Équations Différentielles Ordinaires

Énoncés 2
Calculs 2
Méthodes et résultats essentiels 6
Indications 24
Solutions 30

Énoncés

Dans tout le TD, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in I$.

Calculs

Exercice 1 (◔★ Équations à coefficients constants avec second membre)
Déterminer des solutions des équations suivantes:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 5(x-1)^2$
2. $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + y(t) = \left(e^t + 1\right)^2$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, 2y'(x) + 3y(x) = e^x + x$
4. $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - y(t) = \left(e^t + 1\right)^2$
5. $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = 3y(t) - 13\cos(2t)$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, 2y'(x) + y(x) = x^3 - 4$
7. $\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = -2x(t) + \cos(t)\sin(t)$
8. (plus long)
$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f(t) + \sin(t)^4$$
9. (un peu différent)
$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = xe^x$$
10. (plus long)
$$\forall t \in \mathbb{R}, p'(t) + 2p(t) = t^5$$
11. (un peu différent et plus long)
$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) = (\cos(x)x)^2$$

Solution p. 30

Exercice 2 (◔★ Équations avec second membre bis)
Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes

1. (en utilisant la variation de la constante)

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = e^{-5x}$$

2. (en utilisant la variation de la constante)

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = e^{x}$$

3. $$\forall t \geq 0, x'(t) = -x(t) + 3\frac{e^{-t}}{1+t^2}$$

4. $$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 2\frac{e^{-x}}{1+e^{x}}$$

5. $$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 3y(x) = \left(1+e^{3x}\right)^5$$

6. $$\forall t > 0, 2f'(t) - f(t) = \frac{\sqrt{e^t}}{t^2+2t}$$

7. $$\forall t > 0, y'(t) + \frac{1}{3}y(t) = \frac{1}{3^3}t^3 + \frac{e^{-\frac{t}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}$$

Solution p. 32

Exercice 3 (◔★ Conditions initiales)
Déterminer les solutions des problèmes suivants

1.
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, y'(x) + y(x) = x$$
$$y(0) = 2$$

2.
$$\forall t \geq 1, x'(t) = \frac{x(t)}{2} + e^{\frac{t}{2}}\ln\left(\sqrt{t}\right)$$
$$x(1) = -3$$

Indication p. 24

Exercice 4 (◔★ Autre condition)
Déterminer les solutions du problème suivant

$$\forall x \in [0,1],\ y'(x) + 2y(x) = 3$$

$$\int_0^1 y(x)dx = 0$$

Indication p. 24

Exercice 5 (◔★ Équations homogènes)
Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes:

1. $\forall \theta \in \mathbb{R}, y'(\theta) + (1+\cos(\theta)^2)y(\theta) = 0$
2. $\forall t \in]0,1[, x'(t) = \dfrac{x(t)}{t\ln(t)}$
3. $\forall x > 0, x^2y'(x) - (5-4x)y(x) = 0$
4. $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right], \cos(t)f'(t) + f(t) = 0$

Solution p. 33

Exercice 6 (◑★ Équations avec second membre)
Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes:

1. $\forall t > 0,\ x'(t) + \dfrac{1-2t}{t^2}x(t) = 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + xy(x) = x$
3. $\forall \theta \in]0, \dfrac{\pi}{2}[, f'(\theta) + \dfrac{1+\tan(\theta)^2}{\tan(\theta)}f(\theta) = \tan(\theta)^3 + \tan(\theta)$

Solution p. 34

Exercice 7 (◔★ Équations d'ordre 2)
Déterminer l'ensemble des solutions des équations suivantes:

1. $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y''(t) - \sqrt{2}y'(t) + y(t) = t^3$
2. $\forall t \in \mathbb{R},\ x''(t) - 2x'(t) + x(t) = t\,\mathrm{ch}(t)$
3. $\forall x \in [0,1],\ y''(x) = 4y(x) + x(1-x)$
4. $\forall t \geq 0,\ y''(t) + 4y(t) = \cos(t)^2$

Indication p. 24

Exercice 8 (◔★ Avec conditions initiales)
Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants

1. $$\begin{aligned} \forall t \geq 0, x''(t) - x'(t) &= x(t) + te^t \\ x(0) &= 1 \\ x'(0) &= 0 \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} \forall t \geq 0, y''(t) + 9y(t) &= \cos^3(t) \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Indication p. 24

Exercice 9 (◔★ Avec conditions aux bords)
Déterminer l'ensemble des solutions du problème suivant

$$\forall x \in [-1,1], y''(x) - 2y'(x) - 4y(x) = x^2$$

$$y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y(1) = 0$$

Indication p. 24

Méthodes et résultats essentiels

Exercice 10 (◔★♣ Formule de Duhamel)
Soient $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Montrer que l'unique solution du problème de Cauchy

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

est

$$y : t \mapsto y_0 e^{-\int_{t_0}^{t} a(\xi)\,\mathrm{d}\xi} + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{-\int_{s}^{t} a(\xi)\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}s.$$

Indication p. 24

Exercice 11 (◔★ Systèmes d'équations différentielles)

1. Trouver toutes les fonctions $(x, y) \in \left(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})\right)^2$ telles que

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) - 1 \\ y'(t) = x(t) - 1. \end{cases}$$

2. Trouver toutes les fonctions $(q, p) \in \left(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})\right)^2$ telles que

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} q'(t) = p(t) \\ p'(t) = 1 - q(t). \end{cases}$$

3. Trouver toutes les fonctions $(u, v) \in \left(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})\right)^2$ telles que

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = u(t) - v(t). \end{cases}$$

4. Trouver toutes les fonctions $(f, g) \in \left(\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})\right)^2$ telles que

$$\forall t \geq 0, \quad \begin{cases} f'(t) = -g(t) \\ g'(t) = f(t) - 2g(t). \end{cases}$$

Indication p. 24

Exercice 12 (◔★♠ Conjugaison)
On note dans cet exercice D l'opérateur de dérivation.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$.

1. Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{K})$.

   Exprimer $e_{-\lambda} \times D(e_\lambda \times f)$ en fonction de $D(f)$ et de λ.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.

   Exprimer $e_{-\lambda} \times D^n(e_\lambda \times f)$ en fonction des dérivées de f et de λ.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$.

   Exprimer $e_{-\lambda} \times P(D)(e_\lambda \times f)$ en fonction des dérivées de f et de λ.
4. Commenter.

Indication p. 24

Exercice 13 (◔★ Un exemple d'énergie)
Soit $E \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, on pose $f = -E'$.

1. Soit y une solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y''(t) = f(y(t)).$$

   Montrer que la fonction

$$H : t \mapsto \frac{1}{2}(y'(t))^2 + E(y(t))$$

   est constante.
2. Soit y une solution de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y''(t) = f(y(t)) - \lambda y'(t)$$

   où $\lambda \geq 0$.

   Montrer que la fonction

$$H : t \mapsto \frac{1}{2}(y'(t))^2 + E(y(t))$$

   est décroissante.

Indication p. 24

Exercice 14 (◑★ Un exemple de formulation elliptique)
On note

$$E = \{u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid u(0) = u(1) = 0\}.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Soit $y \in E$.

$$(\forall t \in [0,1], -y''(t) + y(t) = f(t)$$
$$y(0) = y(1) = 0) \Leftrightarrow \left(\forall g \in E, \int_0^1 (y'(t)g'(t) + y(t)g(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Indication p. 24

Exercice 15 (◑★ Un exemple de recollement)
Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, xy'(x) + y(x) = e^x.$$

Indication p. 24

Exercice 16 (◔★ Un exemple d'équation intégrale)
Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^0(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\mathbb{R})$ telles que

$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, y(\theta) = \cos(\theta) + 3\int_0^\theta \tan(\varphi)y(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Indication p. 25

Exercice 17 (◔★♠ Lemme de Gronwall: version différentielle)
Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.

Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \geq 0,\ y'(t) \leq a(t)y(t).$$

Montrer que

$$\forall t \geq 0,\ y(t) \leq y(0)e^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Indication p. 25

Exercice 18 (◔★♠ Lemme de Gronwall: version intégrale)
Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction **positive** et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ une fonction **positive** telle que

$$\forall t \geq 0, 0 \leq y(t) \leq y_0 + \int_0^t a(s)y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Montrer que

$$\forall t \geq 0, 0 \leq y(t) \leq y_0 e^{\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Indication p. 25

Exercice 19 (◑★ Une introduction au Wronksien)
Soient $a, b \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On considère l'équation

$$\forall t \geq 0, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0. \tag{1}$$

Soient $y_1, y_2 \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ deux solutions de (1).

On pose pour $t \geq 0$

$$W(y_1, y_2)(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t).$$

1. Montrer que $W(y_1, y_2)$ est dérivable et déterminer sa dérivée en fonction de a, b et W.
2. Donner l'expression explicite de $W(y_1, y_2)$ en fonction de $W(y_1, y_2)(0)$.
3. **(Bonus)** Proposer au moins une application du résultat précédent.

Indication p. 25

Exercice 20 (◔★ Bootstrap de régularité: cas linéaire)
Soit $N \in \mathbb{N}$.

Soient $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathcal{C}^N(I, \mathbb{K})$ et $b \in \mathcal{C}^N(I, \mathbb{K})$.

Soit $y \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ solution de

$$\forall t \in I, y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t).$$

Montrer que $y \in \mathcal{C}^{N+n}(I, \mathbb{K})$.

Indication p. 25

Exercice 21 (◔★ Bootstrap de régularité: cas non linéaire autonome)
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $F \in \mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{K})$.

Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, J)$ solution de

$$\forall t \in I, f'(t) = F(f(t)).$$

Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(I, J)$.

Commenter.

Indication p. 25

Exercice 22 (◔★ De l'importance de nommer les objets)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$.

Exprimer f en fonction de $f' + f$.

Indication p. 25

Exercice 23 (◔★ Les solutions physiques)
Soit $P = X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{C}_2[X]$.

Déterminer une CNS sur P pour que toutes les solutions de

$$\forall t \geq 0, y''(t) + \alpha_1 y'(t) + \alpha_0 y(t) = 0$$

tendent vers 0 en $+\infty$.

Indication p. 26

Exercice 24 (◔★ Construction d'exercice: cas CC et variation de la constante)
Soient $a \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Proposer une EDL1CC dont l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto Ce^{-@} + f(t), C \in \mathbb{K}\right\}$$

Indication p. 26

Exercice 25 (◔★ Construction d'exercice: variation de la constante)
Soient $\Phi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K} \setminus \{0\})$ et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Proposer une EDL1 dont l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto C\Phi(t) + f(t), C \in \mathbb{K}\}$$

Indication p. 26

Exercice 26 (◑★ Petites perturbations par des fonctions bornées)
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ une fonction bornée.

1. Montrer que toutes les solutions de
$$\forall t \geq 0, \quad y'(t) + y(t) = \varphi(t)$$
sont bornées.
2. Montrer qu'il existe une seule solution de
$$\forall t \geq 0, \quad y'(t) - y(t) = \varphi(t)$$
qui est bornée.

Soit $\psi \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ telle que

$$\forall t \geq 0, \quad |\operatorname{Re}(\psi(t))| \leq \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que toutes les solutions de
$$\forall t \geq 0, \quad y'(t) + (1 + \psi(t))y(t) = \varphi(t)$$
sont bornées.
2. Montrer qu'il existe une seule solution de
$$\forall t \geq 0, \quad y'(t) - (1 + \psi(t))y(t) = \varphi(t)$$
qui est bornée.

Indication p. 26

Exercice 27 (◑★ Perturbations: variante)

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

$$f' + f \text{ est borné.}$$

Montrer que

$$f \text{ est borné.}$$

2. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x \to +\infty} (f'(x) + f(x)) = 0.$$

Montrer que $f(x)$ converge quand $x \to +\infty$ et que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Indication p. 26

Exercice 28 (◔★ Second membre défini par morceaux)

Résoudre l'équation différentielle suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = |x|.$$

Indication p. 26

Exercice 29 (◔★ Parité)

1. Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction impaire.

1.1. Soit $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction impaire.

Montrer que toutes les solutions de

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

sont paires.

1.2. Soit $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction paire.

Montrer que y solution

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$$

est impaire ssi $y(0) = 0$.

2. Soient $a_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction paire et $a_1 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction impaire.

2.1. Soit $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction paire.

Montrer que y solution de

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

est paire ssi $y'(0) = 0$.

2.2. Soit $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction impaire.

y solution de

$$\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

est impaire ssi $y(0) = 0$.

Indication p. 26

Exercice 30 (◑★ Minimisation et équation elliptiques: la chaînette)

On pose $E = \{y \in \mathcal{C}^2([-1, 1], \mathbb{R}) \mid y(-1) = y(1) = 0\}$.

Soit $g \in \mathbb{R}$ et $\kappa > 0$.

Déterminer, si elle existe, la fonction $y \in E$ minimisant

$$\Phi : y \mapsto \int_{-1}^{1} \Big((y'(x))^2 + \kappa y(x)^2 - g y(x) \Big).$$

Indication p. 26

Exercice 31 (◔★ Nombre de degrés de libertés)

1. Trouver l'ensemble des fonction $y \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in [0,1], \quad y'(t) + 2y(t) = t(1-t) \tag{1}$$

2. Pour chacune des conditions suivantes, déterminer l'ensemble des fonctions $y \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant (1) ainsi que la condition donnée.

- **2.1.** $y(0) = 0$
- **2.2.** $y'(0) = 0$
- **2.3.** $y(1) = 0$
- **2.4.** $y(0) + y(1) = 0$
- **2.5.** $\int_0^1 ty(t)dt = 0$
- **2.6.** $y(0) - y'(0) = 0$
- **2.7.** $y(0) = y(1) = 0$
- **2.8.** $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

3. Commenter.

4. Pour chacune des conditions suivantes, déterminer l'ensemble des fonctions $y \in C^1([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant (1) ainsi que la condition donnée.

- **4.1.** $y(0) - e^2 y(1) = 0$
- **4.2.** $y(0) - e^2 y(1) = \frac{1}{2}$
- **4.3.** $\int_0^1 (@ + b)y(t)dt = 0$ où $a = 2e^2 - 2$ et $b = 3 - e^2$
- **4.4.** $y'(0) + 2y(0) = 0$
- **4.5.** $y(0) = y(1) = \frac{1}{2(1-e^2)}$
- **4.6.** $y(0) = 0$ et $y'(0) = -2$

5. Commenter à nouveau.

Indication p. 26

Exercice 32 (◔★ Valeurs propres du Laplacien de Dirichlet)

Donner l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que le problème

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1], & y''(t) = \lambda y(t) \\ & y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

admette des solutions non nulles.

Indication p. 27

Exercice 33 (◔★ Oscillateur harmonique excité)
Soit $\omega_0 > 0$.

Déterminer pour $\omega > 0$ et $A \in \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, x''(t) + \omega_0^2 x(t) &= A\cos(\omega t) \\ x(0) &= x_0 \\ x'(0) &= v_0 \end{aligned}$$

Indication p. 27

Exercice 34 (◑★ Variation des constantes pour les EDOL2)
Soient $a_1, a_0, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in I, y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = b(t).$$

On suppose que l'on connaît $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ telles que l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect}(y_1, y_2).$$

Montrer que

$$y_p : t \mapsto \gamma_1(t)y_1(t) + \gamma_2(t)y_2(t)$$

où $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ est solution particulière de l'équation ssi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t)\gamma_1'(t) + y_2(t)\gamma_2'(t) = 0 \\ y_1'(t)\gamma_1'(t) + y_2'(t)\gamma_2'(t) = b(t). \end{cases}$$

Commenter.

Indication p. 27

Exercice 35 (◔★ Chambre à bulles)
Soit $\omega > 0$.

1. Donner l'ensemble des fonctions $(x, y) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})^2$ solutions de
$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, x''(t) &= -\omega y'(t) \\ y''(t) &= +\omega x'(t). \end{aligned}$$
Représenter graphiquement l'ensemble $\{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}_+\}$.
2. Soit $\lambda > 0$. Donner l'ensemble des fonctions $(x, y) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})^2$ solutions de
$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, x''(t) &= -\omega y'(t) - \lambda x'(t) \\ y''(t) &= +\omega x'(t) - \lambda y'(t) \end{aligned}$$
Représenter graphiquement l'ensemble $\{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}_+\}$.

Indication p. 27

Exercice 36 (◑★ Toute périodique ?)
Soit $T > 0$.

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction T-périodique.

Soit $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction T-périodique.

Montrer que toutes les solutions de
$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$
sont T-périodiques ssi
$$\int_0^T a(s)\,\mathrm{d}s = 0$$
et
$$\int_0^T b(s)e^{\int_0^s a(\xi)\,\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}s = 0.$$

Indication p. 27

Exercice 37 (◑★ Au moins une périodique !)
Soit $T > 0$.

Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction T-périodique.

Soit $b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ une fonction T-périodique.

On suppose que $\int_0^T a(s)\,\mathrm{d}s \neq 0$.

Montrer qu'une et unique solution de

$$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

est T-périodique.

Indication p. 27

Exercice 38 (◑★ Recollement avec second membre quelconque)
Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ dérivable en 0, l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, xy'(x) + y(x) = f(x)$$

admet une et unique solution.

Indication p. 27

Exercice 39 (◔★ Pas une équation différentielle)
Déterminer toutes les fonctions $y \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{K})$ telles que

$$\forall t \in [0,1], y'(t) + y(t) = \int_0^1 y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Indication p. 27

Exercice 40 (◑★ Équation de Verhulst)
Soit $u_{\max} > 0$ et $\kappa > 0$.

Pour $u_0 \geq 0$, on considère le problème de Cauchy

$$\forall t \geq 0, u'(t) = \kappa u(t)(u_{max} - u(t))$$
$$u(0) = u_0.$$

et on **admet** que ce problème de Cauchy admet une et unique solution.

Déterminer cette solution et la représenter graphiquement selon les différents cas.

Indication p. 27

Exercice 41 (◑★ Une formule de Duhamel elliptique)
Soit $\lambda > 0$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$.

Montrer que l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, -y''(t) + \lambda^2 y(t) &= f(t) \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y_1 \end{aligned}$$

est

$$y : t \mapsto \left(y_0 \operatorname{ch}(\lambda t) + \frac{y_1}{\lambda} \operatorname{sh}(\lambda t) + \int_0^t \frac{\operatorname{sh}(\lambda(t-s))}{\lambda} f(s)\, \mathrm{d}s \right).$$

Indication p. 27

Exercice 42 (◑☆ Reparamétrisation)

1. On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$\forall x > 0, x^2 y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = (x+1)^2.$$

1.1. Analyse Montrer que si y est solution alors $z : \xi \mapsto y\left(e^{\xi}\right)$ est solution d'une équation différentielle que l'on explicitera.

1.2. Synthèse En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in]-1, 1[, (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$

à l'aide de la reparamétrisation $x = \sin(\theta)$.

3. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left(1+x^2\right)^2 y''(x) + 2x(1+x^2)y'(x) + 4y(x) = 0$$

à l'aide de la reparamétrisation $x = \tan(\theta)$.

4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)y''(x) + xy'(x) - 4y(x) = 0$$

à l'aide de la reparamétrisation $x = \operatorname{sh}(t)$.

Indication p. 28

Exercice 43 (◔☆ Construction d'exercice: reparamétrisation)
Soient $a_0, a_1 \in \mathbb{K}^2$, $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^2(I, J)$ bijective.

Déterminer des fonctions $\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$ et β continues sur J telles que, pour toute fonction $y \in \mathcal{C}^2(J, \mathbb{K})$,

$$\forall x \in J, \alpha_2(x)y''(x) + \alpha_1(x)y'(x) + \alpha_0(x)y(x) = \beta(x)$$

ssi la fonction $z : t \mapsto y(\varphi(t))$ vérifie

$$\forall t \in I, z''(t) + a_1 z'(t) + a_0 z(t) = b(t).$$

Indication p. 28

Exercice 44 (◔★ Limites et formule de Duhamel)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$f'(x) + \alpha f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Montrer que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\alpha}.$$

Indication p. 28

Exercice 45 (◑☆ Valeurs propres de la valeur moyenne)
On note

$$M : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$$
$$f \mapsto \left(x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases} \right)$$

1. Montrer que $M \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}))$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on note

$$E_\lambda = \mathrm{Ker}(M - \lambda\,\mathrm{Id})$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E_\lambda$. Montrer que
- ▷ $(1-\lambda)f(0) = 0$
- ▷ f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda f'(x) + \frac{\lambda - 1}{x} f(x) = 0$$

2. Déterminer E_0.
3. Déterminer E_1.
4. Déterminer tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$E_\lambda \neq \{0\}.$$

Indication p. 28

Exercice 46 (◔☆ Pseudopériodicité)
Soit $T > 0$.

Soient $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de

$$\forall t \in \mathbb{R}, y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

vérifiant de plus

$$y(0) = y(T) = 0.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, y(nT) = 0.$$

Indication p. 28

Exercice 47 (◑☆ Encore un recollement)
Déterminer selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble des solutions du problème de Cauchy

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, xy'(x) - 3y(x) &= x^6 \\ y(1) &= \alpha \end{aligned}$$

Indication p. 28

Exercice 48 (◔☆ Équations de Bernoulli)
Soit $\alpha \neq 1$ un réel, $a_0 \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Montrer que $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas est solution de l'équation

$$\forall t \in I, y'(t) = a_0(t)y(t) + b(t)(y(t))^\alpha$$

ssi $z : t \mapsto (y(t))^{1-\alpha}$ est solution de l'équation

$$\forall t \in I, \frac{1}{1-\alpha} z'(t) = a_0(t)z(t) + b(t).$$

Commenter.

Indication p. 28

Exercice 49 (◕☆ Équations de Riccati)
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. On cherche des méthodes pour transformer l'équation

$$\forall t \in I, y'(t) = a(t)y(t) + c(t)(y(t))^2 + b(t)$$

en une équation linéaire.

1. On suppose que c ne s'annule pas.

   Montrer que $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est solution de l'équation différentielle

   ssi $u : t \mapsto e^{-\int_{t_0}^t c(s)y(s)\,\mathrm{d}s}$ est solution d'une EDOL2 que l'on précisera.
2. On suppose que l'on connaît $\tilde{y}$ une solution particulière de l'équation. Montrer que pour tout $z \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ ne s'annulant pas $y = \tilde{y} + \frac{1}{z}$ est solution ssi z est solution d'une EDOL1 que l'on précisera.

Indication p. 29

Exercice 50 (◑★ Équation de la brachistochrone)
Soit $L > 0$ et $C > 0$.

Déterminer une solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in [0, L], \left(1 + (y'(x))^2\right) y(x) = C.$$

Indication p. 29

Exercice 51 (◑☆ Différentiation sur les fonctions de dérivées bornées)
Soit E l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont toutes les dérivées sont bornées.

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'application $\mathrm{Id} + \lambda D$ est bijective.

Indication p. 29

Exercice 52 (◔☆ Gronwall avec second membre)
Soient $a, b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, et $y, \tilde{y}$ telles que

$$\begin{aligned} y(0) &\leq \tilde{y}(0) \\ \forall t \geq 0, y'(t) &\leq a(t)y(t) + b(t) \\ \forall t \geq 0, \tilde{y}'(t) &= a(t)\tilde{y}(t) + b(t). \end{aligned}$$

Montrer que

$$\forall t \geq 0, y(t) \leq \tilde{y}(t).$$

Indication p. 29

Exercice 53 (◕★ Variation des constantes: cas EDOLnCC scindé)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré n scindé à racines simples.

On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses racines.

Soit $b \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. On cherche à déterminer une solution particulière de l'équation

$$P(D)(y) = b$$

1. Montrer que y est solution de l'équation homogène ssi il existe

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

tel que

$$\forall t \in I, \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}}_{R(t)} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

2. Soient $\gamma_1, ..., \gamma_n \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. Montrer que si

$$\forall t \in I, \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{pmatrix} = (R(t))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}$$

alors $y_p : t \mapsto \sum_{k=1}^n \gamma_k(t) e^{\lambda_k t}$ est une solution particulière.

3. Conclure que

$$y_p : t \mapsto \int_0^t \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k (t-s)} b(s) \, \mathrm{d}s$$

où

$$\forall k \in [\![1, n]\!], c_k = \frac{1}{\prod_{j \neq k} (\lambda_k - \lambda_j)}$$

est une solution particulière.

Indication p. 29

Indications

Indication 3 · Énoncé p. 3 (Conditions initiales)
Déterminer l'ensemble des solutions puis utiliser les CI.

Pour déterminer des solutions particulières

1. Variation de la constante ou recherche de solution polynomiale.
2. Variation de la constante.

Indication 4 · Énoncé p. 4 (Autre condition)
Déterminer l'ensemble des solutions.

On obtient un degré de liberté. Le fixer avec la condition.

Indication 7 · Énoncé p. 5 (Équations d'ordre 2)
Pour la solution homogène RAS, suivre la méthode du cours.

Pour les solutions particulières, rechercher des solutions polynômes fois exponentielles.

Indication 8 · Énoncé p. 5 (Avec conditions initiales)
Idem que pour l'exercice 7, utiliser ensuite les CI pour déterminer les solutions.

Indication 9 · Énoncé p. 5 (Avec conditions aux bords)
Idem que pour l'exercice 7, utiliser ensuite les CB pour déterminer les solutions.

Indication 10 · Énoncé p. 6 (Formule de Duhamel)
Cf le cours. Il suffit d'écrire la méthode de variation de la constante.

Indication 11 · Énoncé p. 6 (Systèmes d'équations différentielles)
Dans chaque cas plusieurs options sont possibles:

- ▷ Déterminer deux CLs des fonctions satisfaisant des équations d'ordre 1 non couplées.
- ▷ Par analyse synthèse, se ramener à une équation d'ordre 2.

Indication 12 · Énoncé p. 7 (Conjugaison)
Cf cours.

Indication 13 · Énoncé p. 7 (Un exemple d'énergie)
Dériver.

Indication 14 · Énoncé p. 8 (Un exemple de formulation elliptique)

- ▷ On rappelle qu'une fonction φ est nulle ssi pour toute fonction ψ assez régulière $\int \varphi\psi = 0$.
- ▷ Procéder par IPP

Indication 15 · Énoncé p. 8 (Un exemple de recollement)
Par analyse synthèse.

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ puis déterminer les conditions de compatibilité.

Indication 16 · Énoncé p. 8 (Un exemple d'équation intégrale)
Se ramener à une EDL1 dans l'analyse.

Soit en considérant $\int_0^\theta \tan(\varphi)y(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ soit en montrant que y est $\mathcal{C}^1$ et en dérivant.

Indication 17 · Énoncé p. 8 (Lemme de Gronwall: version différentielle)
Dériver la fonction auxiliaire $\tilde{y} : t \mapsto y(t)e^{-\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}$ et constater que sa dérivée est négative.

Alternativement résoudre l'équation $y' - ay = y' - ay$.

Indication 18 · Énoncé p. 9 (Lemme de Gronwall: version intégrale)
Poser $z : t \mapsto y_0 + \int_0^t a(s)y(s)\,\mathrm{d}s$ et au choix considérer $t \mapsto z(t)e^{-\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s}$ ou $t \mapsto \ln(z(t))$.

Indication 19 · Énoncé p. 9 (Une introduction au Wronksien)

1. Dérivée d'un produit + utiliser l'équation.
2. Se déduit de la dérivée.
3. On peut par exemple interpréter le wronskien en termes de liberté. Ou bien à partir d'une solution du système homogène y_1 en déterminer une deuxième y_2 indépendante de la première et donc déterminer l'ensemble de toutes les solutions de l'équation homogène.

   Le wronskien sera étudié en détails l'année prochaine.

Indication 20 · Énoncé p. 9 (Bootstrap de régularité: cas linéaire)
On a $y^{(n)} = b - \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}$.

Procéder par récurrence sur M pour montrer que $y \in \mathcal{C}^{M+n}$.

On remarque qu'en particulier si b et les a_k sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors $y \in \mathcal{C}^\infty$.

Indication 21 · Énoncé p. 10 (Bootstrap de régularité: cas non linéaire autonome)
Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}^n$.

Ce résultat (et la méthode pour le démontrer) s'étend aux équations de la forme

$$\forall t \in I, y'(t) = F(y(t), t)$$

ou encore

$$\forall t \in I, y^{(n)}(t) = F\big(t, y(t), ..., y^{(n-1)}(t)\big)$$

à condition que $F : I \times E \times \cdots \times E \to E$ soit régulière dans un sens à préciser.

Indication 22 · Énoncé p. 10 (De l'importance de nommer les objets)
Résoudre l'équation différentielle

$$f' + f = f' + f.$$

Indication 23 · Énoncé p. 10 (Les solutions physiques)
On obtient comme CNS que les racines de P sont de parties réelles strictement négatives.

Indication 24 · Énoncé p. 10 (Construction d'exercice: cas CC et variation de la constante)
L'équation homogène est fixée, il suffit ensuite de choisir le second membre pour que f soit solution.

Indication 25 · Énoncé p. 11 (Construction d'exercice: variation de la constante)
L'équation homogène est fixée par Φ, il suffit ensuite de choisir le second membre pour que f soit solution.

Indication 26 · Énoncé p. 11 (Petites perturbations par des fonctions bornées)
Dans chacun des cas résoudre explicitement à l'aide d'une formulation intégrale.

Dans le cas où la racine est -1, majorer simplement.

Dans le cas où la racine est 1 procéder par analyse synthèse. On pourra si nécessaire se contenter de l'unicité sans montrer l'existence.

Indication 27 · Énoncé p. 12 (Perturbations: variante)
Remarquer que f est solution de l'équation différentielle

$$f' + f = \underbrace{f' + f}_{\text{second membre}}$$

et refaire l'exercice 26.

Indication 28 · Énoncé p. 12 (Second membre défini par morceaux)
Au choix:
- ▷ Découper l'équation: résoudre sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ et recoller la solution
- ▷ Découper la solution: bien résoudre par variation de la constante et découper l'intégrale.

Indication 29 · Énoncé p. 13 (Parité)
Dans chaque cas, écrire l'équation satisfaite par $\hat{y} : x \mapsto y(-x)$ puis celle vérifiée par $y \pm \hat{y}$. Conclure par unicité du problème de Cauchy.

Indication 30 · Énoncé p. 13 (Minimisation et équation elliptiques: la chaînette)
Considérer à y et z fixés $t \mapsto \Phi(y + tz)$ qui est un polynôme du second degré.

Cette étude sera moins surprenante une fois traités les espaces euclidiens.

Indication 31 · Énoncé p. 14 (Nombre de degrés de libertés)
Déterminer l'ensemble des solutions comme une droite affine (donc 1 degré de liberté).

Dans chacun des cas écrire la condition comme une équation linéaire sur ce degré de liberté.

A priori 1 équation linéaire à 1 inconnue admet une et unique solution mais en pratique cela dépend du rang.

De même un système de 2 équations linéaires à 1 inconnue peut selon le rang admettre 0 , 1 ou une infinité de solutions.

Indication 32 · Énoncé p. 14 (Valeurs propres du Laplacien de Dirichlet)
Résoudre explicitement et obtenir un système 2×2.

Indication 33 · Énoncé p. 15 (Oscillateur harmonique excité)
Cf cours de Physique ou de Maths.

Distinguer les cas $\omega \neq \omega_0$ et $\omega = \omega_0$.

Indication 34 · Énoncé p. 15 (Variation des constantes pour les EDOL2)
Au choix réinjecter ou utiliser une formulation matricielle.

On peut ainsi, à condition de savoir résoudre l'équation homogène, déterminer l'ensemble des solutions.

Indication 35 · Énoncé p. 16 (Chambre à bulles)
Poser $z = x + iy$.

Indication 36 · Énoncé p. 16 (Toute périodique ?)
Comme toute ED1LCC, se ramener à une étude d'intégrale fonction de sa borne supérieure par formule de Duhamel.

Toutes les solutions sont périodiques ssi les solutions homogènes ainsi qu'une solution particulière sont périodiques.

Ou plus simplement comme y est solution ssi $y(\cdot + T)$ est solution se ramener (unicité de la solution du problème de Cauchy) à $y(0) = y(T)$.

Indication 37 · Énoncé p. 17 (Au moins une périodique !)
Procéder par analyse-synthèse, comme pour l'exercice 36.

Indication 38 · Énoncé p. 17 (Recollement avec second membre quelconque)
Résoudre explicitement sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ puis recoller.

Indication 39 · Énoncé p. 17 (Pas une équation différentielle)
Résoudre $y' + y = K$ avec K constante puis ajuster les degrés de liberté.

Indication 40 · Énoncé p. 17 (Équation de Verhulst)
Variables séparables.

Indication 41 · Énoncé p. 18 (Une formule de Duhamel elliptique)
Par unicité de la solution du problème de Cauchy il suffit de vérifier que c'est bien une solution.

Alternativement, pour retrouver la formule utiliser une méthode de variation des constantes.

Indication 42 · Énoncé p. 18 (Reparamétrisation)
Aucun piège, si ce n'est faire attention aux calculs et la rédaction par analyse-synthèse.

Indication 43 · Énoncé p. 19 (Construction d'exercice: reparamétrisation)
Juste injecter. On obtient par exemple

$$\begin{aligned}\alpha_0 &: x \mapsto a_0\\ \alpha_1 &: x \mapsto a_1\varphi'(\varphi^{-1}(x)) + \varphi''(\varphi^{-1}(x))\\ \alpha_2 &: x \mapsto (\varphi'(\varphi^{-1}(x)))^2\\ \beta &: b(\varphi^{-1}(x))\end{aligned}$$

ou toute multiplication de ces fonctions par toute fonction ne s'annulant pas.

Indication 44 · Énoncé p. 19 (Limites et formule de Duhamel)
Écrire f comme solution de l'équation différentielle $f' + \alpha f = f' + \alpha f$ puis une formule de Duhamel.

Indication 45 · Énoncé p. 20 (Valeurs propres de la valeur moyenne)

1. Pour la bonne définition, la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ est immédiate (pourquoi ?) et il faut ensuite redémontrer
$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0).$$
La linéarité est immédiate.
2. $M(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par le TFA. Dériver $M(f) = \lambda f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis réutiliser $M(f) = \lambda f$.
3. On obtient $E_0 = \{0\}$ (et donc M injective).
4. On obtient les constantes.
5. Résoudre explicitement sur $\mathbb{R}_+^*$ et regarder si il existe des solutions non nulles se prolongeant par continuité en 0 par 0.

Indication 46 · Énoncé p. 20 (Pseudopériodicité)
Résoudre explicitement l'équation puis utiliser les conditions. On distinguera selon les régimes.

Ou alternativement considérer le wronskien (cf exercice 19) entre y et sa translatée de T.

Indication 47 · Énoncé p. 21 (Encore un recollement)
Effectuer une analyse synthèse. On obtient qu'il existe une solution ssi $\alpha = \frac{2}{3}$.

Indication 48 · Énoncé p. 21 (Équations de Bernoulli)
Aucun piège.

Étant donné que l'on sait résoudre (à calcul d'intégrales près) les EDL1 on peut donc résoudre les équations de la forme

$$y' = ay + by^\alpha.$$

On a même une expression explicite (peu utile), avec la condition initiale $y(t_0) = y_0$:

$$y : t \mapsto y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a_0(s)\,\mathrm{d}s} \left(1 + (1-\alpha) y_0^{\alpha-1} \int_{t_0}^{t} b(s) e^{(\alpha-1)\int_{t_0}^{t} a(\xi)\,\mathrm{d}\xi}\ \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Indication 49 · Énoncé p. 21 (Équations de Riccati)
Injecter et se munir de son courage.

Indication 50 · Énoncé p. 22 (Équation de la brachistochrone)
Il n'est demandé ici que d'en trouver une.

Pour calculer une intégrale de la forme $\int F\left(\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$ un changement de variable pertinent est parfois $u = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Indication 51 · Énoncé p. 22 (Différentiation sur les fonctions de dérivées bornées)
Pour l'injectivité considérer le noyau.

Pour la surjectivité faire comme à l'exercice 26.

Indication 52 · Énoncé p. 22 (Gronwall avec second membre)
Utiliser la linéarité (considérer $y - \tilde{y}$) et le lemme de Gronwall différentiel.

Indication 53 · Énoncé p. 23 (Variation des constantes: cas EDOLnCC scindé)

1. $\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}\left(e_{\lambda_k}\right)$
2. Écrire les équations matriciellement.
3. Il suffit de déterminer la dernière colonne de l'inverse d'une matrice de Vandermonde.

Solutions

Solution pour l'exercice 1 · Énoncé p. 2 (Équations à coefficients constants avec second membre)

1. $$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 5(x-1)^2$$

Équation homogène

L'équation homogène associée est

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 0$$

et donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_H = \{Ce^{-2x}, C \in \mathbb{R}\}.$$

Solution particulière

On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p : x \mapsto a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Alors y_p est solution ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2a_2x + a_1 + 2(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 5(x-1)^2$$

c'est à dire

$$(2a_2)x^2 + (2a_1 + 2a_2)x + (2a_0 + a_1) = 5x^2 - 10x + 5$$

ce qui, par identification, est équivalent au système

$$\begin{cases} 2a_2 & = 5 \\ 2a_1 + 2a_2 & = -10 \\ 2a_0 + a_1 & = 5. \end{cases}$$

ce système étant triangulaire on obtient directement

$$\begin{cases} a_2 = \frac{5}{2} \\ a_1 = -5 - a_2 \\ a_0 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}a_1. \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} a_2 = \frac{5}{2} \\ a_1 = -\frac{15}{2} \\ a_0 = \frac{25}{4}. \end{cases}$$

et donc une solution particulière est

$$y_p : x \mapsto \frac{5x^2}{2} - \frac{15x}{2} + \frac{25}{4}.$$

Conclusion

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{5x^2}{2} - \frac{15x}{2} + \frac{25}{4}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + y(t) = \left(e^t + 1\right)^2$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ce^{-t} + e^t + \frac{1}{3}e^{2t} + 1, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. $$\forall x \in \mathbb{R}, 2y'(x) + 3y(x) = e^x + x$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{-\frac{3}{2}x} + \frac{x}{3} + \frac{e^x}{5} - \frac{2}{9}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. $$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - y(t) = \left(e^t + 1\right)^2$$

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ce^t + 2e^t t + e^{2t} - 1, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. $$\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) = 3y(t) - 13\cos(2t)$$

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ce^{3t} - 2\sin(2t) + 3\cos(2t), C \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. $$\forall x \in \mathbb{R}, 2y'(x) + y(x) = x^3 - 4$$

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}x} + x^3 - 6x^2 + 24x - 52, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

7. $$\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = -2x(t) + \cos(t)\sin(t)$$

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ce^{-2t} + \frac{1}{8}\sin(2t) - \frac{1}{8}\cos(2t), C \in \mathbb{R} \right\}.$$

8. (plus long)

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = f(t) + \sin(t)^4$$

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ce^t - \frac{1}{5}\sin(2t) + \frac{1}{34}\sin(4t) + \frac{1}{10}\cos(2t) - \frac{1}{136}\cos(4t) - \frac{3}{8}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

9. (un peu différent)

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + y(x) = xe^x$$

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{-x} + \frac{e^x x}{2} - \frac{e^x}{4}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

10. (plus long)

$$\forall t \in \mathbb{R}, p'(t) + 2p(t) = t^5$$

$$\mathcal{S} = \left\{ t \mapsto Ce^{-2t} + \frac{t^5}{2} - \frac{5t^4}{4} + \frac{5t^3}{2} - \frac{15t^2}{4} + \frac{15t}{4} - \frac{15}{8}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

11. (un peu différent et plus long)

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - 2y(x) = (\cos(x)x)^2$$

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^{2x} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}x^2\sin(2x) - \frac{1}{8}x^2\cos(2x) - \frac{x}{4} + \frac{1}{8}x\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(2x) + \frac{1}{32}\cos(2x) - \frac{1}{8}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 3 (Équations avec second membre bis)

1. (en utilisant la variation de la constante)

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = e^{-5x}$$

Équation homogène

L'équation homogène associée est

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = 0$$

et donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_H = \{Ce^x, C \in \mathbb{R}\}.$$

Solution particulière

Ici, même si on aurait pu rechercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto \alpha e^{-5x}$, on procède par variation de la constante.

On cherche donc une solution sous la forme

$$y_p : x \mapsto \gamma(x)e^x.$$

Alors y_p est solution ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \gamma'(x)e^x - \gamma(x)e^x + \gamma(x)e^x = e^{-5x}$$

ce qui se simplifie en

$$\forall x \in \mathbb{R}, \gamma'(x) = e^{-6x}.$$

Donc

$$\gamma : x \mapsto -\frac{1}{6}e^{-6x}$$

convient. Donc une solution particulière est

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{6}e^{-6x}e^x.$$

c'est à dire

$$y_p : x \mapsto -\frac{1}{6}e^{-5x}.$$

Conclusion

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto Ce^x - \frac{1}{6}e^{-5x}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. (en utilisant la variation de la constante)

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) - y(x) = e^x$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto Ce^x + xe^x, C \in \mathbb{R}\}.$$

3. $$\forall t \geq 0, x'(t) = -x(t) + 3\frac{e^{-t}}{1+t^2}$$

$$\mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{-t} + 3\arctan(t)e^{-t}, C \in \mathbb{R}\}.$$

4. $$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 2y(x) = 2\frac{e^{-x}}{1+e^x}$$

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto Ce^{-2x} + 2e^{-2x}\ln(1+e^x), C \in \mathbb{R}\}.$$

5. $$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) + 3y(x) = \left(1+e^{3x}\right)^5$$

$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Ce^{-3x} + \frac{e^{-3x}}{18}\left(1+e^{3x}\right)^6, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

6. $$\forall t > 0, 2f'(t) - f(t) = \frac{\sqrt{e^t}}{t^2+2t}$$

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto Ce^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{4}e^{\frac{t}{2}}(\ln(t) - \ln(t+2)), C \in \mathbb{R}\right\}.$$

7. $$\forall t > 0, y'(t) + \frac{1}{3}y(t) = \frac{1}{3^3}t^3 + \frac{e^{-\frac{t}{3}}}{t^{\frac{1}{3}}}$$

$$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto Ce^{-\frac{1}{3}t} + \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}t}t^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{9}t^3 - t^2 + 6t - 18, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 4 (Équations homogènes)

1. Une primitive de $\theta \mapsto 1+\cos(\theta)^2$ c'est à dire de $\theta \mapsto 1 + \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ est $\theta \mapsto \frac{3}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta)$. Donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{\theta \mapsto Ce^{-\left(\frac{3}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right)}, C \in \mathbb{R}\right\}}.$$

2. Une primitive de $t \mapsto -\frac{1}{t\ln(t)}$ c'est à dire de $t \mapsto -\frac{\frac{1}{t}}{\ln(t)}$ sur $]0,1[$ est $t \mapsto -\ln(|\ln(t)|)$ c'est à dire $t \mapsto -\ln(-\ln(t))$. Comme de plus pour tout $t \in]0,1[$, $e^{\ln(-\ln(t))} = -\ln(t)$ on en déduit que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{t \mapsto C\ln(t), C \in \mathbb{R}\}}.$$

3. Pour tout $x > 0$, $x^2 \neq 0$ et donc l'équation se met sous la forme résolue

$$\forall x > 0, y'(x) - \left(\frac{5}{x^2} - \frac{4}{x}\right)y(x) = 0.$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x}$ est $x \mapsto -\frac{5}{x} - 4\ln(x)$ et donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{x \mapsto Ce^{-\frac{5}{x}}x^{-4}, C \in \mathbb{R}\right\}}.$$

4. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\cos(t) \neq 0$ et donc l'équation se met sous la forme résolue

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], f'(t) + \frac{1}{\cos(t)} f(t) = 0.$$

(Ici il est moins facile de déterminer une primitive « à l'œil » on effectue donc un calcul d'intégrale.)

Soit $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Alors à l'aide du changement de variable $v = \sin(u)$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{\cos(u)}\,\mathrm{d}u &= \int_0^t \frac{\cos(u)}{1-\sin^2(u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\sin(t)} \frac{1}{1-v^2}\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{\sin(t)} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{1+v}\right)\mathrm{d}v \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right)\right]_0^{\sin(t)}\end{aligned}$$

d'où une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$ est $t \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}\right)$.

De plus pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}\right)\right) = \sqrt{\frac{1-\sin(t)}{1+\sin(t)}}$$

Par conséquent l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \left\{t \mapsto C\sqrt{\tfrac{1-\sin(t)}{1+\sin(t)}}, C \in \mathbb{R}\right\}}.$$

(On pourrait simplifier l'expression à l'aide de la formule de l'angle moitié.)

Solution pour l'exercice 6 · Énoncé p. 4 (Équations avec second membre)
On obtient

1. $\boxed{\mathcal{S} = \left\{t \mapsto Ce^{\frac{1}{t}}t^2 + t^2, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

2. $\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto Ce^{\frac{-x^2}{2}} + 1, C \in \mathbb{R}\right\}}$.

3. $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\theta \mapsto C\frac{1}{\tan(\theta)} + \frac{\tan^2(\theta)}{3}, C \in \mathbb{R}\right\}}$.