Fractions Rationnelles

Énoncés 2
Le plus important 2
Fractions rationnelles 2
Indications 13

Énoncés

Dans tout le TD, sauf mention du contraire, $\mathbb{K}$ est un corps.

Le plus important

Travailler en autonomie sur **des décompositions en éléments simples explicites**, par exemple dans le cahier de calcul.

Fractions rationnelles

Exercice 1 (◔★ Rigidité)
Soient F_1 et F_2 dans $\mathbb{K}(X)$ dont les fonctions rationnelles associées coïncident sur une infinité de points.

Montrer que $F_1 = F_2$.

Indication p. 13

Exercice 2 (◔★♣ Le classique P' sur P)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{P'}{P}.$$

Indication p. 13

Exercice 3 (◔★ Racines de l'unité)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{X^n - 1}.$$

Indication p. 13

Exercice 4 (◔★ Un calcul qui revient souvent)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{X(X-1)(X-2)\cdots(X-n)}.$$

(Exprimer le résultat à l'aide de factorielles).

Indication p. 13

Exercice 5 (◑★ Gauss-Lucas)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.

Montrer que les racines de P' peuvent s'écrire comme barycentres des racines de P.

Indication p. 13

Exercice 6 (◔★ Le changement de variables à connaître)
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ dont aucun pôle n'est de module 1 et $[a,b] \in]-\pi,\pi[$.

Montrer qu'il existe $G \in \mathbb{C}(X)$ et $[\alpha,\beta] \subset]-\infty,+\infty[$ tel que

$$\int_a^b F\left(e^{i\theta}\right) \mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta G(t)\,\mathrm{d}t.$$

Commenter.

Indication p. 13

Exercice 7 (◔★ Quelques calculs de sommes)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes:

1. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Indication p. 13

Exercice 8 (◔★ Quelques sommes de calculs)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes:

1. $$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-\omega}$$

2. $$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{(1-\omega)^2}$$

Indication p. 13

Exercice 9 (◔☆ Des décompositions en éléments simples)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes.

1. Pour $m \in \mathbb{N}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\frac{X^m}{(X-\lambda)^n}.$$

2.
$$\frac{nX^{n-1}}{(X^n-1)^2}.$$

3.
$$\frac{1}{(X^n-1)^2}.$$

4.
$$\frac{X^{n-1}}{X^n-1}.$$

5.
$$\frac{X^n-1}{X^n+1}.$$

6.
$$\frac{1}{(X-1)(X^n-1)}.$$

Indication p. 13

Exercice 10 (◔★ Fractions rationnelles et racines)
Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.

Montrer que

$$(\exists F \in \mathbb{K}(X), F^2 = A) \Leftrightarrow (\exists P \in \mathbb{K}[X], P^2 = A).$$

Indication p. 14

Exercice 11 (◔★ Quelques redites du chapitre polynômes)
1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$.

   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(P'(x))^2 - P(x)P''(x) \geq 0$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'|P$.

Indication p. 14

Exercice 12 (◔☆ Rolle polynomial sans Rolle)
Dans cet exercice on n'utilisera pas le théorème de Rolle.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$, de racines $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r$ et de multiplicités $m_1, m_2, ..., m_r$.
1. Que dire des multiplicités de $\lambda_1, ..., \lambda_r$ en tant que racines de P' ?
2. Déterminer les variations de $F = \frac{P'}{P}$ sur son ensemble de définition et faire un schéma.
3. Montrer que pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$, P' admet une racine dans l'intervalle $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$.
4. Conclure que P' est scindé.

Indication p. 14

Exercice 13 (◑★ Degré et dérivée ou dérivée discrète)
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

On définit

$$\begin{aligned} D : \mathbb{K}(X) &\to \mathbb{K}(X) \\ F &\mapsto F' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{K}(X) &\to \mathbb{K}(X) \\ F &\mapsto F(X+1) - F(X) \end{aligned}$$

1. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que $\deg(D(F)) \leq \deg(F) - 1$ et que $\deg(\Delta(F)) \leq \deg(F) - 1$.
2. Donner un exemple de fraction rationnelle non nulle où les inégalités précédentes sont strictes.
3. Montrer que si $\deg(F) \neq 0$ alors
   - ▷ $\deg(D(F)) = \deg(F) - 1$
   - ▷ $\deg(\Delta(F)) = \deg(F) - 1$.

Indication p. 14

Exercice 14 (◔★ Arctangente n'est pas une fraction rationnelle)
Montrer qu'il n'existe pas de $F \in \mathbb{R}(X)$ tel que, $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \arctan(x)$.

Indication p. 14

Exercice 15 (◑★ Primitivation de fractions rationnelles)
On dit que $F \in \mathbb{K}(X)$ est *une dérivée* ssi il existe $G \in \mathbb{K}(X)$ telle que $G' = F$.

1. Parmi les fractions rationnelles suivantes lesquelles sont des dérivées ? (Justifier avec précision)

   (i) $\frac{1}{X}$
   (ii) $\frac{1}{X^2}$
   (iii) $\frac{1}{X^2+1}$
   (iv) $\frac{X}{X^2+1}$
   (v) $\frac{1}{(X^2+1)^2}$
   (vi) $\frac{X}{(X^2+1)^2}$
2. Donner une CNS sur la décomposition en éléments simples de $F \in \mathbb{C}(X)$ pour que F soit une dérivée.
3. Donner une CNS sur la décomposition en éléments simples de $F \in \mathbb{R}(X)$ pour que F soit une dérivée.

Indication p. 14

Exercice 16 (◔★ Sommes de Newton et DES)
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ tq $a_0 \neq 0$ et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses racines comptées avec multiplicités.

1. Exprimer avec deux méthodes différentes que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k}$$

en fonction des coefficients de P.

2. Exprimer (avec la méthode de votre choix) la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\lambda_k)^2}$$

en fonction des coefficients de P.

Indication p. 15

Exercice 17 (◑★ Image d'une fraction rationnelle)
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle. Soit $\mathcal{P}_F$ l'ensemble des pôles de F.

Montrer que l'une des trois propositions suivantes est vraie:
- ▹ il existe $\gamma \in \mathbb{C}$, $F(\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}_F) = \{\gamma\}$,
- ▹ $F(\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}_F) = \mathbb{C}$,
- ▹ il existe $\gamma \in \mathbb{C}$, $F(\mathbb{C} \setminus \mathcal{P}_F) = \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$.

Indication p. 15

Exercice 18 (◔★ Fractions rationnelles paires et impaires)
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On dit que F est paire si $F(X) = F(-X)$, et on dit que F est impaire si $F(X) = -F(-X)$.

Montrer que
(i) F paire **ssi** il existe $G \in \mathbb{K}(X)$ telle que $F(X) = G(X^2)$.
(ii) F impaire **ssi** il existe $G \in \mathbb{K}(X)$ telle que $F(X) = XG(X^2)$.

Indication p. 15

Exercice 19 (◑★ Tchebychev caché dans un TD de fractions rationnelles)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un et unique polynôme $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que

$$T_n\left(\frac{1}{2}\left(X+\frac{1}{X}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(X^n + \frac{1}{X^n}\right)$$

et commenter.

2. Décomposer $\frac{1}{T_n}$ en éléments simples.

Indication p. 15

Exercice 20 (◑★ Tangente de l'angle multiple)

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble D_n intersection des ensembles de définition de $x \mapsto \tan(nx)$ et de $x \mapsto \tan(x)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une et unique fraction rationnelle $F_n \in \mathbb{R}(X)$ telle que

$$\forall x \in D_n, \tan(nx) = F_n(\tan(x))$$

Indication p. 15

Exercice 21 (◑★ Des relations parmi d'autres)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples de degré ≥ 2, et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses racines. On suppose que 0 n'est pas racine de P.

Montrer que

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k P'(\lambda_k)} = -\frac{1}{P(0)}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(\lambda_k)} = 0$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(\lambda_k)}{\lambda_k P'(\lambda_k)} = -\frac{P''(0)}{P(0)}$

Indication p. 16

Exercice 22 (◑☆ Minoration des valeurs d'un polynôme)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ **unitaire**.

1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} P(k) = 1.$$
2. En déduire que
$$\forall k \in [\![0, n]\!], |P(k)| \geq \frac{n!}{2^n}.$$
3. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que l'égalité précédent est une inégalité.

Indication p. 16

Exercice 23 (◕★ Un autre exemple d'anneau à valuation)
On note pour $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{K}_n(X) = \{F \in \mathbb{K}(X) \mid \deg(F) \leq n\}$.

1. Montrer que $\mathbb{K}_0(X)$ est un anneau.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Montrer que $\mathbb{K}_{-n}(X)$ est un idéal de $\mathbb{K}_0(X)$.
3. Déterminer les idéaux de $\mathbb{K}_0(X)$.

Indication p. 16

Exercice 24 (◕☆ Idéaux des principaux)
Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul.

On pose
$$D_Q = \left\{ \frac{P}{Q^n}, (P, n) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que D_Q est un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$.
2. Quels sont les idéaux de D_Q ?

Indication p. 16

Exercice 25 (◔★ Séries de Laurent finies)
Soit $a \in \mathbb{C}$.

On appelle ensemble des séries de Laurent finies, noté $\mathbb{C}\left[(X-a)^{\pm 1}\right]$ l'ensemble $\text{Vect}\left(\{(X-a)^k, k \in \mathbb{Z}\}\right)$.

Montrer que $\mathbb{C}\left[(X-a)^{\pm 1}\right]$ est une sous-algèbre stricte de $\mathbb{C}(X)$.

Indication p. 16

Exercice 26 (◕☆ Coefficients de Taylor d'une fraction rationnelle)
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ qui n'est pas un pôle de F.

Montrer que la suite $\left(\frac{F^{(k)}(\alpha)}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire.

Indication p. 16

Exercice 27 (◔☆ Fractions rationnelles périodiques)
Déterminer l'ensemble des fractions rationnelles $F \in \mathbb{R}(X)$ telles que la fonction rationnelle associée est périodique.

Indication p. 16

Exercice 28 (◕☆ Fractions rationnelles conservant le cercle unité)
Déterminer les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ dont aucun pôle n'est de module 1 et telles que $F(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Indication p. 17

Exercice 29 (◕☆ Comment faire sans Lagrange ?)
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. On note $\mathcal{P}_F$ l'ensemble des poles de F.

Montrer que **si**

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{P}_F, F(n) \in \mathbb{Q}$$

alors

$$F \in \mathbb{Q}(X)$$

(c'est à dire il existe $\tilde{F} \in \mathbb{Q}(X) \subset \mathbb{C}(X)$ tel que $F = \tilde{F}$).

Indication p. 17

Exercice 30 (◑★ Morphismes et automorphismes de $\mathbb{K}(X)$: premier sens)

1. Soient $F \in \mathbb{K}(X)$ et $G \in \mathbb{K}(X)$. Justifier la bonne définition de $F(G)$.

2. Soit $G \in \mathbb{K}(X)$.

Montrer que

$$\begin{aligned}\Gamma_G : \mathbb{K}(X) &\to \mathbb{K}(X)\\ F &\mapsto F(G)\end{aligned}$$

est un endomorphisme d'algèbre.

3. Soit Φ un endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{K}(X)$.

Montrer que Φ est de la forme Γ_G pour un certain $G \in \mathbb{K}(X)$.

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ on note

$$H_M = \frac{aX+b}{cX+d}.$$

1. Montrer que pour $M_1, M_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$, $H_{M_1}\left(H_{M_2}\right) = H_{M_1 M_2}$.

2. Soit $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

Montrer que Γ_{H_M} est un automorphisme de $\mathbb{K}(X)$.

Indication p. 17

Exercice 31 (◕★ Automorphismes de $\mathbb{K}(X)$: la réciproque)
Commencer par traiter l'exercice 30.

1. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A \wedge B = 1$ et soient $(a_0, ..., a_n), (b_0, ..., b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k X) A^k B^{n-k} = 0.$$

Montrer que A et B sont dans $\mathbb{K}_1[X]$.

2. Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$ tels que

$$F(G) = X.$$

Montrer qu'il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ tels que

$$G = \frac{aX+b}{cX+d}.$$

3. Déterminer l'ensemble des automorphismes d'algèbre de $\mathbb{K}(X)$.

Indication p. 17

Exercice 32 (◕★ Encore du Tchebychev ?)
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$.

Commenter la bonne définition de $F\left(\frac{1}{X}\right)$.

Montrer que $F(X) = F\left(\frac{1}{X}\right)$ **ssi** il existe $G \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F = G\left(X + \frac{1}{X}\right)$.

Indication p. 17

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Rigidité)
Par définition $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$ ssi $P_1Q_2 - P_2Q_1 = 0$.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Le classique P' sur P)
Dans $\mathbb{C}[X]$ tous les polynômes sont scindés.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Racines de l'unité)
Les racines sont connues et sont simples ($\mathbb{U}_n$).

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Un calcul qui revient souvent)
Les racines sont connues et sont simples ($[\![0, n]\!]$).

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Gauss-Lucas)
Commencer par scinder P, $P = \alpha \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$ et traiter le cas des racines de P' qui sont racines de P.

Considérer la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ pour montrer que pour tout z qui n'est pas racine de P,

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{|z - \lambda_k|^2}(z - \lambda_k).$$

Évaluer ensuite en une racine de P' qui n'est pas racine de P, et constater que pour tout k, $\frac{m_k}{|z-\lambda_k|^2} > 0$.

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Le changement de variables à connaître)
Changement de variables $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Ainsi on peut intégrer toute fraction rationnelle en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Indication 7 · Énoncé p. 3 (Quelques calculs de sommes)
DÉS et télescopage.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Quelques sommes de calculs)
DÉS.

Plus précisément regarder $\frac{P'}{P}$ avec $P = \frac{X^n-1}{X-1}$.

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Des décompositions en éléments simples)

1. Remarquer que $X = (X - \lambda) + \lambda$ et binôme.
2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X^n-1}$ et dériver
3. Idem et l'élever au carré.
4. RAS.
5. Les pôles sont simples et sont les éléments de $\mathbb{U}_{2n} \setminus \mathbb{U}_n$.

6. Les parties polaires autres que celles de 1 sont immédiates. Il n'en reste plus qu'une à déterminer.

Indication 10 · Énoncé p. 5 (Fractions rationnelles et racines)
Faire exactement la même preuve que pour $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ (par exemple descente infinie, ou irréductibilité et Euclide, ou parité des valuations en les irréductibles, etc.).

Indication 11 · Énoncé p. 5 (Quelques redites du chapitre polynômes)
1. DES de $\frac{P'}{P}$ puis dériver. Constater qu'un réel au carré est positif. (Traiter à part les racines de P si nécessaire).
2. Idem, DES de $\frac{P'}{P}$ et unicité de la décomposition en éléments simples.

Indication 12 · Énoncé p. 5 (Rolle polynomial sans Rolle)
1. Multiplicités $m_k - 1$.
2. Décroissant sur chaque intervalle $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ et de limites $+\infty$ en λ_k^+, et $-\infty$ en λ_k^-.
3. TVI
4. Compter les racines.

Indication 13 · Énoncé p. 6 (Degré et dérivée ou dérivée discrète)
1. Rappeler le cas des polynômes, remarquer que

$$D\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{P'Q - Q'P}{Q^2}$$

et

$$\Delta\left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{\Delta(P)Q - Q\Delta(P)}{Q(X+1)\ Q(X)}$$

puis majorer le degré d'une somme.
2. Par exemple $1 - \frac{1}{X^2}$.
3. Plusieurs façons de procéder. Par exemple, sur $\mathbb{C}(X)$, considérer la décomposition en éléments simples de $\frac{F'}{F}$ (dérivée logarithmique) puis étudier le comportement de l'évaluation en z lorsque $|z| \to +\infty$ pour conclure sur le degré. Ou encore juste considérer le cas d'égalité dans le degré d'une somme pour $P'Q - PQ'$ en utilisant $\deg(P) \neq \deg(Q)$.

Indication 14 · Énoncé p. 6 (Arctangente n'est pas une fraction rationnelle)
Remarquer que pour une fraction rationnelle admettant une limite finie en $+\infty$, elle admet alors la même valeur en $-\infty$.

Indication 15 · Énoncé p. 6 (Primitivation de fractions rationnelles)
1. Pour justifier qu'une fraction rationnelle est une dérivée il suffit d'exhiber G tel que $G' = F$.

Pour justifier que ce n'est pas une dérivée, au choix montrer que les primitives en tant que fonctions ne sont pas des fractions rationnelles (pourquoi est-ce suffisant ?)

et pour cela étudier par exemple le comportement en l'infini ou encore faire une étude préliminaire sur le degré. On obtient

(i) Pas une dérivée.
(ii) Dérivée.
(iii) Pas une dérivée.
(iv) Pas une dérivée.
(v) Pas une dérivée.
(vi) Dérivée.

2. Une condition suffisante et que les coefficients des termes en $\frac{1}{(X-\lambda)^1}$ sont nuls. Pour montrer qu'elle est nécessaire écrire une décomposition en élément simple de G tel que $G' = F$ puis dériver.

3. Idem pour les éléments simples correspondant aux racines réelles. Pour les polynômes de degré 2 il est suffisant que les seuls termes non nuls soient de la forme $\frac{c(2X+a)}{(X^2+aX+b)^n}$ avec $n \geq 2$, et montrer de même que c'est nécessaire.

Indication 16 · Énoncé p. 7 (Sommes de Newton et DES)

1. Méthode polynomiale: mettre au même dénominateur et utiliser les relations coefficients-racines.

Méthode fraction rationnelle: Décomposer en éléments simples $\frac{P'}{P}$ et évaluer en 0.

2. Idem et dériver.

Indication 17 · Énoncé p. 7 (Image d'une fraction rationnelle)
Si il existe γ tel que $\gamma \notin F(\mathbb{C})$ alors avec $F = \frac{P}{Q}$ on a $P - \gamma Q$ ne s'annule jamais donc est constant.

Indication 18 · Énoncé p. 7 (Fractions rationnelles paires et impaires)
Rappeler le cas des polynômes et traiter numérateur et dénominateur.

Indication 19 · Énoncé p. 8 (Tchebychev caché dans un TD de fractions rationnelles)

1. Il s'agit bien entendu des polynômes de Tchebychev. Établir par exemple l'existence à l'aide de la relation de récurrence.

2. Commencer par déterminer l'ensemble des racines de T_n et montrer qu'elles sont simples.

Ensuite écrire que pour θ qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$.

$$\frac{1}{T_n(\cos(\theta))} = \frac{1}{\cos(n\theta)}$$

et considérer l'équivalent quand θ tend vers $\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}$.

Indication 20 · Énoncé p. 8 (Tangente de l'angle multiple)

1. RAS.

2. Procéder par récurrence.

Indication 21 · Énoncé p. 8 (Des relations parmi d'autres)
Il s'agit dans chaque cas d'effectuer une décomposition en éléments simples, plus précisément effectuer la DSE de

1. $\dfrac{1}{P'}$

2. $\dfrac{X}{P}$

3. $\dfrac{P''}{P}$

Indication 22 · Énoncé p. 9 (Minoration des valeurs d'un polynôme)

1. Considérer la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{X(X-1)\cdots(X-n)}$, puis considérer l'équivalent lorsque $n \to +\infty$ (ou alors multiplier par X).

2. Constater à l'aide de l'égalité précédente que

$$|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}P(k)\ | = 1$$

et que par somme usuelle

$$\sum_{k=0}^{n}|(-1)^{n-k}\frac{1}{n!}\binom{n}{k}P(k)\ | \leq \frac{2^n}{n!}\max_{k\in[\![0,n]\!]}(|P(k)|).$$

3. Regarder un polynôme équi-oscillant entre ces bornes, i.e l'interpolation de Lagrange en les points $\left(k,(-1)^{n-k}\frac{n!}{2^n}\right)$ et vérifier le caractère unitaire.

Indication 23 · Énoncé p. 9 (Un autre exemple d'anneau à valuation)

1. Utiliser les règles de calcul des degrés.

2. Idem.

3. Montrer que si on a une fraction de degré $-n$ on a toutes les fractions de degré $-n$.

Indication 24 · Énoncé p. 9 (Idéaux des principaux)

1. Comme pour les décimaux.

2. Montrer la principalité.

Indication 25 · Énoncé p. 10 (Séries de Laurent finies)
Pour le caractère strict montré que si $b \neq a$ alors $\frac{1}{X-b} \notin \mathbb{C}\big[(X-a)^{\pm 1}\big]$.

Indication 26 · Énoncé p. 10 (Coefficients de Taylor d'une fraction rationnelle)
Montrer qu'il existe deux polynômes P et Q tels que pour tout n assez grand

$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{Q^{(k)}}{k!}(\alpha)\frac{F^{(n-k)}}{(n-k)}(\alpha) = 0.$$

Indication 27 · Énoncé p. 10 (Fractions rationnelles périodiques)
Par exemple montrer qu'il existe γ tel que F et γ coïncident en une infinité de points.

Indication 28 · Énoncé p. 10 (Fractions rationnelles conservant le cercle unité)
Commencer par traiter le cas des polynômes, et constater que les X^n conviennent.

Remarquer que pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$,

$$\frac{X-\alpha}{\overline{\alpha}X-1}$$

convient et qu'un produit de fonctions qui convient, convient.

Enfin remarquer que pour α une racine non nulle $\frac{1}{\overline{\alpha}}$ est un pôle.

Indication 29 · Énoncé p. 10 (Comment faire sans Lagrange ?)
Constater qu'en s'inspirant de Lagrange, si n n'est pas un pôle de F on a

$$F = \left(\frac{F(X)-F(n)}{X-n}\right)(X-n)+F(n).$$

Constater que la «hauteur» (somme des degrés d'une forme irréductible) de $\frac{F(X)-F(n)}{X-n}$ est strictement plus petite que celle de F.

Alternativement remarquer que pour le système en les coefficients de P et Q issu de $P(n)-F(n)Q(n)=0$ est un système rationnel admettant une solution complexe donc par un argument de pivot une solution rationnelle. Conclure avec assez de points et rigidité.

Indication 30 · Énoncé p. 11 (Morphismes et automorphismes de $\mathbb{K}(X)$: premier sens)

1. Constater que pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(F)$ a un sens et est non nul.
2. Évaluation.
3. $G = \Phi(X)$.
4. Faire le calcul explicite.
5. Expliciter l'inverse.

Indication 31 · Énoncé p. 11 (Automorphismes de $\mathbb{K}(X)$: la réciproque)

1. On a A divise $(a_0 - b_0X)B^n$ et idem pour B.
2. Écrire $F = \frac{\sum a_k X^k}{\sum b_k X^k}$ et $G = \frac{A}{B}$.
3. Il ne s'agit plus qu'à faire la synthèse à l'aide de l'exercice 30 (et un automorphisme est surjectif).

Indication 32 · Énoncé p. 12 (Encore du Tchebychev ?)
Remarquer l'astuce des physiciens: si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$ appliquée à $\frac{P(X)}{Q(X)}$ et $\frac{P(\frac{1}{X})}{Q(\frac{1}{X})}$.

Remarquer (en utilisant les résultats d'un mathématicien russe bien connu) que $X^n + \frac{1}{X^n}$ est un polynôme en $X + \frac{1}{X}$.