autour d'une table rectiligne ayant deux côtés ?
3. Combien y-a-t-il de façons de les placer autour d'une table circulaire ?

Indication p. 24

Exercice 22 (◔★ Un petit pavage (apparition de Fibo))
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Combien y-a-t-il de façons de paver un rectangle $n \times 2$ avec des dominos 2×1 et 1×2 ?

Indication p. 24

Exercice 23 (◑★ Nombre de questions et nombre de réponses)
Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$.

On suppose que l'on dispose de p questions dont les réponses `oui/non` permettent de déterminer avec certitude tout élément de E.

Montrer que $p \geq \log_2(n)$.

Commenter.

Indication p. 25

Exercice 24 (◔★ Nombre de diagonales)
Soit $n \geq 4$.

Déterminer le nombre de diagonales d'un polygone régulier à n côtés.

Indication p. 25

Exercice 25 (◔☆ Le problème des tours)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Combien y-a-t-il de façons de placer p tours sur un échiquier $n \times n$ de telle façon qu'aucune n'est prise par une autre.

Indication p. 25

Exercice 26 (◑☆ Le problème des n-reines pour $n = 4$)
Combien y-a-t-il de façons de placer 4 reines sur un échiquier 4×4 de telle façon qu'aucune n'est prise par une autre.

Indication p. 25

Exercice 27 (◑☆ L'araignée du Dr. B)
L'araignée du Dr. B possède n pattes (distinguables).

Elle possède aussi n chaussettes (indistinguables) et n chaussures (indistinguables).

Elle se chausse en $2n$ étapes, et à chaque étape elle met soit une chaussette à une patte sans chaussure ni chaussette, soit une chaussure à une patte avec une chaussette mais sans chaussure.

Combien y-a-t-il de façons différentes de chausser l'araignée du Dr. B ?

Indication p. 25

Des calculs classiques

Exercice 28 (◔★ Un principe de tranches souvent utile)
Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \sum_{j=0}^{\infty} |\{k \in [\![1, n]\!] \mid \varphi(k) > j\}|.$$

Indication p. 25

Exercice 29 (◔★ Révisions sur des formules de coefficients binomiaux)

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall n \geq p, \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

2. Soient p, k, n trois entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$. Montrer que

$$\binom{k}{p}\binom{n}{k} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Indication p. 25

Exercice 30 (◔☆ Somme sur une diagonale)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}.$$

Indication p. 25

Exercice 31 (◑★ Nombre de dérangements)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on appelle *dérangement* à n éléments toute permutation de n éléments n'admettant aucun point fixe.

Déterminer une formule explicite du nombre de dérangements à n éléments à l'aide d'une somme.

Indication p. 26

Exercice 32 (◑★ Nombre de surjections)
Soient n et p deux entiers.

Déterminer une formule explicite du nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$ à l'aide d'une somme.

Indication p. 26

Exercice 33 (◑☆ Nombre de dérangements, les autres méthodes)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note D_n le nombre de dérangements à n éléments (cf exercice 31).

1. Montrer que

$$D_0 = 1$$
$$D_1 = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{e^{-x}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} D_k \frac{x^k}{k!} + o_{x\to 0}(x^n).$$

Indication p. 26

Exercice 34 (◑☆ Nombre de surjections, les autres méthodes)
Pour $n, p \in \mathbb{N}$ on note $S_{n,p}$ le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$ (cf exercice 32).

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_{n,0} = 0$$
$$S_{0,0} = 1$$
$$\forall (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, S_{n,p} = pS_{n-1,p} + pS_{n-1,p-1}$$

2. Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} S_{n-k,p-1}$$

3. Montrer que pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$(e^x - 1)^p = \sum_{k=0}^{n} S_{n,p} \frac{x^n}{n!} + o_{x\to 0}(x^n).$$

Indication p. 26

Exercice 35 (◔☆ Nombre de surjections: un cas très particulier)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n-1]\!]$.

Indication p. 26

Exercice 36 (◑★ Nombre d'involutions)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

On dit que $f : E \to E$ est *involutive* ssi $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

On note u_n le nombre d'involutions sur E.

Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 26

Standard

Exercice 37 (◔★ Encore des capitaines)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Déterminer

$$\left|(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid A \subset B\right|$$

Indication p. 27

Exercice 38 (◔★ Nombre de partitions (nombres de Bell))
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note B_n le nombre de classes d'équivalences sur un ensemble à n éléments.

Montrer que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence

$$B_0 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Indication p. 27

Exercice 39 (◑★ Deux généralisations)

1. Soient $n_0 \geq n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r \geq 0$ des entiers. Montrer que
$$\binom{n_0}{n_1}\binom{n_1}{n_2}\binom{n_2}{n_3}\cdots\binom{n_{r-1}}{n_r} = \binom{n_0}{n_r}\binom{n_0-n_r}{n_{r-1}-n_r}\binom{n_0-n_{r-1}}{n_{r-2}-n_{r-1}}\cdots\binom{n_0-n_2}{n_1-n_2}$$
2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ et $p_1, ..., p_r$ des entiers. Montrer que
$$\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_r)\in\mathbb{N}^r \\ i_1+\cdots+i_r=n}} \binom{p_1}{i_1}\binom{p_2}{i_2}\cdots\binom{p_r}{i_r} = \binom{p_1+p_2+\cdots+p_r}{n}.$$

Indication p. 27

Exercice 40 (◔☆ Ronds et batons translatés)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ et $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{Z}$.

Déterminer

$$\left|\left\{(k_1, ..., k_p) \in \mathbb{Z}^p \mid \sum_{i=1}^{p} k_i = n \text{ et } \forall i \in [\![1,p]\!], k_i \geq a_i\right\}\right|.$$

Indication p. 27

Exercice 41 (◔★ Épaississement de la diagonale)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Combien existe-t-il de couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ tels que $|i - j| \leq k$.

Indication p. 27

Exercice 42 (◑★ Fonctions très strictements croissantes)
Soient n, p des entiers et $d \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer le nombre d'applications $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, p]\!]$ telles que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], f(k+1) \geq f(k) + d.$$

Indication p. 28

Exercice 43 (◔★ Formule de Legendre)
Soit p un nombre premier.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Indication p. 28

Exercice 44 (◔★ Selon la taille de l'intersection)
Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in [\![0, n]\!]$.

Déterminer

$$\big|(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \mid |A \cap B| = p\big|.$$

Indication p. 28

Exercice 45 (◔★ Diamètre fixé)
Soit $k \in \mathbb{N}$.

Déterminer le nombre de parties A non vides de $[\![1, n]\!]$ telles que $\max(A) - \min(A) = k$.

Indication p. 28

Exercice 46 (◑★ Pas de consécutifs (encore Fibo !))
Déterminer le nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ ne contenant aucun couple d'entiers consécutifs.

Indication p. 28

Exercice 47 (◑★ Nombre de parenthésages)
Déterminer le nombre de mots de $2n$ caractères contenant les symboles « (» et «) », et représentant un parenthésage correct.

Indication p. 28

Exercice 48 (◑★ Nombre de chemins positifs)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note c_n le nombre de chemins (au sens de l'exercice 15) de longueur $2n+1$, positifs (c'est à dire tels que pour tout $k \in [\![0, 2n+1]\!]$, $y_k \geq 0$) et se terminant en sur l'axe des abscisses (c'est à dire tels que $y_{2n+1} = 0$).

Déterminer une expression de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 28

Exercice 49 (◔☆ Classes d'équivalences de tailles égales)
Soient n et p deux entiers et E un ensemble fini de cardinal $n \times p$.

Déterminer le nombre de relations d'équivalences sur E telles que chaque classe d'équivalence contienne exactement p éléments.

Indication p. 28

Exercice 50 (◔☆ Nombre de relations d'ordre total)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Combien existe-t-il de relations d'ordre total sur E.

Indication p. 28

Exercice 51 (◔☆ Un peu de tarot)
Un jeu de tarot comporte 78 cartes. À quatre joueurs les cartes sont distribuées en 4 mains de 18 cartes et un « chien » de 6 cartes.

1. Combien y-a-t-il de mains de 18 cartes possibles ?
2. Parmi les 78 cartes se trouvent trois « bouts ». Combien y-a-t-il de mains possibles:
   a. Sans « bouts » ?
   b. Avec 1 « bout » ?
   c. Avec 2 « bouts » ?
   d. Avec les 3 « bouts » ?
3. Combien y-a-t-il de donnes possibles si on ordonne les joueurs ?
4. Combien de donnes y-a-t-il avec le roi de cœur dans le « chien » ?

Indication p. 28

Exercice 52 (◔☆ Sécurité du téléphone)
Un code PIN est une suite de chiffres entre 0 et 9 avec répétition possible.

1. Combien de code PIN de 4 chiffres existe-t-il ?
2. Combien de code PIN comportant entre 4 et 6 chiffres existe-t-il ?
3. Un schéma de déverrouillage et une suite de 4 à 9 chiffres sans répétition. Combien de schémas de déverrouillage existe-t-il ?

Indication p. 28

Exercice 53 (◔☆ Un exemple de crible)
Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et trois entiers $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre d'entiers de $[\![1, N]\!]$ divisibles par au moins l'un de a, b ou c.

Indication p. 29

Exercice 54 (◑☆ Intersection de diagonales)
Soit $n \in \mathbb{N}$, on trace un polygone régulier à n côtés et on trace toutes ses diagonales.

On suppose que trois diagonales ne sont jamais concourantes en dehors des sommets.

Combien y-a-t-il de points d'intersection de ces diagonales à l'intérieur du polygone ?

Indication p. 29

Exercice 55 (◔☆ Variation autour des sommes)
Soient n et k deux entiers.

Combien y-a-t-il de façons de distribuer $n+k$ polycopiés identiques parmi n élèves de telle sorte que chaque élève en reçoive au moins 1.

Indication p. 29

Exercice 56 (◑☆ Comptage avec pivot)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $g, d \in \mathbb{N}$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{g}\binom{n-k}{d} = \binom{n+1}{g+1+d}.$$

Indication p. 29

Exercice 57 (◔☆ Nombre de relations)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de relations (quelconques) sur E ?
2. Combien y-a-t-il de relations réflexives sur E ?
3. Combien y-a-t-il de relations réflexives et symétriques sur E ?

Indication p. 29

Exercice 58 (◑☆ Nombre d'idempotents)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

On dit que $f : E \to E$ est *idempotent* ssi $f \circ f = f$.

Déterminer une formule explicite du nombre d'idempotents de E à l'aide d'une somme.

Indication p. 29

Exercice 59 (◑☆ Maximum du produit à somme fixée)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer le maximum du produit d'entiers naturels dont la somme fait n.

Indication p. 29

Exercice 60 (◔☆ Disjoints et non contenus)
Soit E un ensemble fini de cardinal n et $A \subset E$.

1. Déterminer

$$|\{B \subset E \mid A \cap B = \varnothing\}|$$

2. Déterminer

$$|\{B \subset E \mid B \not\subset A\}|$$

3. Déterminer

$$|\{B \subset E \mid A \not\subset B\}|$$

Indication p. 29

Exercice 61 (◑★ Somme de cardinaux de parties)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Calculer

$$\sum_{A \subset E} |A|.$$

2. Calculer

$$\sum_{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2} |A \cap B|.$$

3. Calculer

$$\sum_{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2} |A \cup B|.$$

Indication p. 30

Exercice 62 (◔☆ Nombre de solutions d'une équation ensembliste)
Soit E un ensemble de cardinal fini et $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Déterminer le nombre de solutions des équations ensemblistes suivantes, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

1. $A \cap X = B$,
2. $A \cup X = B$.

Indication p. 30

Applications

Exercice 63 (◑★ Approximation diophantienne)
Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $p, q \in \mathbb{Z} \times [\![1, n]\!]$ tel que

$$| x - \frac{p}{q} | < \frac{1}{nq}.$$

Indication p. 30

Exercice 64 (◑☆ Tiroirs et groupes)
Soit G un groupe fini et A, B deux parties de G.

On suppose que $|G| < |A| + |B|$.

Montrer que

$$\forall g \in G, \exists (a, b) \in A \times B, g = ab.$$

Indication p. 30

Exercice 65 (◕☆ Nombre chromatique du plan)
Pour $n \in \mathbb{N}$ un entier on appelle coloriage du plan $\mathcal{P}$ à n couleurs toute application $c : \mathcal{P} \to [\![0, n-1]\!]$.

On appelle couleur du point P la valeur $c(P)$.

On dit qu'un coloriage est c est correct ssi pour tous points $P, Q \in \mathcal{P}$ à distance de 1, $c(P) \neq c(Q)$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de coloriage correct à 2 couleurs.
2. Montrer qu'il existe un coloriage correct à 7 couleurs.
3. Montrer qu'il n'existe pas de coloriage correct à 3 couleurs.

Indication p. 30

Exercice 66 (◑☆ Une application des tiroirs)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On considère $n+1$ entiers $a_1, ..., a_{n+1}$ deux à deux distincts dans $[\![1, 2n]\!]$.

Montrer qu'il existe $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ distincts tels que $a_i \mid a_j$.

Indication p. 31

Exercice 67 (◑★ Cardinaux et algèbre linéaire sur corps finis)
Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps à q éléments.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer $|\mathrm{M}_n(\mathbb{K})|$.
2. Déterminer $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})|$.
3. (Nécessite le chapitre déterminants)

   Déterminer $|\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})|$.

Indication p. 31

Exercice 68 (◑☆ Le problème des chapeaux, cas général)
Les n élèves de l'Ellipse choisissent chaque jour leurs places au « hasard ».

Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $p_{k,n}$ la probabilité qu'exactement k élèves retrouvent leur place d'un jour à l'autre.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé

$$p_{k,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1^k}{k!}e^{-1}.$$

Indication p. 31

Exercice 69 (◕☆▫ Nombre de partitions)
Écrire un programme python prenant en argument un entier n et renvoyant le nombre de façons d'écrire n comme somme d'entiers strictement positifs **non ordonnés**.

Indication p. 31

Exercice 70 (◑☆ Points entiers de boules pour diverses normes)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty[$.

On note pour $R > 0$,

$$B_p(R) = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p < R^p \right\}.$$

Déterminer un équivalent lorsque R tend vers $+\infty$ de

$$\left| B_p(R) \cap \mathbb{Z}^n \right|$$

dans les cas suivants:

1. $n = 2$ et $p = 2$,
2. n quelconque et $p = 1$.

Indication p. 31

Exercice 71 (◑☆ Encore des indicatrices)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer

$$\sum_{A \subset [\![1,n]\!]} \sum_{k \in A} k.$$

Indication p. 31

Exercice 72 (◕★ Un chouette exercice de crible de M.V)
Soient $x_1, ..., x_n$ des éléments de $\mathbb{R}$.

Montrer que

$$\max(x_1, ..., x_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I|=k}} \min_{i \in I}(x_i).$$

Indication p. 31

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Nombre de bijections)
Si $n \neq p$ aucune, si $n = p$, $n!$.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Nombre d'injections)
Par exemple (ce n'est pas la seule méthode), choisir l'image.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Les ronds et batons)
Cf cours.

Indication 4 · Énoncé p. 2 (Dénombrement de fonctions monotones)
Faire un schéma.

À tout moment remarquer que $i \mapsto f(i)$ est croissante ssi $i \mapsto f(i) + i - 1$ est strictement croissante (pourquoi ?) et qu'un seul des deux calculs suffit.

Il y a ensuite plusieurs méthodes.
- ▷ Identifier une fonction monotone à (au choix)
  - ▷ Son image
  - ▷ Les écarts stricts entres deux valeurs successives
  - ▷ etc.
- ▷ Identifier une fonction croissante à (au choix)
  - ▷ Le nombre d'images réciproques de chaque élément (cf 3)
  - ▷ Les écarts entre valeurs successives
  - ▷ etc.

Alternativement écrire une relation de récurrence et deviner le résultat

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Symétrie des coefficients binomiaux)
1. $k = n - (n - k)$
2. Développer par le binôme.
3. L'application φ est bijective et envoie les parties à k éléments sur les parties à $n - k$ éléments
4. Reformuler le point précédent.

Solution p. 32

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Une formule de Vandermonde)
1. Déterminer le coefficient en X^r de $(1 + X)^n(1 + X)^m$.
2. Considérer un ensemble à $n + m$ éléments dont n bleus et m verts. En choisir r indépendamment de la couleur.
3. Formaliser le raisonnement précédent à l'aide d'un produit cartésien et d'unions.

Indication 7 · Énoncé p. 3 (Fonction indicatrice et cardinal)
Pour le dernier point, sommer.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Formule de la capitaine)
1. RAS
2. Dériver puis développer. Développer puis dériver.
3. Choisir un groupe de k élèves parmi n dont une capitaine.
4. Formaliser le raisonnement combinatoire précédent.

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Formule du crible)
Procéder par récurrence sur n. Ou bien utiliser des fonctions indicatrices.

Indication 10 · Énoncé p. 4 (Rappel sur les nombres de Fibonacci)
ERLCC2H

Indication 11 · Énoncé p. 4 (Coefficients multinomiaux)
Il s'agit du coefficient multinomial

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}.$$

Indication 12 · Énoncé p. 5 (Introduction aux nombres de Catalan)
1. Résoudre le trinôme du second degré. Une seule racine est continue en 0.
2. On peut
- ▷ Utiliser une méthode de bootstrap
- ▷ Utiliser le $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de $y \mapsto \sqrt{1-y}$.
- ▷ Unicité du DL.

Indication 13 · Énoncé p. 5 (Autour des triangularités)
Respectivement $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

Indication 14 · Énoncé p. 6 (Formule d'inversion de Pascal)
Cf TDs précédents (coefficient binomiaux, matrices et polynômes). Le plus simple est d'interpréter via l'endomorphisme de translation $P \mapsto P(X+1)$.

Indication 15 · Énoncé p. 6 (Le début des marches aléatoires)
Cf cours.

Indication 16 · Énoncé p. 7 (Parité du cardinal des sous-ensembles de cardinal pair)
1. Cette somme vaut $(1-1)^n = 0$. D'où

$$2\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = 2^n$$

c'est à dire

$$\sum_{\substack{A \subset E \\ |A| \text{ pair}}} 1 = \frac{1}{2}2^n$$

2. Cette application est bijective (car involutive) et envoie les parties de cardinaux pairs sur les parties de cardinaux impairs (et réciproquement).

Indication 17 · Énoncé p. 7 (Chausettes et tiroirs)

1. Cela revient à compter le nombre d'applications d'un ensemble de 7 éléments dans un ensemble à 3 éléments.

2. Cela revient à écrire 7 comme la somme de 3 entiers ordonnés, cf 3.

3. Ici cela revient à compter le nombre de façons d'écrire 7 comme la somme de 3 entiers non ordonnés. Plutôt que de chercher une formule générale (compliqué) compter à la main.

4. Ici cela revient à compter le nombre de relation d'équivalences ayant 3 classes d'équivalence sur un ensemble à 7 éléments. Plutôt que de chercher une formule générale (compliqué, cf 38) compter à la main.

Indication 18 · Énoncé p. 7 (Le début des boules numérotées et des urnes)
RAS

Indication 19 · Énoncé p. 8 (Thé ou café ?)

1. RAS 2^n

2. retirer juste deux configurations

3. faire le symétrique en prenant garde à la parité

4. c'est déterminé par la première boisson

5. des ronds et des batons puis une somme sur une diagonale montante du triangle de Pascal, ou bien faire une récurrence d'ordre 2 en distinguant selon la dernière boisson

6. on peut faire une récurrence et voir un double de Fibo apparaître ou bien se rendre compte qu'il s'agit d'un pavage par des blocs de tailles 1 et 2 puis de choisir la boisson initiale (faire un schéma)

Indication 20 · Énoncé p. 8 (Anagrammes)
Deux méthodes:

- ▷ Placer type de lettre par type de lettre (produit de coefficients binomiaux)
- ▷ Colorier pour rendre distincts puis dés-ordonner (factorielle divisé par produit de factorielles).

Indication 21 · Énoncé p. 8 (Placement autour d'une table)
Faire un schéma et remarquer que cela revient à placer des couples «Info-SI» les uns à côté des autres.

Indication 22 · Énoncé p. 8 (Un petit pavage (apparition de Fibo))
Regarder la fin du pavage, deux cas sont possibles (faire un schéma).

On obtient alors la relation de récurrence de Fibonacci.

Indication 23 · Énoncé p. 9 (Nombre de questions et nombre de réponses)
Chaque question correspond à un ensemble A_i et il faut et suffit que la connaissance de tous les $\mathbb{1}_{A_i}(x)$ permette de reconstituer x. Ainsi l'application

$$E \to \{0,1\}^p x \mapsto \left(\mathbb{1}_{A_i}(x)\right)_{1\leq i\leq p}$$

est injective d'ou $n \leq 2^p$.

On observe que si n est une puissance de 2 l'égalité est atteinte (par exemple par l'écriture en base 2) et que de manière générale on peut atteindre une telle borne par recherche dichotomique.

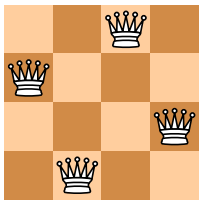
Le fait que « le nombre de questions croît logarithmiquement en le nombre de réponses » est à la base de la notion d'**entropie**.

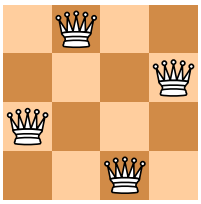
Indication 24 · Énoncé p. 9 (Nombre de diagonales)
Attention deux sommets successifs ne forment pas de diagonale.

Indication 25 · Énoncé p. 9 (Le problème des tours)
Interpréter comme la construction d'une injection.

Indication 26 · Énoncé p. 9 (Le problème des n-reines pour $n = 4$)
La question du cas n quelconque est toujours ouverte !

Compter donc à la main, on obtient 2 solutions:





Il reste à montrer que ce sont bien les seules.

Indication 27 · Énoncé p. 9 (L'araignée du Dr. B)
Deux possibilités au moins:

- Interpréter cela comment une partition de $[\![1, 2n]\!]$ en n parties de cardinal 2.
- Faire une récurrence: si l'araignée gagne une patte il faut intercaler dans sa procédure de chausse un chaussette et une chaussure.

Indication 28 · Énoncé p. 10 (Un principe de tranches souvent utile)
Par exemple écrire comme une somme double de 1 ou faire une transformée d'Abel.

Indication 29 · Énoncé p. 10 (Révisions sur des formules de coefficients binomiaux)
Déjà vu.

Indication 30 · Énoncé p. 10 (Somme sur une diagonale)
Faire un schéma pour se convaincre qu'il s'agit de nombre de Fibonacci puis une récurrence.

Indication 31 · Énoncé p. 11 (Nombre de dérangements)
En notant D_n le nombre de dérangements à n éléments on a

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$$

puis utiliser la formule d'inversion de Pascal de l'exercice 14.

Indication 32 · Énoncé p. 11 (Nombre de surjections)
En notant $S_{n,p}$ ce nombre de surjections on a

$$p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S_{n,k}$$

puis utiliser la formule d'inversion de Pascal de l'exercice 14.

Indication 33 · Énoncé p. 11 (Nombre de dérangements, les autres méthodes)
Au pire faire l'exercice 31 pour obtenir la formule explicite

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

et vérifier que cette formule vérifie les deux points précédents. Mais il y a des méthodes plus simples à chaque fois.

1. Distinguer selon l'image de n et selon qu'il s'agisse d'une transposition ou d'un cycle de longueur plus grande.
2. Interpréter $e^x \sum D_k \frac{x^k}{k!}$ en lien avec l'exercice 31.

Indication 34 · Énoncé p. 12 (Nombre de surjections, les autres méthodes)
Au pire faire l'exercice 32 pour obtenir la formule explicite

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

et vérifier que cette formule vérifie les trois points précédents. Mais il y a des méthodes plus simples à chaque fois.

1. Distinguer selon $f(n)$ et si il est atteint par d'autres éléments ou pas.
2. Distinguer selon $f^{-1}(\{p\})$.
3. Au pire la formule explicite, un peu mieux la récurrence, sinon développer et interpréter les surjections comme blocs.

Indication 35 · Énoncé p. 12 (Nombre de surjections: un cas très particulier)
Il y a un élément choisi deux fois. Le choisir.

Indication 36 · Énoncé p. 12 (Nombre d'involutions)
Noter u_n le nombre d'involutions d'un ensemble à n éléments.

En distinguer selon que l'image du dernier élément est lui même ou un autre élément on obtient

$$u_n = u_{n-1} + (n-1)u_{n-2}$$

puis résoudre.

Alternativement il s'agit de compter le nombre de permutations ne possédant que des deux cycles.

On obtient alors

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!2^k}$$

(cf automorphismes de S_n), mais ce n'est pas une relation de récurrence.

Indication 37 · Énoncé p. 13 (Encore des capitaines)
Distinguer sur les cardinaux en choisissant d'abord B puis A (ou A puis B) puis sommer.

Reconnaître une formule des capitaines.

Indication 38 · Énoncé p. 13 (Nombre de partitions (nombres de Bell))
Cela revient à compter le nombre de partitions.

Singulariser un élément a d'un ensemble à n élément et distinguer selon la taille de la classe d'équivalence de a.

On obtient avec $k \in [\![1, n+1]\!]$ ce cardinal $\binom{n+1}{k}$ possibilités pour sa classe d'équivalence et B_{n+1-k} possibilités pour le reste.

Sommer sur k et travailler un peu la somme.

Indication 39 · Énoncé p. 13 (Deux généralisations)

1. Reconnaître une généralisation de la formule des capitaines. Au choix utiliser la formule explicite, procéder par récurrence, ou interpréter comme un choix de rôles télescopiques.
2. Reconnaître une généralisation de la formule de Vandermonde. Au choix se compliquer la tâche par récurrence ou juste développer $(1+X)^{p_1} \cdots (1+X)^{p_r}$.

Indication 40 · Énoncé p. 13 (Ronds et batons translatés)
Revient à

$$\sum_{i=1}^{p} (k_i - a_i) = n - \sum_{i=1}^{p} a_i.$$

Indication 41 · Énoncé p. 14 (Épaississement de la diagonale)
Faire un schéma. Cela représente le nombre de termes à une distance k de la diagonale.

Indication 42 · Énoncé p. 14 (Fonctions très strictements croissantes)
Montrer l'application qui à une telle fonction f associe la fonction $k \mapsto f(k) - (k-1)d$ permet de construire une bijection avec un ensemble de fonctions croissantes et utiliser l'exercice 4

Indication 43 · Énoncé p. 14 (Formule de Legendre)
Cf TD d'arithmétique.

Indication 44 · Énoncé p. 14 (Selon la taille de l'intersection)
Commencer par choisir l'intersection, puis A, puis B.

Indication 45 · Énoncé p. 14 (Diamètre fixé)
Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ construire une telle partie en
- ▷ Choisissant le minimum et par conséquent le maximum
- ▷ Choisir les éléments entre les deux

Indication 46 · Énoncé p. 15 (Pas de consécutifs (encore Fibo !))
Pour construire une telle partie de $[\![1, n]\!]$ distinguer selon que $n+1$ est dedans ou non.

On obtient la relation de récurrence de Fibonacci.

Indication 47 · Énoncé p. 15 (Nombre de parenthésages)
On obtient la relation de récurrence des nombres de Catalan, cf exercice 12.

Indication 48 · Énoncé p. 15 (Nombre de chemins positifs)
Ce sont les nombre de Catalan (pourquoi ?)

Indication 49 · Énoncé p. 15 (Classes d'équivalences de tailles égales)
Choisir successivement chaque classe d'équivalence:
- ▷ $\binom{np}{p}$ pour la première
- ▷ $\binom{(n-1)p}{p}$ pour la seconde
- ▷ etc.
- ▷ $\binom{2p}{p}$ pour l'avant dernière
- ▷ $\binom{p}{p}$ pour la dernière

puis ne pas oublier de diviser par $n!$ pour l'ordre.

Indication 50 · Énoncé p. 15 (Nombre de relations d'ordre total)
Cela revient à déterminer une bijection de $[\![1, n]\!]$ vers E (pourquoi ?) d'où $n!$.

Indication 51 · Énoncé p. 16 (Un peu de tarot)
RAS

Indication 52 · Énoncé p. 16 (Sécurité du téléphone)
RAS

Indication 53 · Énoncé p. 16 (Un exemple de crible)
On sait calculer le nombre d'entiers divisibles par k, il s'agit de $\lfloor N/k \rfloor$. Faire une formule du crible (à trois ensembles) pour éviter de compter plusieurs fois le même.

Indication 54 · Énoncé p. 16 (Intersection de diagonales)
Choisir un point d'intersection c'est choisir 4 sommets.

Indication 55 · Énoncé p. 17 (Variation autour des sommes)
Plusieurs méthodes, par exemple en distribué un à chacun puis répartir le reste.

Indication 56 · Énoncé p. 17 (Comptage avec pivot)
Compter de parties à $g+1+d$ éléments de $[\![0,n]\!]$.

Pour tout k compter le nombre de parties dont un k est un « pivot » avec g éléments à gauche et d éléments à droite.

Indication 57 · Énoncé p. 17 (Nombre de relations)
1. Il s'agit de compter le nombre de fonctions de $E \times E \to \{0,1\}$ ou encore le nombre de matrices $n \times n$ de coefficients 0 ou 1.
2. Idem mais en imposant la valeur sur la diagonale.
3. Idem mais cette fois-ci compter les matrices symétriques.

Indication 58 · Énoncé p. 17 (Nombre d'idempotents)
Distinguer selon $|\mathrm{Im}(f)|$. En notant k ce cardinal.
- ▹ Il y a $\binom{n}{k}$ choix pour l'image.
- ▹ Sur l'image il n'y a qu'un seul choix.
- ▹ Sur le complémentaire il y a autant de choix que d'applications d'un ensemble de $n-k$ éléments dans un ensemble à k éléments.

Somme sur k.

Indication 59 · Énoncé p. 17 (Maximum du produit à somme fixée)
Remarquer que:
- ▹ on peut se passer de 1,
- ▹ on peut se passer de 4 ou plus car pour $m \geq 4$, $2(m-2) \geq 4$,
- ▹ et $3 \times 3 \geq 2 \times 2 \times 2$.

On en déduit un résultat selon la congruence de n modulo 3.

On pourra faire le lien avec l'exercice ?.

Indication 60 · Énoncé p. 18 (Disjoints et non contenus)
1. Cela revient à compter le nombre de parties de $E \setminus A$.
2. Cela revient à compter le (complémentaire du) nombre de parties de A.
3. Cela revient à compter le nombre de parties de $E \setminus A$.

Indication 61 · Énoncé p. 18 (Somme de cardinaux de parties)

1. Somme de $k\binom{n}{k}$, ou bien par $|A| = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)$ et en inversant les sommes.
2. On peut fixer d'abord l'intersection puis sommet ou tout simplement faire $|A \cap B| = \sum_{x\in E} \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$ et inverser les sommes.
3. Faire de même ou se ramener à l'intersection.

Indication 62 · Énoncé p. 18 (Nombre de solutions d'une équation ensembliste)

1. Regarder la condition pour qu'il y ait une solution. Puis regarder ce qu'il faut faire sur $A \setminus B$ et sur $E \setminus A$.
2. Faire de même ou juste passer au complémentaire.

Indication 63 · Énoncé p. 19 (Approximation diophantienne)
Remarquer que par principe des tiroirs il existe $i, j \in [\![0, n]\!]$ distincts tels que

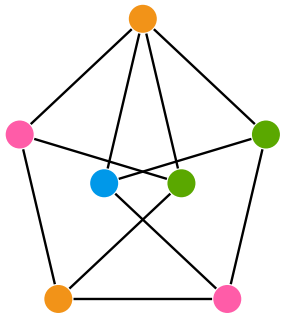
$$|(ix - \lfloor ix \rfloor) - (jx - \lfloor jx \rfloor)\ | < \frac{1}{n}.$$

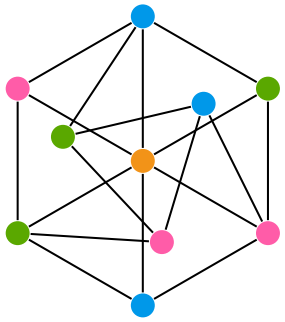
Remarquer ensuite que $q = |i - j|$ convient.

Indication 64 · Énoncé p. 19 (Tiroirs et groupes)
Étant donné $g \in G$ montrer que $\{a^{-1}g, a \in A\}$ rencontre B.

Indication 65 · Énoncé p. 19 (Nombre chromatique du plan)

1. Considérer un triangle équilatéral et un principe des tiroirs.
2. Exhiber un pavage hexagonal.
3. On pourra méditer au choix une des deux figures suivantes:





Indication 66 · Énoncé p. 19 (Une application des tiroirs)
Montrer la propriété plus forte: il existe $i, j \in [\![1, n+1]\!]$ distincts tels que $a_i = 2^{v_i} b_i$ et $a_j = 2^{v_j} b_j$ avec $b_i = b_j$ (et $v_i \leq v_j$).

Indication 67 · Énoncé p. 20 (Cardinaux et algèbre linéaire sur corps finis)

1. q^{n^2}
2. Cela revient à dénombre le nombre de familles libres de $\mathbb{K}^n$ de n éléments.
   - ▷ On a $q^n - 1$ possibilités pour le premier vecteur
   - ▷ Puis $q^n - q$ possibilités pour le second
   - ▷ etc.
   - ▷ Puis $q^n - q^{n-1}$ possibilités pour le dernier
3. Constater que le $\det : \mathrm{GL}_n(K) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme et que donc tous les $\det^{-1}(\{x\})$ ont le même cardinal (pourquoi ?).

Indication 68 · Énoncé p. 20 (Le problème des chapeaux, cas général)
Commencer par formaliser: on a

$$p_{k,n} = \frac{|\{\sigma \in S_n \mid N(\sigma) = k\}|}{n!}.$$

S'inspirer ensuite du calcul du nombre de dérangements (cas $k = 0$) pour obtenir la formule explicite (pour $k \leq n$)

$$p_{k,n} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Indication 69 · Énoncé p. 20 (Nombre de partitions)
Si une grande complexité ne vous effraie pas procéder par exemple de manière récursive.

Indication 70 · Énoncé p. 21 (Points entiers de boules pour diverses normes)
Faire des schémas.

1. Il s'agit de compter les points entiers dans un disque. Ce qui correspond presque à son aire. Pour cela encadrer par exemple par des rectangles.
2. Il s'agit de compter les points entiers dans un symplexe (par exemple pour $n = 3$ il s'agit d'un octaèdre). En encadrant par des hypercubes on peut trouver $\frac{2^n}{n!} R^n$.

Indication 71 · Énoncé p. 21 (Encore des indicatrices)
Intervertir une somme ou bien couple A avec $\overline{A}$.

Indication 72 · Énoncé p. 21 (Un chouette exercice de crible de M.V)
Constater que cela semble beaucoup à une formule du crible.

Pour les x_i entier il s'agit du crible pour $[\![1, x_i]\!]$.

Puis soit faire par densité soit considérer les $\int_0^A \mathbb{1}_{[0,x_i]}(t)\,\mathrm{d}t$.

Solutions

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 3 · Indication p. 22 (Symétrie des coefficients binomiaux)

1. On a d'après la formule explicite

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

2. On a dans $\mathbb{K}(X)$,

$$X^n\left(1+\frac{1}{X}\right)^n = (1+X)^n$$

Par conséquent, en développant les membres de gauche et de droit par la formule du binôme,

$$X^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k$$

i.e

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

En effectuant le changement d'indice $j = n-k$ dans la somme de gauche, on obtient

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} X^j = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En considérant de part et d'autre le coefficient en X^k, on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

3. D'après les règles de calcul ensembliste, $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$.

Par conséquent φ est bijective (de bijection réciproque φ).

En notant pour tout entier k,

$$\mathcal{P}_k(E) = \{A \subset E \mid |A| = k\}$$

on a

- ▷ par interprétation combinatoire des coefficients binomiaux

$$|\mathcal{P}_k(E)| = \binom{n}{k}$$

$$|\mathcal{P}_{n-k}(E)| = \binom{n}{n-k}$$

- ▷ Par le cardinal d'un complémentaire

$$\varphi(\mathcal{P}_k(E)) \subset \mathcal{P}_{n-k}(E)$$

et donc comme $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$, on a

$$\varphi(\mathcal{P}_k(E)) \subset \mathcal{P}_{n-k}(E)$$

▷ Comme φ est une bijection

$$|\varphi(\mathcal{P}_k(E))| = |\mathcal{P}_k(E)|$$

et donc on a bien

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

4. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Choisir k éléments parmi n revient à choisir les $n-k$ éléments dans le complémentaire donc

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

[Faire un schéma]