Développements Limités

Énoncés 2
Le plus important 2
Développements limités 2
Relations de comparaisons 8
Retour sur les développements asymptotiques de suites et fonctions 11
Vers les développements en série entières 17
Un peu de physique 19
Indications 21
Solutions 29

Énoncés

Dans tout le TD, sauf mention contraire, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point de I et n un entier naturel.

Le plus important

Pratiquer le cahier de calcul de DL !

Développements limités

Exercice 1 (◑★♣ Un contre-exemple)
Montrer que

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Que dire de la régularité de f ?

Indication p. 21

Exercice 2 (◔★ Tangentes)
Déterminer les $\mathrm{DL}_8(0)$ de tan et th.

Indication p. 21

Exercice 3 (◔★ Pour le calcul numérique)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $(a_{-1}, a_0, a_1) \in \mathbb{R}^3$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer un $\mathrm{DL}_2(0)$ de

$$h \mapsto a_{-1} f(x-h) + a_0 f(x) + a_1 f(x+h).$$

En déduire des méthodes pour calculer numériquement $f'(x)$ et $f''(x)$.

Indication p. 21

Exercice 4 (◔★ Et le cas complexe ?)
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Montrer que

$$\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\lambda}.$$

Indication p. 21 · Solution p. 29

Exercice 5 (◔★♠ Un DL qui devrait être usuel)
Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} x^k + o_{x\to 0}(x^n)$$

Indication p. 21

Exercice 6 (◔★ Des calculs explicites)
Déterminer des DLs en 0 au premier ordre non nul des fonctions suivantes (éventuellement prolongées par continuité en 0).

1. $x \mapsto \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e^1}{x}$
2. $x \mapsto x^{\sin(x)} - \sin(x)^x$
3. $x \mapsto \mathrm{sh}(\sin(x)) - \sin(\mathrm{sh}(x))$
4. $x \mapsto \sqrt{1+\frac{x}{3}} - \left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$
5. $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) - \frac{x}{\sin(x)} + \frac{\ln(1+x)}{\mathrm{sh}(x)} + \ln(\mathrm{ch}(x))$

Indication p. 21

Exercice 7 (◑★ Convergence vers moyenne géométrique: l'ordre suivant)
Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}_+^*$ des réels strictement positifs.

Pour $p \neq 0$, on définit

$$N(p) = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Montrer que N prolongée par continuité en 0 est dérivable en 0 et calculer $N(0)$ et $N'(0)$.

Indication p. 21

Exercice 8 (◔★ Calcul de DL de réciproque: ordre 3)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective.

On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la forme

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o_{x\to 0}(x^3)$$

où $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ et $a_1 \neq 0$.

On admet que la bijection réciproque de f, f^{-1} admet un $\mathrm{DL}_3(0)$.

Déterminer en fonction de a_1, a_2, a_3 les coefficients de ce développement limité.

Indication p. 21

Exercice 9 (◔★ Développement asymptotique de l'arctangente)
Déterminer un développement asymptotique en $o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{48}}\right)$ de $\arctan$ en $+\infty$.

Indication p. 21

Exercice 10 (◔★ Perte d'ordre)
Effectuer les développements limités suivants et commenter.

1. $\mathrm{DL}_7(0)$ de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$
2. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Indication p. 21

Exercice 11 (◔☆ Attention à la parité)

1. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant pour tout $n \in \mathbb{N}$ un $\mathrm{DL}_n(0)$ pair et n'étant pas paire ?
2. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant pour un certain $m \in \mathbb{N}$ un $\mathrm{DL}_{2m}(0)$ mais pas de $\mathrm{DL}_{2m+1}(0)$?

Indication p. 22

Exercice 12 (◕★ Existence de DL de réciproque)
Soient I et J deux intervalles contenant 0 et $f : I \to J$ bijective et continue.

On suppose que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o_{x\to 0}(x^n)$$

où $a_1 \neq 0$.

Montrer que sa bijection réciproque f^{-1} admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Indication p. 22

Exercice 13 (◑★ Des DLs par récurrence)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$f_n = \underbrace{\sin \circ \sin \circ \cdots \circ \sin}_{n \text{ fois}}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet un $\mathrm{DL}_5(0)$ et le déterminer.

En déduire une expression pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $f_n^{(5)}(0)$.

Indication p. 22

Exercice 14 (◔★ Un petit calcul)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ impaires telles que $f'(0) = g'(0) = 1$.

Déterminer, si elle existe, la limite quand $x \to 0$ de

$$\frac{f(g(x)) - g(f(x))}{x^6}.$$

Indication p. 22 · Solution p. 30

Exercice 15 (◔☆ Un peu réfléchir avant de calculer: argth)
Déterminer le $\mathrm{DL}_8(0)$ de

$$x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

Indication p. 22 · Solution p. 31

Exercice 16 (◔☆ Un peu réfléchir avant de calculer: DÉS)
Déterminer le $\mathrm{DL}_8(0)$ de

$$x \mapsto \frac{1}{1+x+x^2}.$$

Indication p. 22

Exercice 17 (◔☆ Un peu réfléchir avant de calculer: calcul tronqué)
Déterminer le $\mathrm{DL}_{48}(0)$ de

$$x \mapsto \ln\left(\sum_{k=0}^{47} \frac{x^k}{k!}\right).$$

Indication p. 22

Exercice 18 (◔☆ Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

À l'aide de la DÉS de $\frac{1}{1-X^n}$ et de DLs, redémontrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{n}\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \not\equiv 0 \bmod n \\ 1 & \text{si } k \equiv 0 \bmod n. \end{cases}$$

Indication p. 22

Exercice 19 (◔☆ Calcul de DL pour calcul de dérivée)
Déterminer

$$\left(\underbrace{\tan \times \tan \times \cdots \times \tan}_{48 \text{ fois}}\right)^{\overbrace{\prime\cdots\prime}^{48 \text{ fois}}}(0).$$

Indication p. 22

Exercice 20 (◑☆ Peut aussi se faire par récurrence)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall p \in [\![0,n]\!], \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in [\![0,n-1]\!] \\ n! & \text{si } p = n. \end{cases}$$

On pourra étudier le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto (e^x-1)^n$.

Indication p. 22

Exercice 21 (◔★ Le début de l'étude de la série harmonique)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et

$$u_n = H_n - \ln(n).$$

1. Effectuer un DA en $+\infty$ de $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Indication p. 23

Exercice 22 (◔★♠ DL des fonctions trigonométriques réciproques)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o_{x\to 0}(x^{2n+1}).$$

Que dire du $\mathrm{DL}_n(0)$ de arccos ?

Indication p. 23

Exercice 23 (◔☆ Un cas très particulier d'approximant de Padé)
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = O_{x\to 0}(x^6).$$

Indication p. 23

Relations de comparaisons

Exercice 24 (◔★♣ Obtention d'équivalent par encadrement)
Soient $f, g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que **si**, au voisinage de a,

$$g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$$

et

$$g_1(x) \sim_{x\to a} g_2(x)$$

alors

$$f(x) \sim_{x\to a} g_1(x).$$

Indication p. 23

Exercice 25 (◔★♣ Équivalents et composition)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ ne s'annulant pas au voisinage de a.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que

$$\Big(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)\Big) \Leftrightarrow \Big((f(x))^\alpha \underset{x\to a}{\sim} (g(x))^\alpha\Big).$$

2. Donner un exemple de fonctions f et g telles que

$$\Big(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)\Big) \text{ et } \Big(\exp(f(x)) \underset{x\to a}{\nsim} \exp(g(x))\Big)$$

et de fonctions f et g strictement positives telles que

$$\Big(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)\Big) \text{ et } \Big(\ln(f(x)) \underset{x\to a}{\nsim} \ln(g(x))\Big)$$

3. Montrer que

$$(f(x) = g(x) + o_{x\to a}(1)) \Leftrightarrow \Big(\exp(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \exp(g(x))\Big)$$

et que

$$\Big(f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)\Big) \Leftrightarrow (\ln(f(x)) = \ln(g(x)) + o_{x\to a}(1)).$$

4. Commenter.

Indication p. 23

Exercice 26 (◔☆ Conjecturer puis démontrer: signes et DLs)

1. Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $x \mapsto e^x \sin(x)$. Que peut-on conjecturer sur le signe des coefficients ?
2. Démontrer la conjecture précédente.
3. Déterminer le $\mathrm{DL}_4(\frac{\pi}{4})$ de tan. Que peut-on conjecturer sur le signe des coefficients ?
4. Démontrer la conjecture précédente.

Indication p. 23

Exercice 27 (◔★ De la place entre les deux)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$.

On suppose $f(x) = o_{x\to a}(g(x))$.

Montrer qu'il existe $h : I \to \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = o_{x\to a}(h(x)), h(x) = o_{x\to a}(g(x)).$$

Indication p. 23

Exercice 28 (◑☆ Majoration d'une famille de fonctions)

1. Soient $(f_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ une famille de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $g : I \to \mathbb{K}$ telle que
$$\forall k \in [\![1, n]\!], f_k(x) = o_{x\to a}(g(x)).$$
2. Soient $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $g : I \to \mathbb{K}$ telle que
$$\forall k \in \mathbb{N}, f_k(x) = o_{x\to a}(g(x)).$$

Indication p. 23

Exercice 29 (◔☆ Toujours de la place: cas particuliers)

1. Déterminer une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = o_{x\to 0}(1)$$

et

$$\forall \alpha > 0, x^\alpha = o_{x\to 0^+}(f(x)).$$

2. Déterminer une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall \alpha > 0, x^\alpha = o_{x\to +\infty}(g(x))$$

et

$$\forall \lambda > 0, g(x) = o_{x\to +\infty}\left(e^{\lambda x}\right).$$

Indication p. 24

Exercice 30 (◑★ Autonomie: une étude de signe)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Montrer que pour x assez grand,

$$x\cos(x)^2 + \sin^2(x) - \alpha \sin(x)\cos(x) \geq 0.$$

Indication p. 24 · Solution p. 31

Exercice 31 (◑☆ Un contre-exemple parmi d'autres)
Soit $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. On définit:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x\cos(x)^2 + \sin(x)^2)e^{u(x)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x}e^{u(x)}. \end{aligned}$$

Montrer que

1. les fonctions ne sont pas comparables pour la relation O en $+\infty$ c'est à dire

$$\neg(f(x) = O_{x\to+\infty}(g(x))) \text{ et } \neg(g(x) = O_{x\to+\infty}(f(x)))$$

2. il existe un choix de fonction u tel que les deux fonctions sont strictement croissantes et tendent vers $+\infty$.

Indication p. 24 · Solution p. 35

Retour sur les développements asymptotiques de suites et fonctions

Exercice 32 (◔★ Pour vérifier que la méthode est acquise)

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ l'équation

$$x^5 + nx - 1 = 0$$

admet une unique solution que l'on note x_n.

2. Déterminer un développement asymptotique à trois termes non nuls de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

Indication p. 24

Exercice 33 (◑★ Le grand classique de $\tan(x) = x$)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation

$$\tan(x) = x$$

admet une unique solution dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

On note x_n cette solution.

2. Déterminer un développement asymptotique en $o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 24

Exercice 34 (◑☆ La somme est essentiellement le plus grand terme)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$u_{n-1} = o_{n\to+\infty}\left(\frac{u_n}{n^\alpha}\right).$$

Montrer que

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \sim_{n\to+\infty} u_n.$$

Indication p. 24

Exercice 35 (◑★ Développement asymptotique de la fonction de Lambert)
Montrer que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto xe^x \end{aligned}$$

est bijective.

On note W sa bijection réciproque.

Déterminer un développement asymptotique en $o_{x\to+\infty}(1)$ de W en $+\infty$.

Indication p. 24

Exercice 36 (◔★ Équivalents de sommes)
Donner un équivalent simple des sommes suivantes lorsque $n \to +\infty$

1. Pour $q \in \mathbb{C}$ (en distinguant les cas),

$$\sum_{k=0}^{n} q^k.$$

2.

$$\sum_{k=0}^{n} k!$$

3. Pour $\alpha > -1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha.$$

Indication p. 25

Exercice 37 (◔★ Sinus itérés)
Soit $u_0 \in [0,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \sin(u_n). \end{aligned}$$

1. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Déterminer un équivalent simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 25

Exercice 38 (◔★ Équation implicite non polynômiale)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation

$$e^x + x = n$$

admet une unique solution. On note x_n cette solution.

2. Déterminer un développement asymptotique à deux termes non nuls de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 25

Exercice 39 (◑★ Un cas particulier de méthode de Newton: l'algorithme babylonien)
Soit $a > 0$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = a$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$$

1. Montrer que la suite est bien définie et que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a}$.

2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\left(u_n - \sqrt{a}\right) = O_{n\to+\infty}(\alpha^{2^n}).$$

Indication p. 25

Exercice 40 (◑☆ Développements asymptotiques de suites récurrentes: des cas non bornés)
Soit $u_0 > 0$.

Déterminer un développement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = u_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

pour les fonctions f suivantes:

1. $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$

2. $f : x \mapsto x + e^{-x}$

3. $f : x \mapsto x + \frac{1}{\ln(1+x)}$

Indication p. 25 · Solution p. 36

Exercice 41 (◑★ Limites et polynômes)
Dans chacun des cas montrer que l'équation admet pour tout $\alpha > 0$ assez petit une unique solution positive et déterminer un développement asymptotique simple à deux termes non nuls de cette solution.

1. $$x^3 + \alpha x^2 - 1 = 0,$$

2. $$\alpha x^7 + \alpha^2 x^6 - \alpha x^4 - 1 = 0,$$

3. $$x^3 - (3-\alpha)x^2 + 3x - (1-\alpha) = 0.$$

Indication p. 25

Exercice 42 (◔★ Un exemple de récurrence non autonome)
Déterminer un développement asymptotique en $o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}.$$

Indication p. 25

Exercice 43 (◑★ Encore des équations implicites)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation

$$x^n + x - 1 = 0$$

admet une unique solution positive et donner un développement asymptotique à deux termes de cette solution quand $n \to +\infty$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k - 1 = 0$$

admet une unique solution positive et donner un développement asymptotique à deux termes de cette solution quand $n \to +\infty$.

3. Montrer que pour tout $n \geq 3$ l'équation

$$e^x = nx$$

admet deux solutions et donner un développement asymptotique à deux termes de ces solutions quand $n \to +\infty$.

Indication p. 26 · Solution p. 44

Exercice 44 (◑★ Équivalent d'un maximum)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x(\cos(x))^n$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n admet un maximum et que ce maximum est atteint en un unique point que l'on note x_n.
2. Déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \to +\infty$.
3. Déterminer un équivalent de $f_n(x_n)$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Déterminer un développement asymptotique à deux termes non nuls de x_n lorsque $n \to +\infty$.

Indication p. 26 · Solution p. 46

Exercice 45 (◑★ Un cas classique d'équivalent de suites récurrentes)
On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, $f : I \to I$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et qu'il existe $k > 1$ et $a_k > 0$ tels que

$$f(x) = x - a_k x^k + o_{x\to 0}\left(x^k\right).$$

Montrer que

$$u_n = \gamma\, n^{-\frac{1}{k-1}} + o_{n\to+\infty}\left(n^{-\frac{1}{k-1}}\right)$$

où

$$\gamma = ((k-1)a_k)^{-\frac{1}{k-1}}.$$

Indication p. 26 · Solution p. 50

Exercice 46 (◕★ Suites récurrentes: le cas vraiment général)
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in]0,1]$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose de plus que:
(i) $f \in \mathcal{C}^1([0,1],[0,1])$
(ii) $f(x) = x + o_{x\to 0}(x)$
(iii) $\forall x \in]0,1], 0 < f(x) < x$

On note $F \in \mathcal{C}^2(]0,1],\mathbb{R})$ une primitive de $x \mapsto \frac{1}{f(x)-x}$.

Montrer que

$$F(u_n) \sim n.$$

Indication p. 26

Exercice 47 (◕☆ Le terme d'après si vous avez le courage)
On reprend les notations de l'exercice 45.

On suppose de plus qu'il existe $a_k > 0$, $a_{2k-1} \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = x - \left(a_k x^k + a_{2k-1}x^{2k-1} + o_{x\to 0}\left(x^{2k-1}\right)\right).$$

Montrer qu'il existe γ_1 et γ_2 deux réels tels que

$$u_n = \gamma_1 n^{-\frac{1}{k-1}} - \gamma_2 n^{-\frac{k}{k-1}} \ln(n) + o_{n\to+\infty}\left(n^{-\frac{k}{k-1}}\ln(n)\right)$$

Indication p. 26 · Solution p. 51

Exercice 48 (◑☆ Une dernière suite récurrente pour la route)
On pose

$$f : x \mapsto \begin{cases} x\left(1 - x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Indication p. 26

Vers les développements en série entières

Exercice 49 (◑☆ Nullité des dérivées et nullité de la fonction)

1. Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f \neq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

On considère désormais une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

On suppose de plus qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq \frac{1}{R^n}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = 0$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Indication p. 27

Exercice 50 (◔★ Fonction génératrice usuelle)

À l'aide de l'exercice 5 montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n.$$

Indication p. 27

Exercice 51 (◑★ Nombres de Catalan par les DLs)
On considère la fonction

$$f :]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$,
$$f(x) = 1 + xf(x)^2.$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.
3. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que
$$c_0 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}.$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Indication p. 27

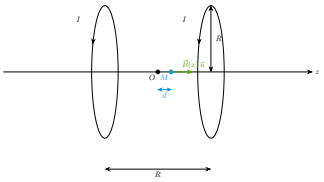
Exercice 52 (◑★ Utilisation en algèbre des séries entières)
Soit $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ une $\mathbb{C}$-algèbre et $u \in \mathcal{A}$ un élément nilpotent.

1. Montrer que $1 + u$ est inversible c'est à dire qu'il existe $v \in \mathcal{A}$ tel que $(1 + u)v = v(1 + u) = 1$.
2. Montrer que $1 + u$ est un carré c'est à dire qu'il existe $v \in \mathcal{A}$ tel que $1 + u = v^2$.

Indication p. 27 · Solution p. 52

Un peu de physique

Exercice 53 (◑★□ Bobines de Helmholtz)



On considère deux bobines circulaires parallèles de rayons R situées à une distance R et parcourues par un courant I dans le même sens.

On considère un point M sur l'axe des bobines et à une distance d du centre du système.

On pose $x = \frac{d}{R}$.

On admet (cf physique) que le champ magnétique total au point M est

$$\vec{B} = B(x)\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire et

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\left(1+\left(\frac{1}{2}+x\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(1+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right).$$

1. Déterminer un $\mathrm{DL}_4(0)$ de B.

Indication p. 27

Exercice 54 (◑★□ Formule de Borda)
On considère un pendule de masse m et de longueur ℓ dans un champ de pesanteur uniforme g.

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

Le pendule a pour angle initial θ_0 et une vitesse angulaire initiale nulle.

On admet (cf physique) que le mouvement est périodique de période

$$T(\theta_0) = \frac{2\pi}{\omega_0} \times \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\left(\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)^2 \sin(\theta)^2}}$$

1. Montrer que

$$T(\theta_0) = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1+\frac{\theta_0^2}{16}+o_{\theta_0\to 0}(\theta_0^2)\right).$$

Indication p. 27

Exercice 55 (◑★□ Développement dipolaire)
On considère une répartition finie de charges $(A_i, q_i)_{i\in I}$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

Pour tout $i \in I$, on pose $\overrightarrow{OA_i} = \vec{a_i}$.

Étant donné un vecteur unitaire $\vec{u}$ et $r > 0$ on admet que le potentiel au point M tel que $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$ (si M distincts des A_i)

$$V(\vec{u}, r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i\in I} \frac{1}{r\sqrt{1 - 2\frac{\vec{a_i}\cdot\vec{u}}{r} + \frac{\|\vec{a_i}\|^2}{r^2}}}.$$

1. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}$ et $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$V(\vec{u}, r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{u}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + o_{r\to+\infty}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Indication p. 27

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Un contre-exemple)
Le DL est juste par croissance comparée $0 + o_{x\to 0}(x^n)$.

Constater que f est dérivable mais que f' n'est même pas continue.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Tangentes)
Cf cours. Il y a de nombreuses méthodes:

- Utiliser T-Y…
- Utiliser $\frac{\sin}{\cos}$…
- Utiliser la réciproque de arctan.
- Utiliser $\tan' = 1 + \tan^2$ et bootstrapper.
- Utiliser $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}(1+\cos(2\cdot))}$ et primitiver
- Utiliser $\tan(x) = \frac{1}{i}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}} = \frac{1}{i}\frac{1-e^{-2ix}}{1+e^{-2ix}} = \frac{1}{i}\left(1 - \frac{2}{1+e^{-2ix}}\right)$.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Pour le calcul numérique)
Déjà fait.

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Et le cas complexe ?)
Par exemple travailler sur le module et un argument.

Solution p. 29

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Un DL qui devrait être usuel)
Remarquer que $\frac{1}{\sqrt{u}} = u^{-\frac{1}{2}}$…

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Des calculs explicites)
Calculs.

Indication 7 · Énoncé p. 3 (Convergence vers moyenne géométrique: l'ordre suivant)
Faire un DL (en partant à l'ordre 2 à l'intérieur).

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Calcul de DL de réciproque: ordre 3)
Écrire $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$ et composer les DLs.

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Développement asymptotique de l'arctangente)
Pour $x > 0$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Indication 10 · Énoncé p. 4 (Perte d'ordre)
On remarque que la division par x nécessite de partir avec un ordre plus élevé que le résultat souhaité.

Indication 11 · Énoncé p. 4 (Attention à la parité)
1. $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $x \mapsto x^3 \cos(x^{-2})$

Indication 12 · Énoncé p. 5 (Existence de DL de réciproque)
Traiter d'abord l'ordre 0 et 1 en utilisant le cours.

Pour la suite raisonner par exemple par analyse-synthèse sur les coefficients à l'aide de $f^{-1} \circ f$ ou bien par bootstrap à l'aide de $f \circ f^{-1}$.

Indication 13 · Énoncé p. 5 (Des DLs par récurrence)
Par récurrence sur n, comme pour tout n, $f_{n+1} = f_n \circ \sin$ on obtient que f_n admet un $\mathrm{DL}_5(0)$ et surtout une expression du DL de f_{n+1} en fonction de celui de f_n.

Indication 14 · Énoncé p. 5 (Un petit calcul)
Faire un DL6.

Solution p. 30

Indication 15 · Énoncé p. 5 (Un peu réfléchir avant de calculer: argth)
Simplifier $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$.

Ou bien remarquer qu'il s'agit de primitiver $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

Solution p. 31

Indication 16 · Énoncé p. 6 (Un peu réfléchir avant de calculer: DÉS)
DÉS.

Indication 17 · Énoncé p. 6 (Un peu réfléchir avant de calculer: calcul tronqué)
Remarquer que $\sum_{k=0}^{47} \frac{x^k}{k!} = e^x - \frac{x^{48}}{48!} + o_{x\to 0}(x^{48})$.

Indication 18 · Énoncé p. 6 (Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué)
Effectuer la DÉS, et des DLs des deux expressions. Identifier.

Indication 19 · Énoncé p. 6 (Calcul de DL pour calcul de dérivée)
Faire un $\mathrm{DL}_{48}(0)$ de tan.

Indication 20 · Énoncé p. 6 (Peut aussi se faire par récurrence)
Remarquer que d'un côté

$$(e^x - 1)^n = x^n + o_{x\to 0}(x^n)$$

et de l'autre

$$(e^x-1)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{p=0}^{n}\frac{k^p x^p}{p!}+o_{x\to 0}(x^n).$$

Indication 21 · Énoncé p. 7 (Le début de l'étude de la série harmonique)
Remarquer que si $v_n=O_{n\to+\infty}(n^{-2})$ alors $\sum_{k=1}^{n}v_k$ converge.

Indication 22 · Énoncé p. 7 (DL des fonctions trigonométriques réciproques)
Faire le $\mathrm{DL}_{2n-1}(0)$ de $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis primitiver.

Et $\arccos=\frac{\pi}{2}-\arcsin$.

Indication 23 · Énoncé p. 7 (Un cas très particulier d'approximant de Padé)
Faire un DL et regarder les conditions sur a et b pour annuler les termes d'ordre 2 et 4. On obtient $(a,b)=\left(-\frac{5}{12},\frac{1}{12}\right)$.

Indication 24 · Énoncé p. 8 (Obtention d'équivalent par encadrement)
Gendarmes.

Indication 25 · Énoncé p. 8 (Équivalents et composition)
Revenir à la définition.

Indication 26 · Énoncé p. 9 (Conjecturer puis démontrer: signes et DLs)

1. On obtient

$$e^x\sin(x)=0+x+x^2+\frac{1}{3}x^3+0x^4-\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{90}x^6-\frac{1}{630}x^7+0x^8+\frac{1}{22680}x^9+o_{x\to0}(x^9).$$

On conjecture que les coefficients sont de signes $0,+,+,+,0,-,-,-,0,+,+,+,+,+,0,-,-,-,....$

2. Remarquer que $e^x\sin(x)=\mathrm{Im}\left(e^{(1+i)x}\right)$ et que $(1+i)^n=\sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

3. On obtient

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)=1+2h+2h^2+\frac{8}{3}h^3+\frac{10}{3}h^4+\frac{64}{15}h^5+o_{h\to0}(h^5).$$

On conjecture que tous les coefficients sont positifs.

4. Par récurrence. Pour l'hypothèse de récurrence prendre par exemple:
- ▷ Il existe P_n à coefficients positifs tel que $\tan^{(n)}=P_n(\tan)$ (et dans l'hérédité $P_{n+1}=(1+X^2)P_n'$)
- ▷ Il existe $a_0,...,a_n$ positifs tels que $\tan(\frac{\pi}{4}+h)=\sum_{k=0}^{n}a_k h^k$ (et dans l'hérédité $\tan'=1+\tan^2$ et intégrer).

Indication 27 · Énoncé p. 9 (De la place entre les deux)
Par exemple une moyenne géométrique.

Indication 28 · Énoncé p. 9 (Majoration d'une famille de fonctions)

1. Déterminer F tel que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $f_k\leq F$.

2. De même par un argument diagonal.

Indication 29 · Énoncé p. 10 (Toujours de la place: cas particuliers)
1. $\frac{1}{\ln}$
2. $\exp \circ \sqrt{\cdot}$

Indication 30 · Énoncé p. 10 (Autonomie: une étude de signe)
Plusieurs options:
- ▷ Astucieusement en remarquant un trinôme.
- ▷ De manière plus robuste en étudiant pour $\cos(x)$ proche de 0 ou $\cos(x)$ loin de 0.

Solution p. 31

Indication 31 · Énoncé p. 10 (Un contre-exemple parmi d'autres)
1. Faire le quotient.
2. Dériver et se convaincre qu'une CS de stricte monotonie est $(xu'(x)+1)u'(x) \geq 4(x-1)^2$. Une fois la stricte monotonie obtenue, on récupère facilement la condition de limite quitte à très légèrement modifier u.

Solution p. 35

Indication 32 · Énoncé p. 11 (Pour vérifier que la méthode est acquise)
1. Th. Bij. Mon.
2. Par exemple montrer que x_n est borné puis bootstrapper en écrivant $x_n = \frac{1}{n}(1-x_n^5)$.

Indication 33 · Énoncé p. 11 (Le grand classique de $\tan(x) = x$)
1. Bijection continue monotone.
2. $x_n \sim n\pi$, écrire l'équation avec une arctan et « bootstrapper ».

Indication 34 · Énoncé p. 11 (La somme est essentiellement le plus grand terme)
Commencer par traiter l'exercice 36

Remarquer qu'à p entier fixé on peut découper pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en

$$u_n\left(1+\sum_{k=n-p}^{n-1}\frac{u_k}{u_n}+\sum_{k=0}^{n-p-1}\frac{u_k}{u_n}\right)$$

et faire une preuve à la Cesàro pour p bien choisi $p\alpha > 1$.

Indication 35 · Énoncé p. 12 (Développement asymptotique de la fonction de Lambert)
Plusieurs façons de procéder, par exemple écrire $W(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis bootstrapper $W(x) + \ln(W(x)) = \ln(x)$.

Indication 36 · Énoncé p. 12 (Équivalents de sommes)
1. Somme géométrique donc explicite.
2. Isoler les deux derniers termes.
3. Encadrer à l'aide d'intégrales.

Indication 37 · Énoncé p. 12 (Sinus itérés)
1. Montrer que $[0,1]$ est stable par sin, puis que la suite est décroissante, etc.
2. Considérer la suite auxiliaire

$$v_n = \frac{3}{u_{n+1}^2} - \frac{3}{u_n^2}$$

déterminer sa limite éventuelle et conclure par Cesàro.

On obtient finalement

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Indication 38 · Énoncé p. 13 (Équation implicite non polynômiale)
1. Bijection monotone.
2. Sans surprise bootstrapper. Pour commencer constater que $x_n \to +\infty$.

Indication 39 · Énoncé p. 13 (Un cas particulier de méthode de Newton: l'algorithme babylonien)
1. Méthode du cours.
2. Considérer par exemple la suite auxiliaire

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

L'exercice a déjà été traité dans le TD sur les limites de suites.

Indication 40 · Énoncé p. 13 (Développements asymptotiques de suites récurrentes: des cas non bornés)
Cf la méthode vue en cours et DM.

Solution p. 36

Indication 41 · Énoncé p. 14 (Limites et polynômes)
Cf la méthode vue en cours et DM.

Indication 42 · Énoncé p. 14 (Un exemple de récurrence non autonome)
Bootstrapper en commençant par montrer que $u_n \sim n$.

Indication 43 · Énoncé p. 14 (Encore des équations implicites)
Toujours la même méthodologie: étude de fonction pour existence et unicité puis trouver des bornes, puis bootstrapper pour trouver un développement asymptotique.

Solution p. 44

Indication 44 · Énoncé p. 15 (Équivalent d'un maximum)
TBA + calcul de dérivée + bootstrap sur l'équation $\cos(x) - nx\sin(x) = 0$.

Solution p. 46

Indication 45 · Énoncé p. 15 (Un cas classique d'équivalent de suites récurrentes)
Trouver une suite auxiliaire bien choisie pour faire un Cesàro.

Solution p. 50

Indication 46 · Énoncé p. 16 (Suites récurrentes: le cas vraiment général)
Quelques étapes:

- ▷ Vérifier classiquement la bonne définition et la convergence vers 0.
- ▷ Montrer par exemple par des accroissements finis judicieux que

$$F(u_{n+1}) - F(u_n) \to 1.$$

- ▷ Cesàro.

Indication 47 · Énoncé p. 16 (Le terme d'après si vous avez le courage)
Bootstrapper l'ordre suivant.

On pourra utiliser la version de Cesàro pondéré suivante (sera un cas particulier du théorème de sommation des relations de comparaison cas **divergent** de spé):

«Si $t_n \sim \frac{1}{n}$ alors $\sum_{k=1}^{n} t_k \sim \ln(n)$.»

Sauf erreur de calcul de ma part on obtient

$$\gamma_1 = (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}}$$
$$\gamma_2 = (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}}\left(\frac{a_{2k-1}}{((k-1)a_k)^2} + \frac{k}{2(k-1)^2}\right).$$

Solution p. 51

Indication 48 · Énoncé p. 16 (Une dernière suite récurrente pour la route)
Toujours l'idée de poser une suite auxiliaire et Cesàro.

Ici une suite auxiliaire possible est $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{u_n^2}}$, on obtient

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{\ln(2n)}}.$$

Indication 49 · Énoncé p. 17 (Nullité des dérivées et nullité de la fonction)

1. Par exemple un des fameux contre-exemples à la $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$.
2. Écrire Taylor-reste-intégral ou juste l'inégalité de Taylor pour tout $n \in \mathbb{N}$ et faire $n \to +\infty$.
3. Translater.

Indication 50 · Énoncé p. 17 (Fonction génératrice usuelle)
Écrire $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{1-x}$.

Indication 51 · Énoncé p. 18 (Nombres de Catalan par les DLs)

1. Calcul.
2. Deux possibilités:
   - ▹ Utiliser la relation fonctionnelle et une récurrence.
   - ▹ Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et les DLs usuels.
3. Constater qu'un des deux termes (la relation de récurrence ou la formule avec les coefficients binomiaux) correspond à une explicitation de la méthode que vous avez choisie pour la question précédente.

   L'autre terme correspond à l'autre méthode.

Indication 52 · Énoncé p. 18 (Utilisation en algèbre des séries entières)
Chercher même $v \in \mathbb{C}[u]$ c'est à dire comme un polynôme en u.

Pour «deviner» le polynôme faire un DL.

Pour vérifier faire des DLs de polynômes puis l'unicité.

Solution p. 52

Indication 53 · Énoncé p. 19 (Bobines de Helmholtz)
Prendre son courage et faire le calcul !

Indication 54 · Énoncé p. 19 (Formule de Borda)
Cela revient à faire le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction de Jacobi

$$K : [0,1[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin(\theta)^2}}$$

pour cela plutôt qu'utiliser les théorèmes usuels expliciter des majorations.

Indication 55 · Énoncé p. 20 (Développement dipolaire)
Encore un DL, on obtient pour Q la charge totale

$$Q = \sum_{i \in I} q_i$$

et pour $\vec{p}$ le moment dipolaire

$$\vec{p} = \sum_{i \in I} q_i \vec{a_i}$$

Solutions

Solution pour l'exercice 4 · Énoncé p. 3 · Indication p. 21 (Et le cas complexe ?)
Posons pour $n \in \mathbb{N}$

$$z_n = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

ainsi que $\lambda_x = \mathrm{Re}(\lambda)$ et $\lambda_y = \mathrm{Im}(\lambda)$.

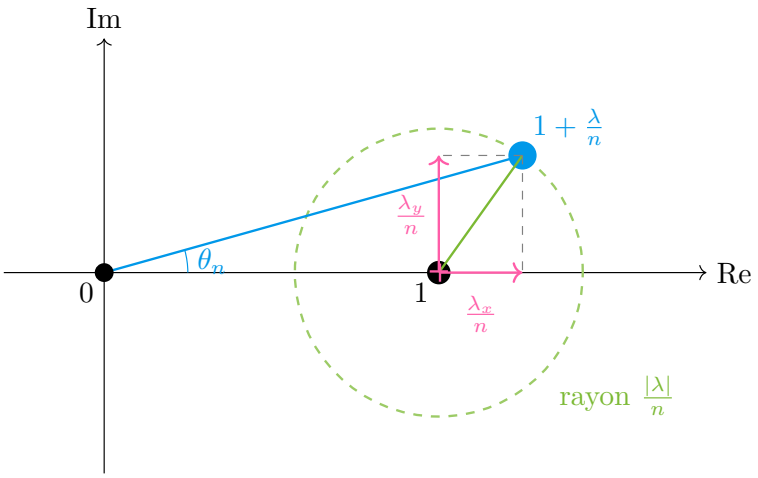
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|z_n| = \sqrt{|z_n|^2} &= \left(\left(1 + \frac{\lambda_x}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_y}{n}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(\left(1 + \frac{\lambda_x}{n}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_y}{n}\right)^2\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{2\lambda_x}{n} + \frac{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}{n^2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{n}{2}\left(\frac{2\lambda_x}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \exp(\lambda_x + o_{n\to+\infty}(1)) \\
&= e^{\lambda_x}(1 + o_{n\to+\infty}(1)) \\
&= e^{\lambda_x} + o_{n\to+\infty}(1)
\end{aligned}$$

et donc on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = e^{\mathrm{Re}(\lambda)} = |e^{\lambda}\ |.$$

De même, comme $\frac{\lambda}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$, pour n assez grand $\mathrm{Re}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right) > 0$



et donc

$$\arg\left(1+\frac{\lambda}{n}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\lambda_y}{n}}{1+\frac{\lambda_x}{n}}\right) = \arctan\left(\frac{\lambda_y}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\lambda_y}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où on peut écrire, pour n assez grand,

$$z_n = |z_n|e^{i\theta_n}$$

avec

$$\theta_n = n\arg\left(1+\frac{\lambda}{n}\right) = \lambda_y + o_{n\to+\infty}(1).$$

Donc $\theta_n \to \mathrm{Im}(\lambda)$ quand $n \to +\infty$.

On a donc pour n assez grand $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ avec $\rho_n \to e^{\mathrm{Re}(\lambda)}$ et $\theta_n \to \mathrm{Im}(\lambda)$, d'où (continuité de exp)

$$\boxed{z_n \to e^{\mathrm{Re}(\lambda)}e^{i\,\mathrm{Im}(\lambda)} = e^{\lambda}}.$$

Remarque: dans le calcul de l'argument de $x+iy$ on a d'abord localisé le point pour utiliser $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ mais on pourrait aussi juste vérifier qu'il ne s'agit pas d'un réel négatif et utiliser la formule de l'angle moitié $2\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$.

Solution pour l'exercice 14 · Énoncé p. 5 · Indication p. 22 (Un petit calcul)
Comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ elle admettent par Taylor-Young un $\mathrm{DL}_6(0)$.

De l'imparité les termes d'ordres pairs sont nuls et de $f'(0) = g'(0) = 1$ on déduit que les termes d'ordre 1 est 1.

Par conséquent il existe $a_3, a_5 \in \mathbb{R}$ et $b_3, b_5 \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = x + a_3x^3 + a_5x^5 + o_{x\to0}(x^6)$$
$$g(x) = x + b_3x^3 + b_5x^5 + o_{x\to0}(x^6).$$

Calculons par composée le $\mathrm{DL}_6(0)$ de $f\circ g$, celui de $g\circ f$ s'en déduisant par symétrie.

On a au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (x+b_3x^3+b_5x^5) + a_3(x+b_3x^3+b_5x^5)^3 + a_5(x+b_3x^3+b_5x^5)^5 + o_{x\to0}(x^6) \\ &= x + (b_3+a_3)x^3 + (b_5+3a_3b_3+a_5)x^5 + o_{x\to0}(x^6). \end{aligned}$$

Par symétrie on a de même

$$g(f(x)) = x + (a_3+b_3)x^3 + (a_5+3a_3b_3+b_5)x^5 + o_{x\to0}(x^6).$$

Et donc

$$f(g(x)) - g(f(x)) = o_{x\to0}(x^6)$$

c'est à dire

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{f(g(x))-g(f(x))}{x^6} = 0.}$$

Remarques:

- ▹ Cet exercice est souvent posé avec des fonctions explicites par exemple sin, tan, sh, th, arctan, etc.
- ▹ L'annulation issue de la symétrie s'arrête dès l'ordre suivant.

  En effet le terme d'ordre 7 dans le $\mathrm{DL}_7(0)$ de $f \circ g$ est

  $$b_7 + a_3(3b_3^2 + 3b_5) + 5a_5b_3 + a_7$$

  ce qui est différent de

  $$a_7 + b_3(3a_3^2 + 3a_5) + 5b_5a_3 + b_7.$$

Solution pour l'exercice 15 · Énoncé p. 5 · Indication p. 22 (Un peu réfléchir avant de calculer: argth)
On a pour x au voisinage de 0, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par simplification et DL de la partie impaire de $x \mapsto \ln(1+x)$

$$\begin{aligned}\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) &= \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \delta_{k \text{ impair}}\ (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o_{x\to 0}(x^n)\end{aligned}$$

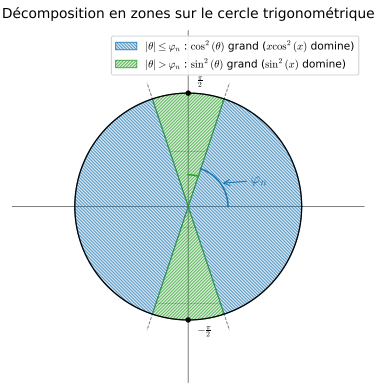
et en particulier on a

$$\boxed{\left(\ln\left(\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}\right)\right) = x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + \tfrac{x^7}{7} + o_{x\to 0}(x^8).}$$

Solution pour l'exercice 30 · Énoncé p. 10 · Indication p. 24 (Autonomie: une étude de signe)
Posons pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x\cos^2(x) + \sin^2(x) - \alpha\sin(x)\cos(x).$$

- ▹ **Méthode 1**:



L'idée est de formaliser l'intuition suivante: «Quand $\cos(x)$ est loin de 0 alors $x\cos^2(x)$ est le plus grand terme, et quand $\cos(x)$ proche de 0 alors $\sin^2(x)$ est le plus grand terme».

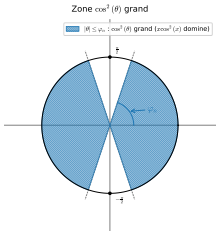
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

On a

$$f(n\pi + \theta) = (n\pi + \theta)\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) - \alpha\sin(\theta)\cos(\theta).$$

Alors selon la valeur de θ c'est le terme en $\cos^2(\theta)$ qui est prédominant ou celui en $\sin^2(\theta)$.

▷ **Pour θ «loin» de $\pm\frac{\pi}{2}$**



En particulier, comme $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} f(n\pi + \theta) &\geq \left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\cos^2(\theta) - \alpha\sin(\theta)\cos(\theta) \\ &= \cos^2(\theta)\left(n\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\tan(\theta)\right). \end{aligned}$$

Posons

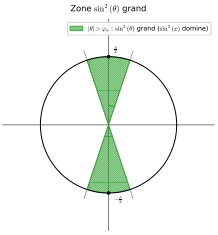
$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{n\pi - \frac{\pi}{2}}{\alpha}\right).$$

Alors par croissance de la fonction tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, pour tout $\theta \in [-\varphi_n, \varphi_n]$ on a $f(n\pi + \theta) \geq 0$.

Ainsi

$$\forall n \geq 1, \forall \theta \in [-\varphi_n, \varphi_n], f(n\pi + \theta) \geq 0.$$

▷ **Pour θ «proche» de $\pm\frac{\pi}{2}$**



Supposons désormais que $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, -\varphi_n[\cup]\varphi_n, \frac{\pi}{2}]$.

Alors, si $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ on a $f(n\pi+\theta) = 1$ et sinon

$$\begin{aligned} f(n\pi+\theta) &\geq \sin^2(\theta) - \alpha\sin(\theta)\cos(\theta) \\ &= \sin^2(\theta)\left(1 - \frac{\alpha}{\tan(\theta)}\right). \end{aligned}$$

et

$$|\tan(\theta)| \geq \tan(\varphi_n) = \frac{n\pi - \frac{\pi}{2}}{\alpha}$$

d'où

$$f(n\pi+\theta) \geq \sin^2(\theta)\left(1 - \frac{\alpha^2}{n\pi - \frac{\pi}{2}}\right).$$

Et en particulier pour n assez grand <u>indépendamment de</u> θ $f(n\pi+\theta) \geq 0$.

Plus précisément posons, par exemple, $N_\alpha = 2\lceil\frac{\alpha^2}{\pi}\rceil$ alors,

$$\forall n \geq N_\alpha, \forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\phi_n[\cup]\phi_n, \frac{\pi}{2}\right], f(n\pi+\theta) \geq 0.$$

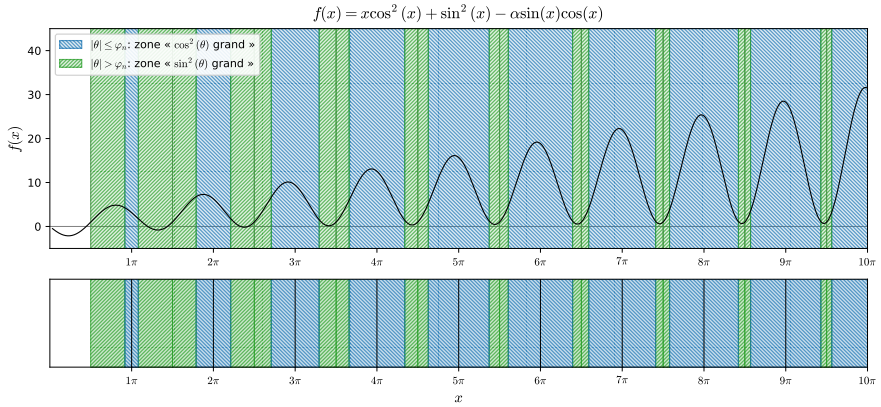
On en déduit donc que

$$\forall n \geq N_\alpha, \forall\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f(n\pi+\theta) \geq 0$$

et donc

$$\forall x \geq N_\alpha\pi - \frac{\pi}{2}, f(x) \geq 0.$$

D'où on a bien $\boxed{f \text{ positive au voisinage de } +\infty}$



▷ **Méthode 2**:

L'idée est d'utiliser la structure quadratique en $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Il y a ensuite plein de variantes qui sont équivalentes.

▷ **Méthode 2.A**: par trinôme.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. On rappelle que si $b^2 - 4ac \leq 0$ alors $@^2 + bt + c \geq 0$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, **si** $\cos(x) = 0$ alors $f(x) = \sin^2(x) \geq 0$, et **sinon**

$$f(x) = \cos(x)^2(x - \alpha\tan(x) + \tan(x)^2)$$

Or pour x assez grand on a

$$(-\alpha)^2 - 4x \leq 0$$

et donc $f(x) \geq 0$.

▷ **Méthode 2.B**: par forme canonique.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x\cos^2(x) + \sin(x)^2 - \alpha\sin(x)\cos(x) \\ &= \left(\sqrt{x}\cos(x) - \frac{\alpha}{2\sqrt{x}}\sin(x)\right)^2 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{4x}\right)\sin^2(x), \end{aligned}$$

qui est donc positif pour x assez grand.

▷ **Méthode 2.C**: par inégalité $|ab| \leq \eta a^2 + \frac{1}{4\eta}b^2$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $\eta > 0$,

$$|\cos(x)\sin(x)| \leq \eta\sin(x)^2 + \frac{1}{4\eta}\cos(x)^2$$

et donc

$$\begin{aligned} f(x) &\geq x\cos(x)^2 + \sin(x)^2 - \alpha\left(\eta\sin(x)^2 + \frac{1}{4\eta}\cos(x)^2\right) \\ &= \left(x - \frac{\alpha}{4\eta}\right)\cos(x)^2 + (1 - \alpha\eta)\sin(x)^2. \end{aligned}$$

et donc pour $\eta \leq \frac{1}{\alpha}$ et x assez grand, $f(x) \geq 0$.

Remarques: ces deux méthodes utilisent des idées très différentes mais toutes les deux importantes:

- ▷ La première illustre l'idée de différentes «zones» de prédominance des différents termes, selon la valeur de x, ce n'est pas le même terme qui est plus grand dans la somme. Une idée est alors d'expliciter ces zones et de faire un Développement Asymptotique dans chacune d'elle.
- ▷ La seconde est plus spécifique à la forme particulière de la fonction f (une forme quadratique), mais permet de rappeler l'importance de la mise sous forme canonique pour de telles formes quadratiques.

Solution pour l'exercice 31 · Énoncé p. 10 · Indication p. 24 (Un contre-exemple parmi d'autres)

1. Montrons tout d'abord que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.

On a pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

Et, comme $x\cos(x)^2 + \sin(x)^2 > 0$ car somme de deux termes positifs non tous les deux nuls, $f(x) > 0$.

Il suffit désormais de vérifier que $\frac{f}{g}$ n'est pas majorée au voisinage de $+\infty$ et que $\frac{g}{f}$ n'est pas majorée au voisinage de $+\infty$.

Or pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{x}\cos(x)^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x)^2.$$

- ▷ On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2n\pi) = \sqrt{2n\pi} \times 1 + 0$$

donc en particulier,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(2n\pi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et en particulier (comme $2n\pi \to +\infty$ quand $n \to +\infty$)

$$\boxed{\neg(f(x) = O_{x\to+\infty} g(x))}$$

- ▷ On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left(\frac{f}{g}\right)\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 + \frac{1}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} \times 1$$

donc en particulier,

$$\left(\frac{f}{g}\right)\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

i.e

$$\frac{g}{f}\Big(2n\pi+\frac{\pi}{2}\Big)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

et en particulier (comme $2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$ quand $n\to+\infty$)

$$\boxed{\neg(g(x)=O_{x\to+\infty}f(x))}$$

2. Avec u une fonction strictement croissante on a (comme produit de deux fonctions strictement croissantes positives, g est strictement croissante. Avec u une fonction positive, de la minoration $g\geq\sqrt{\cdot}$ on en déduit que g admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$.

Il reste à trouver une condition suffisante sur u pour obtenir les informations sur f.

Dans le cas où u est dérivable on obtient que f est dérivable et que

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+, f'(x)&=(u'(x)(x\cos(x)^2+\sin(x)^2)+\cos(x)^2-2x\cos(x)\sin(x)+2\sin(x)\cos(x))e^{u(x)}\\&=((xu'(x)+1)\cos(x)^2+u'(x)\sin(x)^2+2(1-x)\sin(x)\cos(x))e^{u(x)}.\end{aligned}$$

Pour assurer la stricte monotonie une CS est alors d'avoir $((xu'(x)+1)\cos(x)^2+u'(x)\sin(x)^2+2(1-x)\sin(x)\cos(x))>0$ pour tout x.

Remarque: cf l'exercice 30 pour diverses méthodes pour attaquer ce problème.

Par exemple si $\cos(x)^2=0$ alors $f'(x)=\sin^2(x)u'(x)e^{u(x)}=1\times u'(x)e^{u(x)}$ et sinon

$$f'(x)=(u'(x)\tan(x)^2+2(1-x)\tan(x)+(xu'(x)+1))\cos(x)^2e^{u(x)}.$$

On sait qu'un trinôme de coefficient dominant positif et de discriminant strictement négatif est de signe strictement positif.

Une condition suffisante est donc

$$4(x-1)^2-4u'(x)(xu'(x)+1)<0.$$

On constate (calcul à faire) que par exemple $u(x)=(x+1)^2$ convient.

Une fois trouvé un tel u tel que $x\mapsto e^{u(x)}(x\cos(x)^2+\sin(x)^2)$ est croissante (et positive), alors pour par exemple, tout $x\geq 1$,

$$\begin{aligned}&e^{u(x)+x}(x\cos(x)^2+\sin(x)^2)=e^x\big(e^{u(x)}(x\cos(x)^2+\sin(x)^2)\big)\\&\geq e^xe^{u(1)}(1\times\cos(1)^2+\sin(1)^2)\end{aligned}$$

et donc par minoration on a bien, quitte à remplacer u par $u+\mathrm{Id}$, que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Ainsi $\boxed{\text{un tel } u \text{ existe}}$ bien.

Solution pour l'exercice 40 · Énoncé p. 13 · Indication p. 25 (Développements asymptotiques de suites récurrentes: des cas non bornés)

1. ▷ **Bonne définition (intervalle stable)**

L'intervalle $]0,+\infty[$ est stable par f et $u_0\in]0,+\infty[$ d'où la bonne définition de la suite.

Limite

On a pour tout $x>0$, $f(x)>x$ d'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Par le Théorème de Limite Monotone et le Passage à la Limite des Inégalités Larges elle converge donc vers un certain $\ell \in [u_0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Si par l'absurde $\ell \neq +\infty$, alors par continuité de f et passage à la limite de la relation de récurrence on a

$$\ell = f(\ell)$$

ce qui est absurde.

Par conséquent

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

▷ **Premier terme du DA**

On constate que comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par conséquent $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

L'égalité pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\frac{1}{u_n}} = 1$$

encourage donc à poser la suite auxiliaire (comme une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\frac{1}{x}}$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n^2}{2}$$

c'est à dire (les termes étant positifs)

$$u_n = \sqrt{2v_n}.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}u_n^2\left(1 + \frac{1}{u_n^2}\right)^2 \end{aligned}$$

et donc (exprimer une relation de récurrence sur $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seule sera utile pour l'étape suivante), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{v_{n+1} = v_n\left(1 + \frac{1}{2v_n}\right)^2}.$$

Comme

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

on a par un DL à l'ordre 1,

$$v_n\left(1 + \frac{1}{2v_n}\right)^2 = v_n\left(1 + 2\frac{1}{2v_n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_n}\right)\right)$$

d'où

$$v_{n+1} = v_n + 1 + o_{n\to+\infty}(1).$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$$

on en déduit par Cesàro,

$$\frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est à dire

$$\boxed{v_n = n + o_{n\to+\infty}(n)}$$

ou encore (comme $\sqrt{1+o(1)} = 1 + o(1)$)

$$\boxed{u_n = \sqrt{2n} + o_{n\to+\infty}(\sqrt{n})}$$

▷ **Terme suivant**

Le point important dans le terme précédent était la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n\left(1 + \frac{1}{2v_n}\right)^2$$

développée à l'ordre 1.

En développant à l'ordre 2 on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + 1 + \frac{1}{4v_n}$$

et donc en posant la nouvelle suite auxiliaire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - n$, c'est à dire

$$v_n = n + w_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, en réinjectant l'information

$$v_n = n + o_{n\to+\infty}(n)$$

on obtient

$$w_{n+1} + (n+1) = (w_n + n) + 1 + \frac{1}{4n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

c'est à dire

$$\frac{w_{n+1} - w_n}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

Or $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par Cesàro pondéré, comme pour tout n,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1}-w_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\frac{w_{k+1}-w_k}{\frac{1}{k}}}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}$$

on en déduit que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1}-w_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

et donc (somme télescopique et équivalent de la série harmonique)

$$\boxed{w_n = \tfrac{1}{4}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))}.$$

D'où

$$v_n = n + \frac{1}{4}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))$$

et donc

$$u_n = \sqrt{2}\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{\ln(n)}{4n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}$$

d'où par $\mathrm{DL}_1(0)$ de $t\mapsto\sqrt{1+t}$, comme $\frac{\ln(n)}{4n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\boxed{u_n = \sqrt{2n} + \tfrac{\sqrt{2}}{2\times4}\tfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} + o_{n\to+\infty}\left(\tfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)}$$

2. ▷ **Bonne définition (intervalle stable)**

L'intervalle $[0,+\infty[$ est stable par f et $u_0 \in [0,+\infty[$ d'où la bonne définition de la suite.

Limite

On a pour tout $x>0$, $f(x)>x$ d'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Par le Théorème de Limite Monotone et le Passage à la Limite des Inégalités Larges elle converge donc vers un certain $\ell \in [u_0,+\infty[\cup\{+\infty\}$.

Si par l'absurde $\ell \neq +\infty$, alors par continuité de f et passage à la limite de la relation de récurrence on a

$$\ell = f(\ell)$$

ce qui est absurde.

Par conséquent

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

▷ **Premier terme du DA**

On constate que comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'où $e^{-u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par conséquent $u_{n+1}-u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

L'égalité pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}-u_n}{e^{-u_n}}=1$$

encourage donc à poser la suite auxiliaire (comme une primitive de $x\mapsto\frac{1}{e^{-x}}$ est $x\mapsto e^x$), pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$v_n=e^{u_n}$$

c'est à dire (par stricte positivité)

$$u_n=\ln(v_n).$$

Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}v_{n+1}&=e^{u_n+e^{-u_n}}\\&=e^{u_n}e^{e^{-u_n}}\end{aligned}$$

et donc (exprimer une relation de récurrence sur $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seule sera utile pour l'étape suivante), pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\boxed{v_{n+1}=v_ne^{\frac{1}{v_n}}}.$$

Comme

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

on a par un DL à l'ordre 1,

$$v_ne^{\frac{1}{v_n}}=v_n\left(1+\frac{1}{v_n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_n}\right)\right)$$

d'où

$$v_{n+1}=v_n+1+o_{n\to+\infty}(1).$$

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{v_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1}-v_k)$$

on en déduit par Cesàro,

$$\frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est à dire

$$\boxed{v_n=n+o_{n\to+\infty}(n)}$$

ou encore (comme $\ln(1+o(1))=o(1)$)

$$\boxed{u_n = \ln(n) + o_{n\to+\infty}(1)}.$$

▷ **Terme suivant**

Le point important dans le terme précédent était la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}$$

développée à l'ordre 1.

En développant à l'ordre 2, $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o_{h\to 0}(h^2)$ on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + 1 + \frac{1}{2v_n}$$

et donc en posant la nouvelle suite auxiliaire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - n$, c'est à dire

$$v_n = n + w_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, en réinjectant l'information

$$v_n = n + o_{n\to+\infty}(n)$$

on obtient

$$w_{n+1} + (n+1) = (w_n + n) + 1 + \frac{1}{2n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

c'est à dire

$$\frac{w_{n+1} - w_n}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Or $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc par Cesàro pondéré, comme pour tout n,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1} - w_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\frac{w_{k+1}-w_k}{\frac{1}{k}}}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}$$

on en déduit que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1} - w_k)}{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

et donc (somme télescopique et équivalent de la série harmonique)

$$\boxed{w_n = \tfrac{1}{2}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))}.$$

D'où

$$v_n = n + \frac{1}{2}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))$$

et donc

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(n + \frac{1}{2}\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))\right) \\ &= \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

d'où par $\mathrm{DL}_1(0)$ de $t \mapsto \ln(1+t)$, comme $\frac{\ln(n)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\boxed{u_n = \ln(n) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\tfrac{\ln(n)}{n}\right)}$$

▷ **Et l'ordre suivant ? (HP)**

On peut continuer à réinjecter l'information pour obtenir un développement à l'ordre suivant.

Mais on peut aussi dès maintenant prévoir que l'ordre suivant va être légèrement différent.

En effet un passage crucial pour l'ordre 1 ou l'ordre 2 était l'utilisation de Cesàro ou Cesàro pondéré (en fait une méthode pour contourner l'utilisation d'un théorème plus général que vous verrez en spé: le théorème de «sommation des relations de comparaisons, cas **divergent**»). Or dans ce théorème l'hypothèse que la somme des poids, que ce soit $\sum_{k=1}^{n-1} 1$ ou $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, tende vers $+\infty$ est cruciale.

Or on s'attend à ce que l'ordre suivant fasse apparaître des poids en $\frac{1}{n^2}$ et la somme des poids en $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$ converge. On utilisera alors le théorème de convergence monotone pour conclure (encore une fois pour contourner l'utilisation d'un théorème plus général que vous verrez en spé: le théorème de «sommation des relations de comparaisons, cas **convergent**»).

Reprenons la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}$$

En développant à l'ordre 3 on obtient donc

$$v_{n+1} = v_n + 1 + \frac{1}{2v_n} + \frac{1}{6v_n^2} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_n^2}\right)$$

et en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\xi_n = w_n - \frac{1}{2}\ln(n)$ c'est à dire

$$v_n = n + \frac{1}{2}\ln(n) + \xi_n$$

on obtient (les o sont des $o_{n\to+\infty}$)

$$(n+1) + \frac{1}{2}\ln(n+1) + \xi_{n+1} = n + \frac{1}{2}\ln(n) + \xi_n + 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n + \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n))} + \frac{1}{6}\frac{1}{\left(n + \frac{1}{2}\ln(n) + o(\ln(n))\right)^2} + o\left(\frac{1}{n}\right.$$

Donc

$$\xi_{n+1}-\xi_n=\frac{1}{2}(\ln(n+1)-\ln(n))+\frac{1}{2}\frac{1}{n+\frac{1}{2}\ln(n)+o(\ln(n))}+\frac{1}{6}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\ln(n)+o(\ln(n))\right)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il ne reste plus qu'à effectuer un développement limité à l'ordre 2.

On a

- $\ln(n+1)-\ln(n)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$
- $\frac{1}{n+\frac{1}{2}\ln(n)+o(\ln(n))}=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n^2}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$
- $\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\ln(n)+o(\ln(n))\right)^2}=\frac{1}{n^2}\left(1-2\times\frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n}+o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)=\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

En sommant comme $\frac{1}{n^2}=o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$, on en déduit que

$$\xi_{n+1}-\xi_n=-\frac{1}{4}\frac{\ln(n)}{n^2}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Ici le théorème de sommation des relations de comparaison, cas convergent permettrait de conclure (et en fait d'obtenir aussi l'équivalence des restes d'où un ordre de plus), mais en contournant ce résultat fort pratique en utilisant uniquement des résultats de sup.

- Par l'équivalent précédent, $\xi_{n+1}-\xi_n\leq 0$ APCR et donc la suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
- Toujours par l'équivalent précédent et par croissance comparée il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, $-\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\leq\xi_{n+1}-\xi_n$ d'où par croissance $n\geq N$, $\xi_N-\sum_{k=N}^{n-1}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\leq\xi_n$. Or par comparaison série-intégrale (à rédiger), pour N assez grand, $\sum_{k=N}^{n-1}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\leq\int_{N-1}^{n-1}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x=2\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\leq\frac{2}{N^{\frac{1}{2}}}$. D'où la suite est minorée.
- Par conséquent la suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Par conséquent il existe une constante $\kappa(u_0)\in\mathbb{R}$ (il n'y a, a priori pas d'expression explicite de $\kappa(u_0)$ parfois appelée constante d'Euler de ce problème particulier, penser par exemple à la constante γ obtenue pour la suite $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n}$) telle que

$$\xi_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\kappa(u_0).$$

Donc

$$v_n=n+\frac{1}{2}\ln(n)+\kappa(u_0)+o_{n\to+\infty}(1)$$

et donc

$$u_n=\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\frac{\ln(n)}{n}+\frac{\kappa(u_0)}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

ce qui donne finalement, après un DL_2 et comme $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2=o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$,

$$\boxed{u_n = \ln(n) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\ln(n)}{n} + \tfrac{\kappa(u_0)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\tfrac{1}{n}\right)}.$$

On peut ensuite écrire un script python pour vérifier le développement asymptotique et obtenir pour une certaine valeur de u_0 une valeur approchée de $\kappa(u_0)$, etc.

Solution pour l'exercice 43 · Énoncé p. 14 · Indication p. 26 (Encore des équations implicites)

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto x^n + x - 1$.

▷ **Existence, unicité et bornes**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

La fonction f_n est dérivable (car polynomiale) et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$.

Comme de plus $f_n(0) = -1 < 0$, $f_n(1) = 1 > 0$ par le théorème de bijection continue strictement monotone (on remarque que f_n continue et $\mathbb{R}_+$ un intervalle), il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n) = 0$ et de plus $\boxed{x_n \in [0,1]}$.

▷ **Convergence et limite**

▷ *Première méthode: monotonie*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 = 0$.

D'où $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1 = x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n+1} = x_{n+1}^n(1 - x_{n+1}) \geq 0$ la dernière inégalité étant issue de $x_{n+1} \in [0,1]$.

Par tableau de variation (déjà établi à la question précédente), on en déduit que $x_n \leq x_{n+1}$.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

De plus elle est majorée par 1.

Par théorème de convergence monotone elle converge donc. Notons ℓ sa limite. Par Passage à La Limite des Inégalités Larges $\ell \in [0,1]$.

Supposons que $\ell \neq 1$.

Alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$ d'où $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $n\ln(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, il s'agit d'une forme déterminée).

En passant à la limite l'équation $x_n^n + x_n - 1 = 0$ on en déduit donc $0 + \ell - 1 = 0$, ce qui est absurde.

Donc $\ell = 1$ c'est à dire

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

▷ *Seconde méthode: compacité*

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et à valeurs dans $[0,1]$.

Soient φ extractrice et $\ell \in [0,1]$ tq $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Supposons que $\ell \neq 1$.

Alors $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell < 1$ d'où $x_{\varphi(n)}^{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car $\varphi(n)\ln\left(x_{\varphi(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, il s'agit d'une forme déterminée).

En passant à la limite l'équation $x_{\varphi(n)}^{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - 1 = 0$ on obtient $0 + \ell - 1 = 0$ ce qui est absurde. Par conséquent $\ell = 1$.

On a donc montré que pour tout extractrice φ, **si** $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **alors** la limite est 1, qui ne dépend pas de l'extractrice.

Par unicité de valeur d'adhérence

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

▷ *Autre méthode pour la limite*

Dans les deux méthodes précédentes, une étape est de montrer que (une fois la convergence obtenue ou bien sous réserve de convergence à extraction près) la limite est 1. Plutôt que de procéder par l'absurde on peut aussi réécrire l'équation sous une forme plus manipulable, réécriture nécessaire pour le développement asymptotique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $x_n \in]0,1[$ on a

$$x_n^n + x_n - 1 = 0$$

qui se réécrit

$$n\ln(x_n) = \ln(1 - x_n)$$

ou encore

$$\frac{\ln(x_n)}{\ln(1-x_n)} = \frac{1}{n}.$$

En notant ℓ la limite (éventuellement à extraction près), comme $f_n\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ pour $n \geq 2$, on a $x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ pour $n \geq 2$ et donc par passage à la limite $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

En particulier $\ell > 0$ et le passage à la limite de l'équation précédente donne

$$\frac{\ln(\ell)}{\ln(1-\ell)} = 0.$$

D'où la valeur de ℓ (sans raisonnement par l'absurde).

▷ **Terme suivant du développement asymptotique**

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = 1 - x_n$ c'est à dire

$$x_n = 1 - y_n.$$

Les calculs précédents montrent que

$$y_n = o_{n\to+\infty}(1).$$

Tout l'enjeu est de trouver la bonne expression dans laquelle réinjecter pour obtenir l'ordre suivant.

En réinjectant dans l'expression ayant permis d'obtenir la limite on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\ln(1-y_n)}{\ln(y_n)} = \frac{1}{n}$$

donc, comme $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le $\mathrm{DL}_1(0)$ de ln,

$$\frac{-y_n}{\ln(y_n)} \sim \frac{1}{n}.$$

Afin de retrouver un développement dans le « bon sens », posons ensuite $z_n = \frac{1}{y_n}$ (possible car $x_n < 1$ d'où $y_n > 0$) c'est à dire

$$y_n = \frac{1}{z_n}.$$

L'équivalent précédent se réécrit

$$z_n \ln(z_n) \sim n$$

(cela doit rassurer, il s'agit essentiellement d'une fonction de Lambert, exercice que l'on sait traiter !) c'est à dire

$$z_n \ln(z_n) = n(1 + o_{n\to+\infty}(1))$$

en passant au logarithme (comme $z_n > 1$)

$$\ln(z_n) + \ln(\ln(z_n)) = \ln(n) + \ln(1 + o_{n\to+\infty}(1))$$

et comme $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\ln(\ln(z_n)) = o_{n\to+\infty}(\ln(z_n))$ d'où (comme $\frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1)$)

$$\ln(z_n) = \ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))$$

en réinjectant,

$$\ln(z_n) = \ln(n) - \ln(\ln(n) + o_{n\to+\infty}(\ln(n))) + o_{n\to+\infty}(1)$$

d'où

$$\ln(z_n) = \ln(n) - \ln(\ln(n)) + o_{n\to+\infty}(1).$$

Une fois le $o(1)$ obtenu on peut enfin passer à l'exponentielle pour obtenir un équivalent:

$$z_n = e^{\ln(n) - \ln(\ln(n)) + o_{n\to+\infty}(1)} = \frac{n}{\ln(n)}(1 + o_{n\to+\infty}(1))$$

et par conséquent

$$\boxed{x_n = 1 - \tfrac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\tfrac{\ln(n)}{n}\right)}.$$

Solution pour l'exercice 44 · Énoncé p. 15 · Indication p. 26 (Équivalent d'un maximum)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$ alors $f_n : x \mapsto x$ et le maximum est atteint en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Supposons désormais que $n \geq 1$.

On a f_n est dérivable (opérations sur les fonctions usuelles) et

$$\begin{aligned}\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f_n'(x) &= (\cos(x))^n - nx(\cos(x))^{n-1}\sin(x) \\ &= (\cos(x))^{n-1}(\cos(x) - nx\sin(x)).\end{aligned}$$

D'où pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f_n'(x)$ est du même signe que $\cos(x) - nx\sin(x)$. Notons

$$\begin{aligned}g_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) - nx\sin(x).\end{aligned}$$

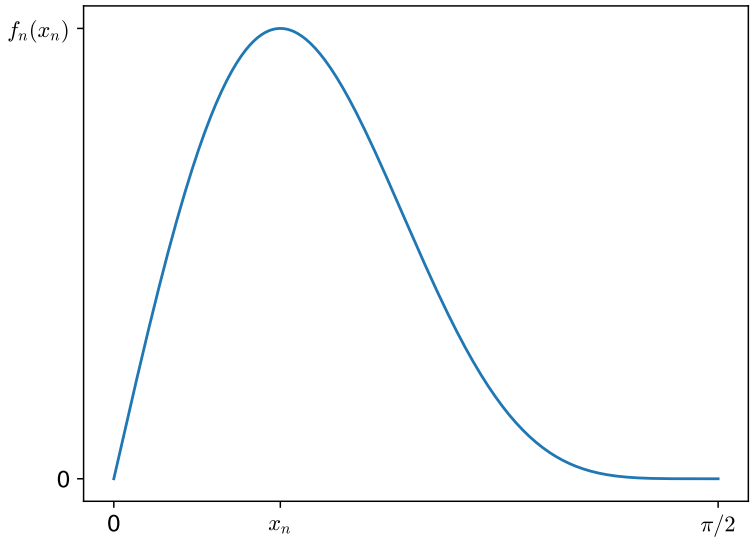
On a $g_n(0) = 1$, $g_n(\frac{\pi}{2}) = -\frac{n\pi}{2} < 0$ et comme, sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, cos strictement décroissante, sin décroissante positive et $x \mapsto x$ croissante positive par opérations g_n est strictement décroissante (on pourrait aussi simplement calculer g_n').

On en déduit le tableau de variations:

x	0		x_n		$\frac{\pi}{2}$
g_n	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{n\pi}{2}$
$g_n(x)$	$+$		0	$-$	
$f_{n'}(x)$	$+$		0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(x_n)$	$\searrow$	0

D'où par lecture du tableau de variations $\boxed{\text{existence et unicité d'un tel } x_n}$.

Remarque: on a ainsi la forme schématique de la fonction:



2. On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n est l'unique solution de l'équation

$$g_n(x) = 0$$

où

$$\begin{aligned} g_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) - nx\sin(x). \end{aligned}$$

Comme pour toutes les suites implicites il y a alors plusieurs façons de procéder.

▷ **Par monotonie**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\begin{aligned} g_n(x_{n+1}) &= g_n(x_{n+1}) - g_{n+1}(x_{n+1}) \\ &= (g_n - g_{n+1})(x_{n+1}) \\ &= x_{n+1}\sin(x_{n+1}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

et donc par stricte décroissance de g_n, c'est à dire lecture du tableau de variations

x	0	x_{n+1}	x_n	$\frac{\pi}{2}$
g_n	1 ↘	$g_n(x_{n+1}) \geq 0$ ↘	0 ↘	$-\frac{n\pi}{2}$

on en déduit

$$x_{n+1} \leq x_n.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée par 0.

Par théorème de limite monotone elle est donc convergente.

Notons ℓ sa limite.

Si $\ell \neq 0$, alors par passage à la limite de

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \cos(x_n) - nx_n \sin(x_n) = 0$$

on obtient

$$-\infty = 0$$

ce qui est absurde.

Donc $\ell = 0$, c'est à dire

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

▷ **Par compacité**

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Soit φ une extractrice et $\ell_\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_\varphi$.

Si par l'absurde $\ell_\varphi \neq 0$, alors par passage à la limite de l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(x_{\varphi(n)}\right) - \varphi(n)x_{\varphi(n)} \sin\left(x_{\varphi(n)}\right) = 0$$

on en déduit

$$-\infty = 0$$

ce qui est absurde.

Donc $\ell_\varphi = 0$.

Donc par unicité de la valeur d'adhérence

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

▷ **Par encadrement**

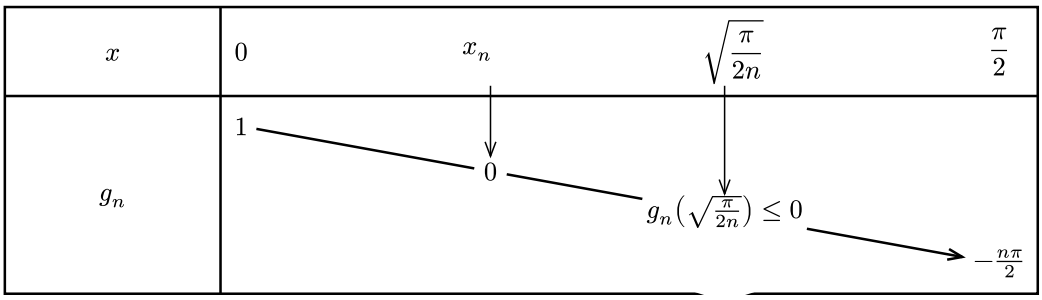
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, comme $\cos(x) \leq 1$ et $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$ (concavité de sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$),

$$g_n(x) \leq 1 - nx\frac{2}{\pi}x$$

et en particulier

$$g_n\left(\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\right) \leq 0.$$

Par stricte décroissance de g_n, c'est à dire lecture du tableau de variations



on en déduit que

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Par encadrement,

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

Solution pour l'exercice 45 · Énoncé p. 15 · Indication p. 26 (Un cas classique d'équivalent de suites récurrentes)
Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{v_n = u_{n+1}^{1-k} - u_n^{1-k}}.$$

L'objectif est de montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puis d'utiliser Cesàro.

Constatons tout d'abord que pour x au voisinage de 0, (comme $k-1>0$)

$$\begin{aligned}(f(x))^{1-k} - x^{1-k} &= \big(x - a_k x^k + o_{x\to0}(x^k)\big)^{1-k} - x^{1-k}\\ &= x^{1-k}\Big(\big(1 - a_k x^{k-1} + o_{x\to0}(x^{k-1})\big)^{1-k} - 1\Big)\\ &= x^{1-k}\big(\big(1-(1-k)a_k x^{k-1} + o_{x\to0}(x^{k-1})\big) - 1\big)\\ &= -(1-k)a_k + o_{x\to0}(1).\end{aligned}$$

donc, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, pour n au voisinage de $+\infty$,

$$v_n = (u_{n+1})^{1-k} - u_n^{1-k} = (f(u_n))^{1-k} - u_n^{1-k} = (k-1)a_k + o_{n\to+\infty}(1).$$

et donc par Cesàro,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\big(u_{j+1}^{1-k} - u_j^{1-k}\big) = (k-1)a_k + o_{n\to+\infty}(1)$$

et donc par télescopage, et comme u_0^{1-k} est une constante, (donc un $o_{n\to+\infty}(n)$),

$$u_n^{1-k} = (k-1)a_k\, n + o_{n\to+\infty}(n)$$

et donc

$$\boxed{u_n = \gamma n^{\frac{1}{1-k}}(1 + o_{n\to+\infty}(1))}$$

où

$$\boxed{\gamma = ((k-1)a_k)^{\frac{1}{1-k}}}.$$

Solution pour l'exercice 47 · Énoncé p. 16 · Indication p. 26 (Le terme d'après si vous avez le courage)
Attention: erreurs de calculs fortement probables.

On commence par traiter l'exercice 45.

On a donc $u_n \to 0$ et même

$$u_n \sim_{n\to+\infty} ((k-1)a_k)^{-\frac{1}{k-1}}\ n^{-\frac{1}{k-1}}.$$

L'idée est de pousser le développement un ordre plus loin et de réinjecter cet équivalent (méthode de *bootstrap*). Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, de même que précédemment

$$v_n = u_{n+1}^{1-k} - u_n^{1-k}.$$

et en poussant le développement à l'ordre supérieur, quand $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
&(f(x))^{1-k} - x^{1-k} = x^{1-k}\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{1-k} - 1\right)\\
&= x^{1-k}\Big(\big(1 - \big(a_k x^{k-1} + a_{2k-2}x^{2k-1} + o\big(x^{2k-2}\big)\big)\big)^{1-k} - 1\Big)\\
&= x^{1-k}\left(1 - (1-k)\big(a_k x^{k-1} + a_{2k-1}x^{2k-2} + o\big(x^{2k-2}\big)\big) + \frac{(1-k)(1-k-1)}{2}\big(a_k x^{k-1} + a_{2k-1}x^{2k-2} + o\big(x^{2k-2}\big)\big)^2 + o\big(x^{2k-2}\big) - 1\right)\\
&= x^{1-k}\left(a_k(k-1)x^{k-1} + \left((k-1)a_{2k-1} + \frac{(k-1)k}{2}a_k^2\right)x^{2k-2} + o\big(x^{2k-2}\big)\right)\\
&= a_k(k-1) + \left((k-1)a_{2k-1} + \frac{k(k-1)}{2}a_k^2\right)x^{k-1}(1+o(1))
\end{aligned}$$

et donc en posant

$$\begin{aligned}
C_1 &= a_k(k-1)\\
C_2 &= \left((k-1)a_{2k-1} + \frac{k(k-1)}{2}a_k^2\right)
\end{aligned}$$

comme $u_n \to 0$ on a

$$v_n = C_1 + C_2 u_n^{k-1}(1 + o_{n\to+\infty}(1)).$$

Posons désormais pour $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = v_n - C_1.$$

Alors

$$w_n \sim_{n\to+\infty} C_2 u_n^{k-1}$$

d'où comme on a déjà vu que

$$u_n \sim_{n\to+\infty} C_1^{\frac{1}{1-k}} n^{\frac{1}{1-k}}$$

on en conclut que

$$w_n \sim_{n\to+\infty} \frac{C_2}{C_1}\frac{1}{n}.$$

D'où par sommation des équivalents, cas divergent, on conclut que

$$\sum_{i=0}^{n-1}(w_i) \sim_{n\to+\infty} \frac{C_2}{C_1}\ln(n).$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} w_i &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(u_{i+1}^{1-k} - u_i^{1-k} - C_1\right)\\ &= u_n^{1-k} - u_0^{1-k} - C_1 n\end{aligned}$$

et donc (comme $u_0^{1-k} = o_{n\to+\infty}(\ln(n))$) on conclut que

$$\boxed{u_n^{1-k} = C_1 n + \frac{C_2}{C_1}\ln(n) + o_{n\to+\infty(n)}(\ln(n))}$$

et donc

$$\begin{aligned}u_n &= C_1^{\frac{1}{1-k}} n^{\frac{1}{1-k}}\left(1 + \frac{C_2}{(C_1)^2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)^{\frac{1}{1-k}}\\ &= C_1^{\frac{1}{1-k}} n^{\frac{1}{1-k}}\left(1 + \frac{1}{1-k}\frac{C_2}{(C_1)^2}\frac{\ln(n)}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

et donc finalement comme (calcul à vérifier)

$$\frac{1}{1-k}\frac{C_2}{C_1^2}C_1^{\frac{1}{1-k}} = -\left(\frac{a_{2k-1}}{((k-1)a_k)^2} + \frac{k}{2(k-1)^2}\right)(a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}}$$

on obtient bien

$$\boxed{u_n = (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}} n^{-\frac{1}{k-1}} - (a_k(k-1))^{\frac{1}{1-k}}\left(\frac{a_{2k-1}}{((k-1)a_k)^2} + \frac{k}{2(k-1)^2}\right)n^{-\frac{k}{k-1}}\ln(n) + o_{n\to+\infty}\left(n^{-\frac{k}{1-k}}\ln(n)\right)}.$$

Solution pour l'exercice 52 · Énoncé p. 18 · Indication p. 27 (Utilisation en algèbre des séries entières)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$.

1. Posons $v = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^k$.

Alors (formule de Bernoulli)

$$\begin{aligned}(1+u)v &= (1-(-u))\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^k\right)\\ &= 1-(-u)^n\\ &= 1\\ v(1+u) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^k\right)(1+u)\\ &= 1-(-u)^n\\ &= 1\end{aligned}$$

Remarque: comme $1+u$ et v sont tous deux des polynômes en u ils commutent et donc il aurait suffit de vérifier un seul des deux produits.

Donc $\boxed{1+u \text{ est inversible}}$.

2. On s'inspire du classique.

Il existe (DL usuel) un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\sqrt{1+x} = P_n(x) + o_{x\to 0}(x^n).$$

Remarque: on a même une expression explicite,

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}X^k$$

qui peut même se simplifier (produit des impairs) mais elle ne sera pas utile dans la suite.

On a en particulier (DL d'un produit)

$$P_n(x)^2 + o_{x\to 0}(x^n) = (1+x) + o_{x\to 0}(x^n)$$

et donc par unicité du $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto 1+x$, on en déduit que pour tout $k \in \{0,...,n\}$, le coefficient de X^k dans $P_n(X)^2$ est égal à 1 si $k=0$ ou 1 et à 0 sinon.

C'est à dire il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ (quotient de division euclidienne) tel que

$$P_n(X)^2 = 1 + X + X^n Q_n(X).$$

En évaluant cette relation en u on obtient

$$P_n(u)^2 = 1 + u + u^n Q_n(u) = 1+u$$

et donc $v = P_n(u)$ convient d'où $\boxed{1+u \text{ est un carré}}$.