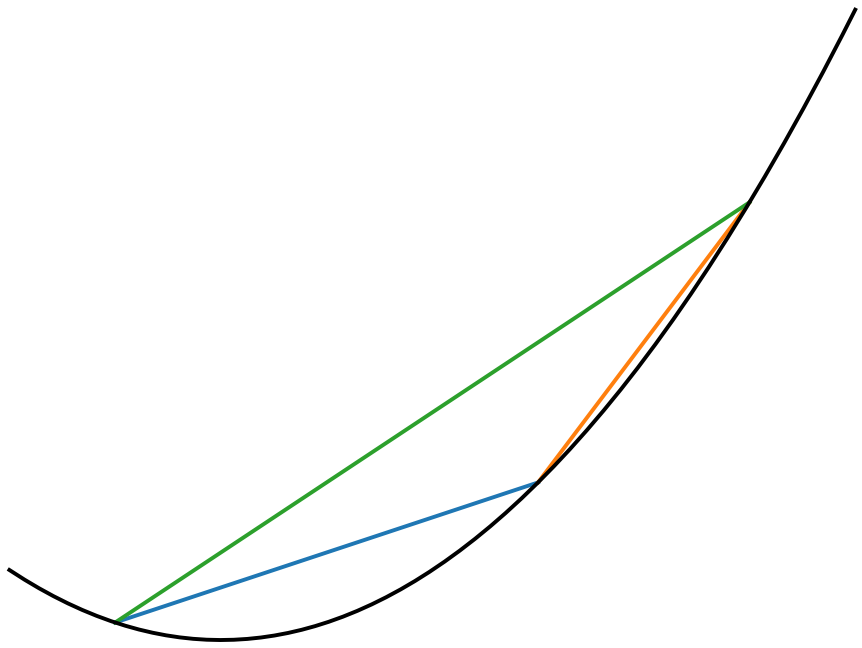
Convexité

Énoncés 2
La base 2
Convexité et optimisation 6
Convexité et inégalités 8
Convexité et étude de fonctions 16
Convexité et convexité 22
Thème: log-convexité 26
Thème culturel: transformée de Legendre-Fenchel 30
Indications 34



Énoncés

Dans toute la feuille du TD, sauf mention contraire:

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$,
- $\mathring{I}$ est l'intérieur de l'intervalle I,
- $[a, b]$ est un segment non réduit à un point,
- n est un entier naturel non nul.

Pour chaque exercice

- **faire un schéma !**
- en cas de difficultés se restreindre au cas dérivable, ou dérivable deux fois.

La base

Exercice 1 (◔★♣ À savoir refaire: inégalité des trois pentes)
Énoncer et démontrer l'inégalité des trois pentes.

Faire un schéma.

Indication p. 34

Exercice 2 (◔★♣ Inégalités de tangence)
Démontrer brièvement les inégalités suivantes et les représenter graphiquement

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$,
2. $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$,
3. $\forall x > 0, \ln(x) \leq -1 + x$,
4. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$,
5. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \tan(x) \geq x$,
6. $\forall x \geq 0, \arctan(x) \leq x$,
7. pour $\alpha \geq 1$, $\forall x > -1, (1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.

Indication p. 34

Exercice 3 (◔★ Se ramener à tout segment)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que f est convexe sur I **ssi** pour tout segment $[a, b] \subset I$, $f_{|[a,b]}$ est convexe sur $[a, b]$.

Indication p. 34

Exercice 4 (◔★ L'inégalité des deux pentes suffit)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que f est convexe **ssi**

$$\forall (a,b,c) \in I^3 \text{ t.q } a < b < c, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

Indication p. 34

Exercice 5 (◔★♣ Fonctions convexes et concaves)
1. Montrer que toute fonction affine sur un intervalle est convexe et concave.
2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et concave. Montrer que f est une fonction affine.

Indication p. 34

Exercice 6 (◔★ Convexité et additions affines)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Montrer que f est convexe ssi $x \mapsto f(x) + (\alpha x + \beta)$ est convexe.

Indication p. 34

Exercice 7 (◔★ Convexité et composées affines)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $\hat{f} : x \mapsto f(\alpha x + \beta)$.
2. Montrer que f est convexe **ssi** $\hat{f}$ est convexe.

Indication p. 35

Exercice 8 (◔★♠ Opérations et fonctions convexes)

1. Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes et λ_1, λ_2 deux réels **positifs**. Montrer que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est convexe.
2. Soient $f : I \to J$ convexe et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ convexe et **croissante**. Montrer que $\varphi \circ f$ est convexe.
3. Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes **positives** et **de même monotonie**. Montrer que $f_1 \times f_2$ est convexe.
4. Donner un exemple de combinaison linéaire de fonctions convexes qui n'est pas convexe.
5. Donner un exemple de composée de fonctions convexes qui n'est pas convexe.
6. Donner un exemple de produit de fonctions convexes qui n'est pas convexe.

Indication p. 35

Exercice 9 (◔★♠ Convexité et épigraphe)

On rappelle qu'une partie $C \subset \mathbb{R}^2$ est dite convexe ssi

$$\forall z_0, z_1 \in C, \forall t \in [0,1], tz_1 + (1-t)z_0 \in C.$$

Étant donnée $f : I \to \mathbb{R}$ on définit l'épigraphe de f par

$$\text{Epi}(f) = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}.$$

Montrer que f est convexe **ssi** $\text{Epi}(f)$ est convexe.

Faire un schéma.

Indication p. 35

Exercice 10 (◑★ Maximum et supremum de fonctions convexes)

1. Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Montrer que $\max(f_1, f_2)$ est convexe.
2. Soit Λ un ensemble d'indices non vide et $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de fonctions de I vers $\mathbb{R}$ convexes. On suppose que pour tout $x \in I$, la famille $(f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda}$ est majorée.

   On définit $F : I \to \mathbb{R}$ par

   $$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sup_{\lambda \in \Lambda} (f_\lambda(x)). \end{aligned}$$

   Montrer que F est convexe.
3. Faire des schémas.

Indication p. 35

Exercice 11 (◔★ Minimum local/global d'une fonction convexe)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Donner un exemple de fonction convexe sans minimum local.

   Faire un schéma.
2. Montrer que si f admet un minimum local en $\alpha \in I$ alors ce minimum est global.

   Faire un schéma.

Indication p. 35

Exercice 12 (◔★ Stricte convexité)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

On dit que f est strictement convexe ssi

$$\forall (x,y) \in I^2, x \neq y \Rightarrow \forall t \in]0,1[, f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

1. Montrer que f est strictement convexe ssi pour tous $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$, on a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$.
2. On suppose de plus que f est dérivable. Montrer que f est strictement convexe ssi f' est strictement croissante.
3. Que dire d'une fonction strictement convexe dérivable deux fois ?

Indication p. 35

Exercice 13 (◔★ Suites convexes)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes:

(i) Pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $a < b < c$, on a $u_b \leq \frac{c-b}{c-a}u_a + \frac{b-a}{c-a}u_c$,
(ii) la suite des différences finies $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
(iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \geq 0$.

Donner un nom aux suites vérifiant ces propriétés et faire un schéma.

Indication p. 35

Exercice 14 (◑★ Sous-différentielle: définition)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe.

Pour tout $a \in I$ on dit qu'un réel $\gamma \in \mathbb{R}$ est une sous-dérivée de f en $a \in I$ ssi

$$\forall x \in I, f(x) \geq f(a) + \gamma(x - a).$$

On appelle sous-différentielle de f en a, notée (localement) $\partial f(a)$, l'ensemble des sous-dérivées de f en a.

1. Faire un schéma.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathring{I}$, $\partial f(a)$ est un segment (et en particulier est non vide).
3. Montrer que f admet un minimum local en $a \in \mathring{I}$ ssi $0 \in \partial f(a)$.
4. Montrer que f est dérivable en $a \in \mathring{I}$ ssi $\partial f(a) = \{f'(a)\}$.

Indication p. 35

Exercice 15 (◑★♠ Convexité et « tangentes »)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que

$$f \text{ convexe } \Leftrightarrow \forall a \in \mathring{I}, \exists \gamma \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \geq f(a) + \gamma(x - a).$$

Faire un schéma.

Indication p. 36

Convexité et optimisation

Exercice 16 (◔★ Dans le cas convexe c'est suffisant)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $\alpha \in \mathring{I}$ tel que f est dérivable en α.

Montrer que **si** $f'(\alpha) = 0$ **alors** f admet un minimum global en α.

Faire un schéma.

Indication p. 36

Exercice 17 (◔★ Le cas essentiel en optimisation)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to \pm\infty$.

Que dire des extrema éventuels de f ?

Faire un schéma.

Indication p. 36

Exercice 18 (◔★ Fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ majorées)

1. Déterminer une fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ convexe, majorée et non constante.

   Faire un schéma.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Montrer que f est constante.

   Faire un schéma.

Indication p. 36

Exercice 19 (◔★ Maximum au bord d'une fonction convexe)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Justifier que f admet un maximum et que ce maximum est atteint en a ou en b.

Faire un schéma.

Indication p. 36

Exercice 20 (◑☆ Unicité dans le TEAF et convexité)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que f est strictement convexe ou strictement concave (cf exercice 12). Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ il existe un et unique $c \in]a, b[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
   Faire un schéma.
2. On suppose que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ il existe un et unique $c \in]a, b[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
   Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $b \mapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est strictement monotone.

   Faire un schéma.

   Conclure que f est strictement convexe ou strictement concave.

Indication p. 36

Convexité et inégalités

Exercice 21 (◔★ Une forme souvent utile de l'inégalité de convexité)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \geq nf\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Indication p. 36

Exercice 22 (◔★♣ Révisions: IHGAQ par convexité)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

Montrer que

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Indication p. 36

Exercice 23 (◑★ Révisions : Inégalité de Hölder)
Pour $r \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$ on note

$$\|f\|_r = \left(\int_a^b |f(t)|^r \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1. Démontrer une inégalité de Young: pour tous $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$,

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

2. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.

On suppose que $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$.

Montrer que $\|fg\|_1 \leq 1$.

3. Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$.

Démontrer *l'inégalité de Hölder*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Indication p. 36

Exercice 24 (◑★ Révisions : Une inégalité de Minkowski)
On utilise les notations de l'exercice 23.

Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$,

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Indication p. 37

Exercice 25 (◔★ Révisions: inégalité de Jensen)
Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convexe et $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b], I)$.

Montrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(t)) \, \mathrm{d}t.$$

Indication p. 37

Exercice 26 (◔★ Introduction à l'entropie de Shannon)

1. Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} f :]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x\ln(x) \end{aligned}$$

admet un prolongement par continuité en 0 et représenter graphiquement ce prolongement.

Dans la suite on utilisera la convention $0\ln(0) = 0$.

Soient $(p_1, ..., p_n) \in [0,1]^n$ tels que $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

2. Montrer que pour tout $(q_1, ..., q_n) \in]0,1]^n$ tel que $\sum_{k=1}^n q_k = 1$ on a

$$\sum_{k=1}^n p_k \ln\left(\frac{p_k}{q_k}\right) \geq 0.$$

3. En déduire que

$$0 \leq -\sum_{k=1}^n p_k \ln(p_k) \leq \ln(n)$$

et commenter les cas d'égalité.

Indication p. 37

Exercice 27 (◑★ Polygones de périmètre maximal)
Soit $n \geq 3$.

1. Soit $(\theta_0, ..., \theta_{n-1}) \in [0, 2\pi]^n$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \theta_k = 2\pi.$$

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right) \leq 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

et déterminer le cas d'égalité.

2. Parmi tous les polygones à n côtés inscrits dans un cercle, déterminer ceux de périmètre maximal (si ils existent).

Faire un schéma.

Indication p. 37

Exercice 28 (◔★ Une majoration d'exponentielle)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M > 0$.

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq M \Rightarrow e^{\lambda x} \leq \frac{\mathrm{sh}(\lambda M)}{M} x + \mathrm{ch}(\lambda M).$$

Indication p. 37

Exercice 29 (◕☆ Inégalité de Hölder un peu plus générale)
Soit $\omega \in \mathcal{C}^0([a,b],]0, +\infty[)$ et $r \in [1, +\infty[$.

Pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$ on pose (cf exercice 23)

$$\|f\|_{r,\omega} = \left(\int_a^b |f(t)|^r \ \omega(t) \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{r}}$$

et on pose aussi

$$\|f\|_{\infty,\omega} = \sup_{t \in [a,b]} (|f(t)|).$$

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$.

Montrer que pour tous $(r,p,q) \in [1, +\infty]^3$ tels que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\|fg\|_{r,\omega} \leq \|f\|_{p,\omega} \|g\|_{q,\omega}.$$

Indication p. 37

Exercice 30 (◑☆ Multi-Hölder)
On utilise les mêmes notations que dans l'exercice 23.

Soient $p_1, p_2, ..., p_n \in]1, +\infty[$ tels que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = 1$ et soient $f_1, f_2, ..., f_n \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$.
Montrer que

$$\| \prod_{k=1}^n f_k \|_1 \leq \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{p_k}.$$

Indication p. 37

Exercice 31 (◕★ IAG généralisée)
Soient $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et $(p_1, ..., p_n) \in]0,1]^n$ tels que $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on pose

$$N(\alpha) = \left(\sum_{k=1}^n p_k x_k^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

1. Montrer que N est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0 par

$$N(0) = \prod_{k=1}^n x_k^{p_k}.$$

   On note N le prolongement par continuité.
2. Montrer que N est croissante.
3. Montrer que si les $x_1, ..., x_n$ ne sont pas tous égaux alors N est strictement croissante.

Indication p. 37

Exercice 32 (◑★ Sous-additivité de la moyenne géométrique)
Soient $x_1, ..., x_n \in]0, +\infty[$ et $y_1, ..., y_n \in]0, +\infty[$.

Montrer que

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n y_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (x_k + y_k)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Indication p. 37

Exercice 33 (◑★ Inégalités de convexité en vrac)
1. Montrer que pour tous $x_1, x_2 \in]1, +\infty[$,

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x_1)\ln(x_2)}.$$

2. Montrer que pour tous $(x_1, ..., x_n) \in (0, +\infty)^n$, en notant $S = \sum_{k=1}^n x_k$,

$$\sum_{k=1}^n \left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)^2 \geq n\left(\frac{S^2}{n^2} + 2 + \frac{n^2}{S^2}\right).$$

3. Montrer, sans utiliser la formule de Stirling, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Indication p. 37

Exercice 34 (◑☆ Une inégalité de convexité avec des signes !)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $n \in \mathbb{N}$, et $x_0 < x_1 < ... < x_{2n}$ des éléments de I.

1. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x_k \in I.$$

2. Montrer que

$$f\left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k x_k\right) \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k f(x_k).$$

Indication p. 38

Exercice 35 (◑★ Quelle est la fonction ?)
Soient $y_1, ..., y_n \in]1, +\infty[$.

Montrer que

$$\frac{1}{1 + \left(\prod_{k=1}^n y_k\right)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + y_k}.$$

Indication p. 38

Exercice 36 (◑★ Inégalités géométriques)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ convexe, interpréter géométriquement chacune des fonctions suivantes et étudier leurs monotonies.

1. pour $h \in]0, b - a[$,

$$\begin{aligned} [a, b-h] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{aligned}$$

Faire un schéma.

2.

$$\begin{aligned} [a, b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) + f((a+b) - x)}{2} \end{aligned}$$

Faire un schéma.

Indication p. 38

Exercice 37 (◔☆ Inégalité géométrique: moyenne des pentes)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convexe.

Étudier la monotonie de la fonction

$$\begin{aligned}]a,b[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{f(b)-f(x)}{b-x}\right). \end{aligned}$$

Faire un schéma.

Indication p. 38

Exercice 38 (◑★ Une version un peu plus générale de Jensen)
Soit $\omega \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R}_+)$ tel que $\int_a^b \omega(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Soient $\phi : I \to \mathbb{R}$ convexe et $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],I)$.

Montrer que

$$\phi\left(\int_a^b f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \int_a^b \phi(f(t))\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 38

Exercice 39 (◕☆ Une version abstraite de Jensen)
Soit $L \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\mathbb{R})$ une forme linéaire. On suppose de plus que L est positive, c'est à dire que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f \geq 0$ on a $L(f) \geq 0$, et de masse totale 1 c'est à dire que $L\left(1_{[a,b]\to\mathbb{R}}\right) = 1$.

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convexe et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],I)$.

Montrer que

$$\varphi(L(f)) \leq L(\varphi \circ f).$$

Indication p. 38

Exercice 40 (●☆ Inégalité de Popoviciu pondérée)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $(x_1,x_2,x_3) \in I^3$ et $(p_1,p_2,p_3) \in (0,+\infty)^3$.

Montrer que

$$\frac{p_1 f(x_1)+p_2 f(x_2)+p_3 f(x_3)}{p_1+p_2+p_3} + f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3}{p_1+p_2+p_3}\right) \geq \frac{(p_2+p_3)f\left(\frac{p_2x_2+p_3x_3}{p_2+p_3}\right)+(p_1+p_3)f\left(\frac{p_1x_1+p_3x_3}{p_1+p_3}\right)+(p_1+p_2)f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}\right)}{p_1+p_2+p_3}.$$

Indication p. 38

Exercice 41 (◔☆ Juste l'IAG)
Soient $(x_1, ..., x_n) \in (0, +\infty)^n$ et $\sigma \in S_n$ une permutation.

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{\sigma(k)}} \geq n.$$

Indication p. 38

Exercice 42 (◑☆ La normalisation change le sens)
Soit $(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

est décroissante.

Indication p. 38

Exercice 43 (◔★ Un classique: l'inégalité de Nesbitt)
Soient $x, y, z \in]0, +\infty[$.

Montrer de deux manières différentes que

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Indication p. 38

Exercice 44 (◑★ Une inégalité de Kantorovitch)
Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $0 < m < M$.

1. Montrer que

$$\forall x \in [m, M], \frac{1}{x} \leq \frac{m+M}{mM} - \frac{1}{mM}x.$$

2. En déduire que pour tous $x_1, ..., x_n \in [m, M]$, et $t_1, ..., t_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{k=1}^{n} t_k = 1$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} t_k \frac{1}{x_k}\right) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

Indication p. 39

Exercice 45 (◔★ Mini inégalité de Karamata)
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et $(x_0, x_1), (y_0, y_1) \in I^2$ tels que $x_0 \geq x_1$, $y_0 \geq y_1$, $x_0 \leq y_0$ et $x_0 + x_1 = y_0 + y_1$.

Montrer que

$$f(x_0) + f(x_1) \leq f(y_0) + f(y_1).$$

Indication p. 39

Convexité et étude de fonctions

Exercice 46 (◑★ Un exercice flou qui en résume beaucoup d'autres)
Déterminer et tracer les trois tableaux de variations possibles pour une fonction convexe sur un intervalle, faire un schéma et démontrer ce résultat.

Indication p. 39

Exercice 47 (◔★ Limites en l'infini)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.

On suppose que f n'est pas décroissante.

Montrer que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Indication p. 39

Exercice 48 (◔★ Asymptotes de fonctions convexes)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que
$$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$
Faire un schéma et énoncer une propriété similaire pour la limite en $-\infty$.
2. On suppose désormais que $\ell \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que
$$f(x) - \ell x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$
Faire un schéma et énoncer une propriété similaire en $-\infty$.
3. On suppose désormais que $\beta \in \mathbb{R}$.
Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq (\ell x + \beta).$$
Faire un schéma et énoncer une propriété similaire en $-\infty$.

Indication p. 39

Exercice 49 (◔★♠ La régularité à l'intérieur)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Soient $a, b \in \mathring{I}$ tels que $a < b$. Montrer que $f_{|[a,b]}$ est lipschitzienne.
2. Soit $a \in \mathring{I}$. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en a et que $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.

Indication p. 39

Exercice 50 (◔☆ Ce qui se passe aux bords)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Redémontrer que f est continue en tout point $c \in]a, b[$.
2. Montrer que f admet une limite à droite en a (resp. à gauche en b) et que
$$f(a) \geq \lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x), \lim_{\substack{x\to b\\x<b}} f(x) \leq f(b)$$
et faire un schéma.

Indication p. 39

Exercice 51 (◔★ TVI et convexité)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe.

On suppose $f(a)f(b) < 0$.

Montrer que f admet un et unique zéro dans $[a, b]$.

Faire un schéma.

Indication p. 39

Exercice 52 (◔☆ Un encadrement par trois points)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

On pose $M = \max(f(a), f(b))$.

Montrer que pour tout $x \in [a, b]$,

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M \leq f(x) \leq M.$$

Faire un schéma.

Indication p. 39

Exercice 53 (◔★ Limite simple de fonctions convexes)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes de I vers $\mathbb{R}$.

On suppose que pour tout $x \in I$, la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Montrer que f est convexe.

Indication p. 40

Exercice 54 (◔★ Convexité et trapèzes: Hermite-Hadamard)
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Montrer que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b)).$$

Faire un schéma.

Indication p. 40

Exercice 55 (◑★ La méthode de la fleur)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[)$ concave et croissante.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\frac{f(k)+f(k+1)}{2} \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k) + \frac{((k+1)-k)}{2} f'(k).$$
Faire un schéma.
2. En déduire qu'il existe $C_f \in \mathbb{R}$ tel que
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(n)}{2} + C_f + o_{n\to+\infty}(1).$$
Faire un schéma.
3. Quelle formule obtient-on pour $f = \ln$?

Indication p. 40

Exercice 56 (◑★ Une application de Hermite-Hadamard)
Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$.

On pose $m = \min_{[a,b]} f''$ et $M = \max_{[a,b]} f''$.

1. Montrer que
$$\frac{m}{12}(b-a)^2 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{M}{12}(b-a)^2.$$
2. Montrer que
$$\frac{m}{24}(b-a)^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{M}{24}(b-a)^2.$$

Indication p. 41

Exercice 57 (◔☆ Monotonies et asymptotes)
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ convexe telle que $f(0) \leq 0$.

Montrer que
$$\begin{aligned}]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{x} \end{aligned}$$
est croissante.

Faire un schéma.

Indication p. 41

Exercice 58 (◑★ Sous-additivité)
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ concave et **positive**.

Montrer que f est sous-additive c'est à dire

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[, f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Indication p. 41

Exercice 59 (◑☆ Encore des asymptotes de fonctions convexes)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable.

Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que

$$\frac{f(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$$

puis que

$$f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Indication p. 41

Exercice 60 (◑☆ Re-encore des asymptotes de fonctions convexes)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe.

Montrer que si

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

alors f est constante.

Indication p. 41

Exercice 61 (◑★ Convexe et périodique ?)
Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexes et périodiques.

Indication p. 41

Exercice 62 (◕☆ Dérivée de fonctions convexes dérivables)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Indication p. 41

Exercice 63 (◕★ Convergence uniforme sur tout segment intérieur et fonctions convexes)
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes sur I. On suppose que pour tout $x \in I$, la suite de réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note $f(x)$ sa limite (on dit alors que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f).

Montrer que pour tout segment $[a,b] \subset \mathring{I}$

$$\sup_{t\in[a,b]} (|f_n(t) - f(t)|) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et faire un schéma (on dit alors que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment vers f).

Indication p. 41

Exercice 64 (◔☆ Polynômes et convexité)
On dit que $P \in \mathbb{R}[X]$ est convexe ssi la fonction polynomiale associée est convexe.

1. Que dire des polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$ en termes de convexité ?
2. Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 convexe.

   Montrer que $\deg(P)$ est pair et que le coefficient dominant de P est positif.
3. Donner un exemple de polynôme de degré pair et de coefficient dominant positif non convexe.

Indication p. 41

Exercice 65 (◑★ Convexité et polynômes de Bernstein)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ convexe et continue.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto B_n(x) \end{aligned}$$

est convexe.

Indication p. 41

Convexité et convexité

Exercice 66 (◔★♠ Précision sur les inégalités de pentes limites)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe.

On rappelle que f est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur (cf exercice 49).

Soit $(a, b) \in \left(\mathring{I}\right)^2$ tel que $a < b$.

Montrer que

$$f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b).$$

Indication p. 42

Exercice 67 (◑☆ Fonctions continues convexes et dyadiques)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ **continue**.

Montrer que f est convexe **ssi**

$$\forall (x, y) \in I^2, f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Indication p. 42

Exercice 68 (◑★ Une petite transformation)
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

On définit $\tilde{f}$, par

$$\begin{aligned} \tilde{f} :]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x f\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Montrer que f est convexe ssi $\tilde{f}$ est convexe:

1. Dans le cas où f est deux fois dérivable.
2. Dans le cas général.

Indication p. 42

Exercice 69 (◑★ Convexité et moyennes glissantes)
Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Montrer que

$$\begin{aligned} g :]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

est convexe.

Indication p. 42

Exercice 70 (◔☆ Somme de convexes affine)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes.

On suppose que $f + g$ est affine, montrer que f et g sont affines.

Faire un schéma.

Indication p. 42

Exercice 71 (◔☆ Se ramener à $[0, 1]$)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que f est convexe **ssi** pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$\begin{aligned} f_{x,y} : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(tx + (1-t)y) \end{aligned}$$

est convexe.

Indication p. 42

Exercice 72 (◔★ Réciproque d'une fonction convexe strictement monotone)
Soit $f : I \to J$ convexe, strictement monotone et telle que $J = f(I)$.

Montrer que
- ▹ Si f est strictement croissante alors $f^{-1} : J \to I$ est concave.
- ▹ Si f est strictement décroissante alors $f^{-1} : J \to I$ est convexe.

Faire un schéma.

Indication p. 43

Exercice 73 (◑★ Un critère de convexité)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer l'équivalence entre
(i) f est convexe
(ii) pour tout $[a, b] \subset I$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) + \lambda x \end{aligned}$$

admet un maximum sur $[a, b]$ et ce maximum est atteint en a ou en b

Indication p. 43

Exercice 74 (◑★ Convexité et raccordements)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

On dit que f est convexe sur un intervalle $J \subset I$ ssi $f_{|J}$ est convexe sur J.

On dit de plus que f est localement convexe ssi pour tout $a \in I$ il existe un voisinage de a sur lequel f est convexe.

1. Donner un exemple de fonction convexe sur deux intervalles non disjoints et non convexe sur leur union.
2. Soient J_1 et J_2 deux intervalles de I tels que $J_1 \cap J_2$ contient au moins deux points.

Montrer que si f est convexe sur J_1 et sur J_2 alors f est convexe sur $J_1 \cup J_2$.
3. En déduire que si f est localement convexe alors f est convexe.

Indication p. 43

Exercice 75 (◕★ Une propriété de la moyenne)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

Montrer l'équivalence entre
(i) f est convexe,
(ii) $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h > 0, f(x) \leq \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2},$$
(iii) $$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists h \in]0, \varepsilon[, f(x) \leq \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}.$$

Indication p. 43

Exercice 76 (◔★ Continuité et convexité à l'intérieur)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{|\mathring{I}}$ est convexe.

Montrer que f est convexe.

Indication p. 43

Exercice 77 (◔☆ À faire une fois vu le chapitre déterminant)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que pour tous $a, b, c \in I$ tq $a < b < c$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

ssi pour tous $a, b, c \in I$ tq $a < b < c$,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & c & f(c) \end{vmatrix} \geq 0.$$

Indication p. 43

Exercice 78 (◕☆ Une variation autour du critère sur la dérivée seconde)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose de plus que I est un intervalle ouvert.

Montrer que f est convexe ssi

$$\forall x \in I, \limsup_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \geq 0.$$

Indication p. 43

Exercice 79 (◑★ Une variation autour de la convexité et du laplacien)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose de plus que I est un intervalle ouvert.

Montrer que f est convexe **ssi**

$$\forall x \in I, \forall h > 0 \ \text{ tq } \ [x-h, x+h] \subset I, f(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 43

Exercice 80 (◕☆ Dérivée à droite suffit)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose de plus que I est un intervalle ouvert.

Montrer que f est convexe **ssi** f est continue, dérivable à droite, de dérivée à droite croissante.

Indication p. 44

Exercice 81 (◕☆ Fonctions fortement convexes)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer l'équivalence entre
(i) on a l'inégalité de forte convexité

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y) - \frac{\varepsilon}{2}t(1-t)(x-y)^2.$$

(ii) la fonction

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \frac{\varepsilon}{2}x^2 \end{aligned}$$

est convexe.

Dans ce cas on dit que f est ε-fortement convexe.

2. Supposons que f est ε-fortement convexe.

Montrer que pour tous $(x_1, x_2, ..., x_n) \in I^n$ et $(t_1, t_2, ..., t_n) \in [0,1]^n$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^n t_i \left(x_i - \sum_{k=1}^n t_k x_k\right)^2.$$

3. Supposons que f est deux fois dérivable.

Montrer que f est ε-fortement convexe ssi pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq \varepsilon$.

Indication p. 44

Thème: log-convexité

Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est *log-convexe* ssi $\ln \circ f : I \to \mathbb{R}$ est convexe.

Exercice 82 (◑★ Fonctions log-convexes: le début)

1. Montrer que toute fonction log-convexe est convexe.

2. Donner un exemple de fonction convexe qui n'est pas log-convexe.

3. Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$. Montrer l'équivalence entre

(i) f est log-convexe

(ii) pour tout $\alpha > 0$, $x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe

(iii) pour tous $(x, y) \in I^2$ et $t \in [0, 1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq (f(x))^t (f(y))^{1-t}.$$

Indication p. 44

Exercice 83 (◔☆ Caractérisation par la dérivée seconde de la log-convexité)
Soit $f \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R}_+^*)$.

Montrer que f est log-convexe ssi pour tout $x \in I$,

$$f(x)f''(x) \geq (f'(x))^2.$$

Indication p. 44

Exercice 84 (◑★ Fonctions log-convexes: une caractérisation)
Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que f est log-convexe **ssi** pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe.

Indication p. 44

Exercice 85 (◑☆ Fonctions log-convexes: opérations)

1. Montrer que le produit de deux fonctions log-convexes est log-convexe.

2. Montrer que la somme de deux fonctions log-convexes est log-convexe.

Indication p. 44

Exercice 86 (◔☆ Un cas particulier de log-convexité)
Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$ des réels strictement positifs et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels.

Montrer que

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \ln\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{\lambda_k x}\right)\end{aligned}$$

est convexe.

Indication p. 44

Exercice 87 (◔☆ Log-concavité et coefficients binomiaux)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est log-concave, c'est à dire que

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \binom{n}{k}^2 \geq \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$.

Montrer que la fonction

$$\begin{aligned}[k, +\infty[&\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \binom{x}{k}\end{aligned}$$

est log-concave et convexe.

Indication p. 45

Exercice 88 (◉☆ Log-concavité des fonctions symétriques moyennées: inégalité de Newton)
Pour $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, et $k \in [\![0, n]\!]$ on pose $E_k(x_1, ..., x_n)$ la k-ième fonction symétrique élémentaire normalisée par son nombre de termes c'est à dire

$$E_k(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} x_i.$$

1. Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tous non nuls. Exprimer la suite $\left(E_k\left(\frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_n}\right)\right)_{k \in [\![1,n]\!]}$ en fonction de la suite $(E_k(x_1, ..., x_n))_{k \in [\![1,n]\!]}$.
2. Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $y_1, ..., y_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $E_k(x_1, ..., x_n) = E_k(y_1, ..., y_{n-1})$.
3. Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

   Montrer que la suite $(E_k(x_1, ..., x_n))_{k \in [\![0,n]\!]}$ est log-concave, c'est à dire que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$E_k(x_1, ..., x_n)^2 \geq E_{k-1}(x_1, ..., x_n) E_{k+1}(x_1, ..., x_n).$$

Indication p. 45

Exercice 89 (◑☆ Une généralisation de l'IAG: inégalités de Maclaurin)
On réutilise les notations de l'exercice 88 et on admet le résultat de cet exercice.

Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$(E_n(x_1, ..., x_n))^{\frac{1}{n}} \leq (E_{n-1}(x_1, ..., x_n))^{\frac{1}{n-1}} \leq \cdots \leq (E_2(x_1, ..., x_n))^{\frac{1}{2}} \leq E_1(x_1, ..., x_n).$$

Indication p. 45

Thème culturel: transformée de Legendre-Fenchel

Exercice 90 (◔☆ Cas particulier d'inégalités de Young)

1. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ strictement croissante et bijective.

Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$xy \leq \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^y f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Faire un schéma.

3. Redémontrer la question 1 à l'aide de la question 2.

Indication p. 45

Exercice 91 (◑★ Enveloppe convexe et fonction)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

On suppose que f est minorée.

Montrer qu'il existe une (et unique) plus grande fonction convexe plus petite que f, c'est à dire une (et unique) fonction $\tilde{f}$ telle que

- $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ convexe,
- $\tilde{f} \leq f$,
- pour toute fonction convexe g, $g \leq f \Rightarrow g \leq \tilde{f}$.

Faire un schéma.

Commenter l'hypothèse de minoration.

Indication p. 45

Soit $f : I \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On dit que f est convexe ssi pour tous $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Avec la convention $0 \times +\infty = 0$.

Exercice 92 (◔☆ Domaine d'une fonction convexe)
Soit $f : I \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On appelle domaine de f l'ensemble

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in I \mid f(x) < +\infty\}.$$

Montrer que $f : I \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe **ssi**
- ▷ $\mathrm{Dom}(f)$ est un intervalle
- ▷ $f_{|\mathrm{Dom}(f)} : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ est convexe.

Faire un schéma.

Indication p. 45

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$, on définit sa transformée de Legendre-Fenchel, notée $f^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; par

$$\forall p \in \mathbb{R},\ f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (px - f(x)).$$

Exercice 93 (◔★ Premières constatations)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$.

1. Commenter la bonne définition de f^*.
2. Montrer que f^* est convexe.
3. Soit g non identiquement $+\infty$ telle que $f \leq g$. Montrer que $f^* \geq g^*$.

Indication p. 46

Exercice 94 (◑☆ Des calculs explicites)
Calculer la transformée de Legendre-Fenchel des fonctions suivantes:
1. $x \mapsto \rho x$ pour $\rho \in \mathbb{R}$,
2. $x \mapsto \eta x^2$ pour $\eta > 0$,
3. $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$ pour $A \subset \mathbb{R}$

Indication p. 46

Exercice 95 (◔★ Cas d'une fonction régulière)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ strictement convexe.

Déterminer une expression explicite de f^*.

Faire un schéma.

Indication p. 46

Exercice 96 (◑★ Inégalité de Young)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$.

Montrer que pour tout $x, p \in \mathbb{R}$,

$$px \leq f(x) + f^*(p).$$

2. Que donne cette inégalité pour les fonctions suivantes:

- ▷ $f : x \mapsto \eta x^2$ pour $\eta > 0$,
- ▷ $f : x \mapsto |x|^p$ pour $p > 1$,
- ▷ $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ strictement croissante et bijective.

Indication p. 46

Exercice 97 (◕★ Bidualité de Fenchel-Legendre)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f^{**} \leq f$.

2. On suppose que f est convexe. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que $f^*(p) = px - f(x)$.

3. En déduire que si f est convexe alors $f^{**} = f$.

4. Montrer que de manière générale f^{**} est la plus grande fonction convexe minorant f (cf exercice 91).

Indication p. 46

Exercice 98 (◑☆ Transformée de Fenchel et opérations)

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$.

Montrer que pour tout $t \in [0,1]$,

$$(tf + (1-t)g)^* \leq tf^* + (1-t)g^*.$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$ et $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Montrer que

$$(x \mapsto f(ax+b))^* = \left(p \mapsto f^*\left(\frac{p}{a}\right) - b\frac{p}{a}\right)$$

et

$$(x \mapsto af(x)+b)^* = \left(p \mapsto af^*\left(\frac{p}{a}\right) - b\right).$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Montrer que

$$(x \mapsto f(x) + \gamma x)^* = (p \mapsto f^*(p-\gamma))$$

et

$$(x \mapsto f(x-\gamma))^* = (p \mapsto f^*(p) + \gamma p).$$

Indication p. 46

Exercice 99 (◉☆ Épi-somme ou inf-convolution)

Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$, on définit leur épi-somme ou inf-convolution par

$$\begin{aligned}(f \square g) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \\ x &\mapsto \inf_{y \in \mathbb{R}} (f(y) + g(x-y))\end{aligned}$$

1. Montrer que $\square$ définit une loi de composition interne commutative sur l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$ et minorées.

2. Soient f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement $+\infty$, convexes et minorées.

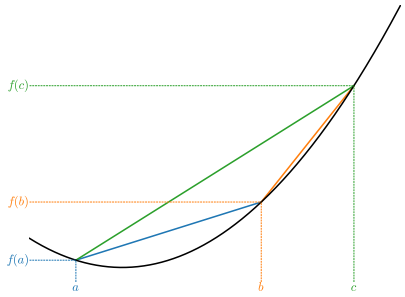
Montrer que

$$(f \square g)^* = f^* + g^*.$$

Indication p. 46

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (À savoir refaire: inégalité des trois pentes)



Cf cours, on rappelle que

$$b = \frac{c-b}{c-a}a + \frac{b-a}{c-a}c$$

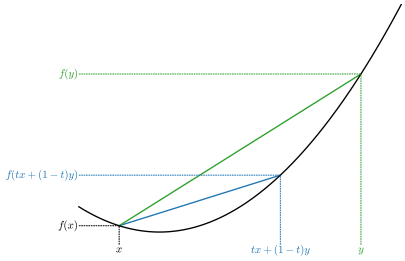
et que le schéma **essentiel** de ce chapitre est le suivant:

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Inégalités de tangence)
RAS.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Se ramener à tout segment)
La restriction d'une fonction convexe est convexe.

Pour tous $(x,y) \in I^2$ il existe $[a,b] \subset I$ tel que $(x,y) \in [a,b]^2$.

Indication 4 · Énoncé p. 3 (L'inégalité des deux pentes suffit)



Dans un sens il s'agit de deux des trois pentes de l'inégalité des trois pentes.

Dans l'autre sens écrire pour $(x,y) \in I^2$ et $t \in]0,1[$ constater que sans perte de généralité $x < y$ et alors $x < tx + (1-t)y < y$.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Fonctions convexes et concaves)

1. Immédiat.
2. Observer par exemple que les taux d'accroissements sont croissants et décroissants.

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Convexité et additions affines)
Le terme affine disparaît dans l'écriture de l'inégalité de convexité.

Indication 7 · Énoncé p. 3 (Convexité et composées affines)
L'ensemble de définition est $J = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha x + \beta \in I\} = \left\{\frac{y-\beta}{\alpha}, y \in I\right\}$.

Pour la convexité remarquer que $\alpha(tx + (1-t)y) + \beta = t(\alpha x + \beta) + (1-t)(\alpha y + \beta)$.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Opérations et fonctions convexes)
1. Produit des inégalités par un réel positif, puis somme d'inégalités.
2. Croissance puis convexité.
3. Produit d'inégalités positives. Puis étude d'un trinôme du second degré en t.
4. Prendre une fonction convexe non affine et considérer son opposé.
5. Par exemple $x \mapsto (x^2-1)^2$.
6. Par exemple $x \mapsto (x^2-1)^2$.

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Convexité et épigraphe)
Cf cours.

Indication 10 · Énoncé p. 4 (Maximum et supremum de fonctions convexes)
Écrire une inégalité «$\leq$».

Le max (resp. sup) étant un majorant, majoré en particulier à droite.

Le max (resp. sup) étant plus petit que tous les majorants, passer au max (resp. au sup) à gauche.

Pour les schémas, interpréter en termes de pentes, ou encore d'épigraphes (l'intersection de convexes est convexe).

On pourra aussi méditer sur l'hypothèse de majoration à la lumière de l'exercice 92.

Indication 11 · Énoncé p. 5 (Minimum local/global d'une fonction convexe)
1. Par exemple une fonction affine, exp, etc.
2. Si par l'absurde il n'est pas global, alors il existe $\beta \in I$ tel que $f(\beta) < f(\alpha)$. Distinguer selon la position relative de α et β et écrire une inégalité des pentes.

Indication 12 · Énoncé p. 5 (Stricte convexité)
Reprendre les preuves du cours.

Attention cas de la dérivée seconde: on obtient seulement que $f'' \geq 0$, le lien entre stricte monotonie et signe de la dérivée n'est pas un signe strict.

Indication 13 · Énoncé p. 5 (Suites convexes)
Il s'agit évidemment des suites convexes.

Indication 14 · Énoncé p. 6 (Sous-différentielle: définition)
1. Faire le schéma pour une fonction convexe non dérivable, par exemple $x \mapsto |x|$ dont la sous-différentielle en 0 est $[-1, 1]$.
2. Cf exercice 66 pour le caractère non vide. Pour montrer qu'il s'agit d'un intervalle montrer qu'il s'agit d'une partie convexe. Pour montrer qu'il s'agit d'un segment montrer qu'il s'agit d'une partie « fermée ».

3. Faire un schéma.

4. Par double inclusion, en remarquant qu'une des deux inclusions se traite par étude locale de $x \mapsto f'(a)(x-a) - \gamma(x-a)$.

Indication 15 · Énoncé p. 6 (Convexité et « tangentes »)
Pour le sens direct voir par exemple les exercices 14 ou 66.

Pour la réciproque remarquer qu'un supremum de fonctions affines est convexe !

Indication 16 · Énoncé p. 6 (Dans le cas convexe c'est suffisant)
Utiliser la monotonie des taux d'accroissements en α (prolongés en la dérivée au point α).

Indication 17 · Énoncé p. 6 (Le cas essentiel en optimisation)
L'ensemble des extrema est un segment (non vide) et ce sont des minima.

Indication 18 · Énoncé p. 7 (Fonctions convexes sur $\mathbb{R}$ majorées)

1. Faire un schéma. Par exemple $x \mapsto e^{-x}$.

2. Supposer f non constante, avec α, β tels que $f(\alpha) \neq f(\beta)$, étudier la position relative de f par rapport à la corde passant par $(\alpha, f(\alpha))$ et $(\beta, f(\beta))$. (Faire un schéma).

Indication 19 · Énoncé p. 7 (Maximum au bord d'une fonction convexe)
Pour tout $x \in [a,b]$ majorer $f(x)$ par la corde entre $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et effectuer une disjonction de cas sur le signe de la pente.

Indication 20 · Énoncé p. 7 (Unicité dans le TEAF et convexité)

1. Strictement monotone implique injectif d'où l'unicité. L'existence est le TEAF.

2. Constater que $b \mapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est continue, et que la non stricte monotonie implique la non injectivité. De deux points ayant la même image faire un schéma et conclure.

Indication 21 · Énoncé p. 8 (Une forme souvent utile de l'inégalité de convexité)
Juste écrire l'inégalité de convexité sur $(x_1, ..., x_n)$ avec des poids uniformes.

Indication 22 · Énoncé p. 8 (Révisions: IHGAQ par convexité)
Utiliser la concavité de ln pour montrer que la moyenne géométrique est plus petite que la moyenne arithmétique.

Appliquer cette inégalité aux inverses puis inverser pour obtenir que la moyenne harmonique est plus petite que la moyenne géométrique.

Utiliser la convexité de $x \mapsto x^2$ pour le terme quadratique.

Indication 23 · Énoncé p. 9 (Révisions : Inégalité de Hölder)

1. Inégalité de concavité de ln.

2. Écrire l'inégalité précédente point par point puis intégrer.

3. Si les fonctions sont non nulles, considérer $\frac{f}{\|f\|_p}$ et $\frac{g}{\|g\|_q}$.

Indication 24 · Énoncé p. 9 (Révisions : Une inégalité de Minkowski)
Appliquer l'inégalité de Hölder à des fonctions bien choisies.

Indication 25 · Énoncé p. 9 (Révisions: inégalité de Jensen)
Au choix soit utiliser des sommes et passer à la limite (sommes de Riemann dans le cas $\mathcal{C}^0_{pm}$) soit écrire que φ est au-dessus d'une tangente (pourquoi une telle tangente existe ?).

Indication 26 · Énoncé p. 10 (Introduction à l'entropie de Shannon)
1. Croissance comparée.
2. Convexité de f aux points $\frac{p_k}{q_k}$.
3. Prendre $q_k = \frac{1}{n}$ pour tout k.

Indication 27 · Énoncé p. 10 (Polygones de périmètre maximal)
1. Écrire l'inégalité de concavité de sin sur $[0, \pi]$.
2. Faire un schéma et utiliser la question précédente.

Indication 28 · Énoncé p. 11 (Une majoration d'exponentielle)
Juste utiliser que exp est en-dessous de ses cordes et calculer l'équation de la corde entre $\left(-M, e^{-\lambda M}\right)$ et $\left(M, e^{\lambda M}\right)$.

Indication 29 · Énoncé p. 11 (Inégalité de Hölder un peu plus générale)
Traiter le cas où un des paramètres est $+\infty$ à part.

Dans le cas général remarquer que $\|f^\alpha\|_\beta = \left(\|f\|_{\alpha\beta}\right)^\alpha$ et utiliser l'inégalité de Hölder démontrée à la question 23 en remarquant que ω ne change rien.

Indication 30 · Énoncé p. 11 (Multi-Hölder)
Au choix: faire un multi-Young: $\prod_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} a_k^{p_k}$ par concavité de ln puis faire comme Hölder ou bien par récurrence en faisant le cas $\omega = 1$ de l'exercice 29.

Indication 31 · Énoncé p. 12 (IAG généralisée)
1. Effectuer un DL_1 pour obtenir le prolongement par continuité.
2. Distinguer selon la position relative de α, β et 0. Se ramener au cas $\alpha = 0 < \beta$ et $\alpha = 1 < \beta$.

   Dans un cas utiliser la concavité de ln, dans l'autre de $t \mapsto t^\gamma$ où $\gamma \in]0, 1]$.

Indication 32 · Énoncé p. 12 (Sous-additivité de la moyenne géométrique)
Se ramener au cas où pour tout k, $x_k = 1$.

Utiliser ensuite la convexité de $x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

Alternativement utiliser 31.

Indication 33 · Énoncé p. 12 (Inégalités de convexité en vrac)
1. Concavité de $\ln \circ \ln$.
2. Si nécessaire utiliser l'homogénéité. Puis la convexité de $x \mapsto \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$.

3. Concavité de ln.

Indication 34 · Énoncé p. 13 (Une inégalité de convexité avec des signes !)
1. Repérer une combinaison convexe ou bien regrouper les termes deux à deux. Ou encore procéder par récurrence.
2. Si vous ne repérez pas une combinaison convexe, faire une récurrence.

Indication 35 · Énoncé p. 13 (Quelle est la fonction ?)
Convexité de $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ sur $[0, +\infty[$.

Indication 36 · Énoncé p. 13 (Inégalités géométriques)
Il s'agit de moyenne avec le symétrique par rapport au milieu du segment dans le second cas et de taux d'accroissements dont le point varie dans le premier.

L'étude de la monotonie est immédiate dans le cas dérivable.

Dans le cas général, écrire des inégalités des trois pentes bien choisies.

Indication 37 · Énoncé p. 14 (Inégalité géométrique: moyenne des pentes)
Somme de deux fonctions croissantes.

Indication 38 · Énoncé p. 14 (Une version un peu plus générale de Jensen)
Faire la même preuve que 25 ou bien faire le cas général qu'est l'exercice 39.

Indication 39 · Énoncé p. 14 (Une version abstraite de Jensen)
Faire comme l'inégalité de convexité standard en remarquant que toute fonction convexe est supremum de fonctions affines.

Indication 40 · Énoncé p. 14 (Inégalité de Popoviciu pondérée)
Bon courage avec toutes les inégalités de convexité ! (Cet exercice ne sera pas corrigé).

Indication 41 · Énoncé p. 15 (Juste l'IAG)
Appliquer l'IAG et constater que $\prod \frac{x_k}{x_{\sigma(k)}}$ se calcule bien.

Indication 42 · Énoncé p. 15 (La normalisation change le sens)
Utiliser par exemple la sous-additivité des fonctions concaves (cf exercice 58) et remarquer que si $\alpha \leq \beta$ alors $\xi \mapsto \xi^{\frac{\alpha}{\beta}}$ est concave.

Indication 43 · Énoncé p. 15 (Un classique: l'inégalité de Nesbitt)
Parmi les méthodes possibles:
- ▷ IAG
- ▷ Cauchy-Schwarz
- ▷ IAH
- ▷ Inégalité de réarrangement
- ▷ Par convexité de $t \mapsto \frac{t}{(x+y+z)-t}$ sur $]0, x+y+z[$.

Sachant que toutes ces preuves sont simplifiées par un adimensionnement du problème.

Indication 44 · Énoncé p. 16 (Une inégalité de Kantorovitch)

1. Convexité de la fonction inverse sur $[m, M]$ ou bien tout simplement la fameuse inégalité $(M - x)(x - m) \geq 0$.
2. On connaît le maximum d'un trinôme $(X - a)(b - X)$ (c'est au point milieu).

Indication 45 · Énoncé p. 16 (Mini inégalité de Karamata)
Faire un schéma pour montrer que $f(y_0) - f(x_0) \geq f(x_1) - f(y_1)$.

Indication 46 · Énoncé p. 16 (Un exercice flou qui en résume beaucoup d'autres)
On obtient trois cas possibles:

- ▷ croissant,
- ▷ décroissant,
- ▷ décroissant puis croissant.

Indication 47 · Énoncé p. 16 (Limites en l'infini)
Attention à la bonne négation.

Utiliser deux points pour minorer f par une fonction affine de pente positive.

Indication 48 · Énoncé p. 17 (Asymptotes de fonctions convexes)

1. Fixer $a \in \mathbb{R}$, le taux d'accroissements en a, $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissant. Limite monotone.
2. Quitte à considérer $x \mapsto f(x) - \ell x$ se ramener à $\ell = 0$.

   Comme τ_a est croissant et tend vers 0, il est négatif. En déduire la décroissance de f. Limite monotone.
3. Quitte à considérer $x \mapsto f(x) - (\ell x + \beta)$ se ramener à $\ell = 0, \beta = 0$.

   Remarquer que f est décroissante et tend vers 0 pour étudier son signe.

Indication 49 · Énoncé p. 17 (La régularité à l'intérieur)
Faire des schémas et cf cours.

Indication 50 · Énoncé p. 17 (Ce qui se passe aux bords)

1. Cf le cours.
2. Reprendre la preuve du cours avec seulement un côté.

Indication 51 · Énoncé p. 18 (TVI et convexité)

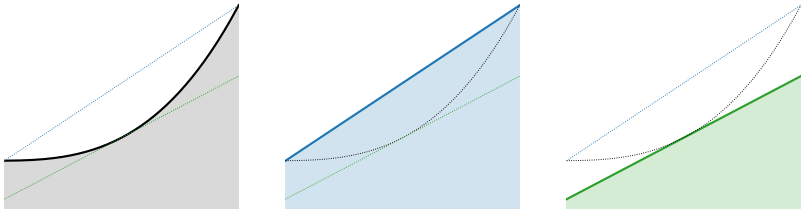
- ▷ L'existence est issue du TVI.
- ▷ Pour l'unicité supposer qu'il en existe 2 et écrire une inégalité des pentes bien choisie.

Indication 52 · Énoncé p. 18 (Un encadrement par trois points)
Faire un schéma et pour la majoration les pentes entre a, x, b, et pour la minoration les pentes entre $\frac{a+b}{2}, x, b$ ainsi que $a, \frac{a+b}{2}, x$.

Indication 53 · Énoncé p. 18 (Limite simple de fonctions convexes)
PLIL de l'ineg. conv.

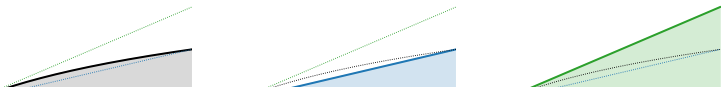
Indication 54 · Énoncé p. 18 (Convexité et trapèzes: Hermite-Hadamard)
La fonction f est majorée par la fonction affine passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Intégrer cette inégalité.

La fonction f est minorée par une fonction affine passant par $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. Intégrer cette inégalité.

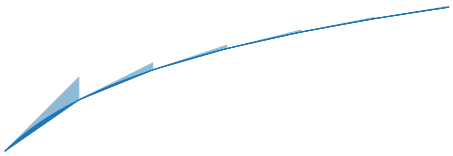


Indication 55 · Énoncé p. 19 (La méthode de la fleur)

1. Interpréter comme une aire comprise entre deux trapèzes.



2. Commencer par faire un schéma.



Remarquer que l'erreur totale (somme des petites erreurs) est croissante par l'inégalité précédente, et majorée par télescopage en fleur (décroissance des pentes).

Cf les schémas.



3. On obtient la formule de Stirling sans la valeur de la constante de Stirling $\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)$ (ici $C_f = \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) - 1$).

Indication 56 · Énoncé p. 19 (Une application de Hermite-Hadamard)
Remarquer que $x \mapsto f(x) - \frac{mx^2}{2}$ est convexe ainsi que $x \mapsto \frac{Mx^2}{2} - f(x)$.

Appliquer l'exercice 54.

Indication 57 · Énoncé p. 19 (Monotonies et asymptotes)
Inégalité des pentes entre $0, x, y$ pour $0 < x < y$ et constater que $f(0)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ a un signe.

Indication 58 · Énoncé p. 20 (Sous-additivité)
Se ramener au cas $f(0) = 0$.

Montrer que $\frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(x)}{x}$ et $\frac{f(x+y)}{x+y} \leq \frac{f(y)}{y}$ puis faire une combinaison de ces deux inégalités.

Indication 59 · Énoncé p. 20 (Encore des asymptotes de fonctions convexes)
Utiliser les taux d'accroissements.

Indication 60 · Énoncé p. 20 (Re-encore des asymptotes de fonctions convexes)
Regarder encore les taux d'accroissements.

Indication 61 · Énoncé p. 20 (Convexe et périodique ?)
Il n'y a que les constantes. Le démontrer (plein de méthodes possibles).

Indication 62 · Énoncé p. 20 (Dérivée de fonctions convexes dérivables)
Par le théorème de Darboux f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. De plus f' est croissante.

En déduire (cf cours sur la continuité) que f' est continue.

Indication 63 · Énoncé p. 21 (Convergence uniforme sur tout segment intérieur et fonctions convexes)
Étant fixé $[a, b]$ montrer que toutes les f_n sont lipschitziennes de même constante de Lipschitz.

Conclure la convergence uniforme.

Indication 64 · Énoncé p. 21 (Polynômes et convexité)

1. Les fonctions affines sont convexes.

2. La dérivée seconde doit être positive sur $\mathbb{R}$.

3. Il n'y a pas de contre-exemple de degré 2. Pour le degré 4 faire un schéma de $X^4 - \alpha X^2$.

Indication 65 · Énoncé p. 21 (Convexité et polynômes de Bernstein)
En dérivant deux fois et par formule de la capitaine et réindexation on obtient (pour $n \geq 2$)

$$B_n'' = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\left(f\left(\frac{k+2}{n}\right) - 2f\left(\frac{k+1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n-2}{k}X^k(1-X)^{n-2-k}.$$

Remarque: vous verrez probablement l'année prochaine que la suite des fonctions polynomiales $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur le segment $[0,1]$) si f est continue. Ainsi cet exercice montre que «toute fonction convexe continue sur un segment est limite uniforme de fonctions polynomiales convexes».

Indication 66 · Énoncé p. 22 (Précision sur les inégalités de pentes limites)
Reprendre la preuve du cours en gardant toutes les inégalités.

Indication 67 · Énoncé p. 22 (Fonctions continues convexes et dyadiques)
Le sens direct est immédiat.

Pour le sens réciproque, à $x, y \in I$ fixés montrer par récurrence sur n que l'inégalité de convexité est vérifiée pour tout t de la forme $\frac{p}{2^n}$ et conclure par densité des dyadiques et continuité de f.

Proposer un exemple de fonction non continue vérifiant la condition mais non convexe, par exemple vérifiant l'égalité (fonction $\mathbb{Q}$ linéaire).

Faire un schéma.

Indication 68 · Énoncé p. 22 (Une petite transformation)
Remarquer que $\tilde{\tilde{f}} = f$.

1. Dans le cas deux fois dérivable écrire une relation entre g'' et f''.
2. Dans le cas général, pour $x, y > 0$ et $t \in [0,1]$, déterminer $s \in [0,1]$ tel que

$$\frac{1}{tx+(1-t)y} = s\frac{1}{x} + (1-s)\frac{1}{y}.$$

On obtient $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)s = \frac{1}{tx+(1-t)y} - \frac{1}{y}$ c'est à dire $s = \frac{tx}{tx+(1-t)y}$.

Puis écrire l'inégalité de convexité sur f.

Indication 69 · Énoncé p. 23 (Convexité et moyennes glissantes)
Écrire $g(x) = \int_0^1 f(xs)\,\mathrm{d}s$ et constater que $x \mapsto f(xs)$ est convexe.

Indication 70 · Énoncé p. 23 (Somme de convexes affine)
Commencer par traiter l'exercice 5.

Remarquer que $f = (f+g) + (-g)$ est concave.

Indication 71 · Énoncé p. 23 (Se ramener à $[0,1]$)

- ▷ $\Longleftarrow$ Fixer x et y dans I^2, $t \in [0,1]$ et écrire l'inégalité de convexité sur $f_{x,y}(t\cdot 0 + (1-t)\cdot 1)$.
- ▷ $\Rightarrow$ Pour $t = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$ écrire $tx + (1-t)y$ comme combinaison convexe de $t_1x + (1-t_1)y$ et $t_2x + (1-t_2)y$.

Indication 72 · Énoncé p. 23 (Réciproque d'une fonction convexe strictement monotone)
Remarquer que l'injectivité est issue de la stricte monotonie.

Écrire l'inégalité de convexité et composer (s'inspirer de l'étude de la monotonie de la réciproque).

Indication 73 · Énoncé p. 24 (Un critère de convexité)
- ▷ $(i) \Rightarrow (ii)$ utiliser les exercices 6 et 19.
- ▷ $(ii) \Rightarrow (i)$ étant donnés $x, y \in I$ prendre $[a, b] = [x, y]$ et λ tel que $\varphi_\lambda(a) = \varphi_\lambda(b)$.

Indication 74 · Énoncé p. 24 (Convexité et raccordements)
1. Par la question suivante il faut prendre deux intervalles dont l'intersection est exactement un point. Prendre ensuite par exemple une fonction affine par morceaux.
2. Se ramener au cas f convexe sur $[a, b]$ et $[c, d]$ avec $a < c < b < d$ et faire des schémas. Utiliser au choix des inégalités de pentes, une caractérisation comme 73, ou une associativité du barycentre bien choisie.
3. Utiliser un principe de continuation utilisant la question précédente.

Indication 75 · Énoncé p. 24 (Une propriété de la moyenne)
Repérer que le sens non immédiat est $(iii) \Rightarrow (i)$.

Remarquer que
- ▷ l'inégalité est stable par somme
- ▷ l'inégalité est une égalité pour les fonctions affines
- ▷ une fonction vérifiant l'inégalité n'admet pas de maximum à l'intérieur d'un intervalle
- ▷ pour montrer que f est convexe il suffit de montrer que pour tout $[a, b]$, $x \mapsto f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$ atteint un maximum, en a (et b).

Indication 76 · Énoncé p. 25 (Continuité et convexité à l'intérieur)
Obtenir l'inégalité de convexité sur les bords par passage à la limite.

Indication 77 · Énoncé p. 25 (À faire une fois vu le chapitre déterminant)
Calculer le déterminant 3x3…

Indication 78 · Énoncé p. 25 (Une variation autour du critère sur la dérivée seconde)
Constater qu'un sens est immédiat.

Dans l'autre sens se ramener d'abord:

- ▷ Pour $x < y \in I$, à montrer que f est en-dessous de sa corde entre x et y.
- ▷ Pour $x < y \in I$ tq $f(x) = f(y) = 0$, à montrer que $f \leq 0$ entre x et y.
- ▷ Si ce n'est pas le cas il existe un maximum local sur $]x, y[$ et alors un point où la limsup est négative ou nulle. En déduire le résultat si la limsup est strictement positive.
- ▷ Pour obtenir large au lieu de strict étudier $x \mapsto f(x) + \varepsilon x^2$ (par exemple) et faire $\varepsilon \to 0$.

Indication 79 · Énoncé p. 25 (Une variation autour de la convexité et du laplacien)
Par exemple minorer f par une fonction affine coïncidant avec f en x.

On remarquera que l'on peut en fait montrer à l'aide de l'exercice 78 que la condition est une CNS.

Indication 80 · Énoncé p. 26 (Dérivée à droite suffit)
Commencer par montrer que si une fonction continue est dérivable à droite de dérivée à droite positive alors elle est croissante (ce n'est pas si facile).

Calquer ensuite la preuve du cours.

Indication 81 · Énoncé p. 26 (Fonctions fortement convexes)
Adapter les preuves du cours.

Indication 82 · Énoncé p. 27 (Fonctions log-convexes: le début)

1. Composer par exp croissante et convexe.

2. Par exemple $x \mapsto x$.

3.
- ▷ Pour $(i) \Rightarrow (ii)$ utiliser l'exercice 6 et le fait que la log-convexité implique la convexité.
- ▷ Pour $(iii) \Rightarrow (i)$ utiliser la croissance de ln.
- ▷ Le sens plus difficile est $(ii) \Rightarrow (iii)$. À $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$ fixés, écrire pour tout $\alpha > 0$ l'inégalité de convexité sur $x \mapsto \alpha^x f(x)$ pour obtenir

$$\forall \alpha > 0, f(tx + (1-t)y) \leq \alpha^{(1-t)(x-y)} t f(x) + \alpha^{t(y-x)}(1-t) f(y)$$

et optimiser en α.

Indication 83 · Énoncé p. 27 (Caractérisation par la dérivée seconde de la log-convexité)
Calculer la dérivée seconde de $\ln \circ f$…

Indication 84 · Énoncé p. 27 (Fonctions log-convexes: une caractérisation)
- ▷ $\Rightarrow$ Remarquer que $f^\alpha = \exp \circ (\alpha \ln \circ f)$.
- ▷ $\Leftarrow$ À $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$ fixés, l'idée est d'écrire une inégalité de convexité sur f^α puis de faire tendre α vers 0^+.

  Plus précisément pour tout $\alpha > 0$,

$$\ln(f(tx + (1-t)y)) \leq \frac{\ln(t(f(x))^\alpha + (1-t)(f(y))^\alpha)}{\alpha}$$

  et effectuer un DL_1 du numérateur pour α au voisinage de 0.

Indication 85 · Énoncé p. 27 (Fonctions log-convexes: opérations)

1. Pour le produit écrire le ln d'un produit comme la somme de deux fonctions convexes.

2. Pour la somme utiliser la caractérisation (ii) de l'exercice 82.

Indication 86 · Énoncé p. 28 (Un cas particulier de log-convexité)
Au choix d'abord montrer que la somme de fonctions log-convexes est log-convexe (exercice 85) ou bien plus simplement dériver deux fois.

Il faut alors montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k e^{\lambda_k x}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_k^2 e^{\lambda_k x}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e^{\lambda_k x}\right)$$

ce qui est une inégalité bien connue dont les initiales sont « C-S ».

Indication 87 · Énoncé p. 28 (Log-concavité et coefficients binomiaux)

1. Vérifier que $\frac{(n-k+1)}{k}\frac{k+1}{n-k} \geq 1$.
2. Dériver deux fois.

Indication 88 · Énoncé p. 29 (Log-concavité des fonctions symétriques moyennées: inégalité de Newton)

1. Par calcul on obtient $E_k\left(\frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_n}\right) = E_{n-k}\frac{x_1,...,x_n}{E_n}(x_1, ..., x_n)$.
2. Par Rolle avec $P = \prod(X - x_k)$ on a P' scindé et ses racines conviennent par dérivée et coefficients.
3. C'est le point clef: par récurrence en remarquant que les deux points précédents permettent de passer de $n+1$ à n.

Indication 89 · Énoncé p. 29 (Une généralisation de l'IAG: inégalités de Maclaurin)
Remarquer qu'il s'agit de montrer que si une fonction f est concave on a une information sur la monotonie de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$.

Alternativement faire des produits malins.

Indication 90 · Énoncé p. 30 (Cas particulier d'inégalités de Young)
La première est la concavité de ln ou encore un cas particulier de la seconde pour $f(x) = x^{p-1}$.

Pour la seconde, par exemple fixer une variable et dériver par rapport à l'autre.

On pourra remarquer que $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$.

On remarquera aussi a posteriori que l'hypothèse $\mathcal{C}^1$ ne sert qu'à démontrer cette somme, et que (cf TD d'intégration), cette somme étant correcte dans le cas $\mathcal{C}^0$ l'inégalité de Young est vérifiée dans ce cas plus général.

Indication 91 · Énoncé p. 30 (Enveloppe convexe et fonction)
On rappelle qu'un sup de fonctions convexes est convexe.

Prendre le sup de toutes les fonctions convexes, ou de toutes les fonctions affines plus petites que f (méditer pourquoi cela est équivalent).

L'hypothèse de minoration par une constante peut être remplacée par une hypothèse de minoration par une fonction convexe ou par une fonction affine (méditer pourquoi cela est équivalent).

Indication 92 · Énoncé p. 31 (Domaine d'une fonction convexe)
$\Longleftarrow$ Juste vérifier la convexité en effectuant une disjonction des cas si une valeur est infinie.

$\Rightarrow$ Montrer que, si deux extrémités sont dans le domaine, alors le segment aussi.

Indication 93 · Énoncé p. 31 (Premières constatations)
1. Supremum dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ d'un ensemble contenant au moins un élément fini.
2. Supremum de fonctions affines donc convexes.
3. Inégalité de supremum en deux temps.

Indication 94 · Énoncé p. 31 (Des calculs explicites)
Calcul explicite.

Pour le dernier point se convaincre que cela ne dépend que de $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

Indication 95 · Énoncé p. 31 (Cas d'une fonction régulière)
On pourra faire intervenir $x^*(p)$ l'unique solution de $f'(x) = p$.

Indication 96 · Énoncé p. 32 (Inégalité de Young)
1. Le sup est un majorant.
2. On obtient trois inégalités bien connues. On pourra utiliser l'exercice 95 pour calculer les transformées.

Indication 97 · Énoncé p. 32 (Bidualité de Fenchel-Legendre)
1. Le sup est un majorant puis passage au sup.
2. Trouver p tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq f(x) + p(t-x)$.
3. En déduire que dans le cas convexe $f^{**} \geq f$.
4. Utiliser les encadrements avec la « décroissance » de $f \mapsto f^*$.

Indication 98 · Énoncé p. 33 (Transformée de Fenchel et opérations)
C'est un bon exercice de révision de manipulation de sup.

Indication 99 · Énoncé p. 33 (Épi-somme ou inf-convolution)
1. Pour la bonne définition il faut vérifier la minoration. Pour le caractère associatif et commutatif il suffit d'écrire $\{(y, x-y), y \in \mathbb{R}\} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 + y_2 = x\}$.
2. Par double inégalité, bon courage !