Intégration

Énoncés 2
Avant toute chose 2
Propriétés du cours 2
Les indispensables 4
Variations autour des indispensables 9
Calculs abstraits 14
Calculs explicites 22
Indications 30
Solutions 42

Énoncés

Dans tout le sujet, sauf mention du contraire, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $[a,b]$ $(a < b)$ est un segment de $\mathbb{R}$.

De plus pour $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$ on notera (dans ce TD),

- ▹ la norme infinie de f:
$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} (|f(t)|)$$
- ▹ la valeur moyenne de f:
$$⨍_a^b f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$
- ▹ pour $p \geq 1$ la norme L^p de f:
$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
- ▹ $f \in \mathbb{K}(X)$ pour f est une fonction fraction rationnelle i.e il existe $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall t \in [a,b]$, $f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ en supposant que Q ne s'annule pas sur $[a,b]$ (il s'agit d'un abus de notation, cf TD dédié).

Avant toute chose

Faire régulièrement les exercices du cahier de calcul.

Propriétés du cours

Exercice 1 (◑★♣ Sommes de Riemann)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$.

1. Montrer que
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

2. On suppose de plus que $f \in \mathrm{Lip}([a,b],\mathbb{C})$.

Montrer que
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f + O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. Que dire si $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$?

4. Que dire dans le cas $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$?

Indication p. 30

Exercice 2 (◔★♣ Une inégalité fondamentale)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \|f\|_\infty \int_a^b |g|.$$

Indication p. 30

Exercice 3 (◔★♣ Intégrales et parité)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([-a,a],\mathbb{R})$ une fonction paire.

Montrer que

$$\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([-a,a],\mathbb{R})$ une fonction impaire.

Montrer que

$$\int_{-a}^a f = 0.$$

Indication p. 30

Exercice 4 (◔★♣ Égalités et inégalités de la valeur moyenne)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$⨍_a^b f = f(c).$$

2. Que dire dans le cas où $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$? Que dire dans le cas $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$?

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\left|⨍_a^b f\right| \leq \|f\|_\infty.$$

Indication p. 30

Les indispensables

Exercice 5 (◔★ Convergence uniforme et convergence de l'intégrale)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$ et $(f_n) \in \left(\mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})\right)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Montrer que

$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \int_a^b f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

Que dire de la réciproque ?

Indication p. 30

Exercice 6 (◔★ Linéarisation et Cie)
Soit $\omega > 0$.

1. Soit $\varphi \in \mathbb{R}$.

Calculer

$$⨍_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t.$$

2. Soient $n, m \in \mathbb{N}$.

Calculer

$$⨍_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 30

Exercice 7 (◔★ Prolongement de la valeur moyenne)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\begin{aligned}\varphi :]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ⨍_0^x f\end{aligned}$$

admet un prolongement par continuité en 0.

Indication p. 30

Exercice 8 (◔★ Approximation d'un Dirac)
Soit $\chi \in \mathcal{C}^0_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ définie par $\chi = 1_{[0,1]}$.

Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$,

$$\int_0^1 f(t) n\chi(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0).$$

Indication p. 30

Exercice 9 (◔★ Des orthogonaux à foison)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$.

1. Montrer que

$$\left(\forall g \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C}), \int_a^b fg = 0\right) \Leftrightarrow (f = 0).$$

2. Montrer que

$$\left(\forall g \in \mathrm{Esc}([a,b], \mathbb{C}), \int_a^b fg = 0\right) \Leftrightarrow (f = 0).$$

3. Montrer que

$$\left(\forall (\alpha,\beta) \in [a,b]^2, \int_\alpha^\beta f = 0\right) \Leftrightarrow (f = 0).$$

Indication p. 30

Exercice 10 (◔★ Wallis)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n\,\mathrm{d}t.$$

1. Déterminer une relation de récurrence satisfaite par la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer une expression explicite à l'aide de factorielles de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer un équivalent simple de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 31

Exercice 11 (◔★ Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que

$$|\int_a^b fg| \leq \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}.$$

Indication p. 31

Exercice 12 (◑★ Inégalité de Holder)

1. Soient $(p,q) \in (1,+\infty)^2$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Montrer que $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.
2. Soit $(p,q) \in [1,+\infty]^2$ tels que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$

Montrer que

$$|\int_a^b fg\ | \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Indication p. 31

Exercice 13 (◑★ Inégalité de Minkowski)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$ et $p \in [1,+\infty]$.

Montrer que

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Indication p. 31

Exercice 14 (◑★ Vers la véritable inégalité de Jensen)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convexe.

On suppose de plus que φ est continue.

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b], I)$.

Montrer que

$$\varphi\left(\fint_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \fint_a^b \varphi(f(t))\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 31

Exercice 15 (◔★ Lemme de Lebesgue cas $\mathcal{C}^1$)
Soit $\omega > 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{C})$.

Montrer que

$$\int_a^b f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication p. 32

Exercice 16 (◔★ Moyenne d'une fonction périodique)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction périodique.

Soit $T > 0$ une période de f et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la valeur de

$$\fint_a^{a+T} f$$

ne dépend pas
1. de $a \in \mathbb{R}$,
2. de $T > 0$ une période de f.

On appelle cette valeur **la** valeur moyenne de f.

Indication p. 32

Exercice 17 (◔★ Périodicité et primitivation)
Déterminer les fonctions continues périodiques de primitives périodiques.

Indication p. 32

Exercice 18 (◔★ Un petit changement très utile)
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'il existe une et unique fonction $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\tilde{f}' = |f'|$$

et

$$\tilde{f}(a) = |f(a)|.$$

2. Montrer que

$$\forall t \in [a,b], |f(t)| \leq \tilde{f}(t).$$

Indication p. 32

Exercice 19 (◔★ Vers la formule de Duhamel)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On pose pour tout $t \in [a,b]$,

$$y(t) = \int_a^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Montrer que y est dérivable et exprimer y' en fonction de y et f.

Indication p. 32

Exercice 20 (◔★ Vers le lemme de Gronwall version intégrale)
Soit $y \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

On suppose que pour tout $t \in [a,b]$,

$$y(t) \leq y(a) + \int_a^t \lambda y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Montrer que pour tout $t \in [a,b]$,

$$y(t) \leq y(a)e^{\lambda(t-a)}.$$

Indication p. 33

Exercice 21 (◑★ Vers le lemme d'Abel)
On admettra dans cet exercice le résultat suivant (convergence absolue): étant donnée une fonction $z \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ **si** $\int_0^x |z(t)|\,\mathrm{d}t$ converge lorsque $x \to +\infty$ **alors** $\int_0^x z(t)\,\mathrm{d}t$ converge quand $x \to +\infty$.

Soient $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ de primitives bornées et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante et tendant vers 0.

Montrer que la fonction $\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque $x \to +\infty$.

Indication p. 33

Exercice 22 (◔★ Bosse glissante)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ n(2-nx) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que

$$\forall x \in [0,1], \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = 0.$$

2. Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Commenter.

Indication p. 33

Variations autour des indispensables

Exercice 23 (◔★ Prolongement par continuité des moments)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 33

Exercice 24 (◔★ Jensen pondéré)
Soit $\omega \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R}_+^*)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Soit $\varphi : f([a,b]) \to \mathbb{R}$ convexe.

Montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{\int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t}\int_a^b f(t)\omega(t)\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{\int_a^b \omega(t)\mathrm{d}t}\int_a^b \phi(f(t))\omega(t)\mathrm{d}t.$$

Indication p. 33

Exercice 25 (◔★ Égalité de la moyenne bis)
Soit $\omega \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R}_+^*)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{\int_a^b \omega(t)\,\mathrm{d}t}\int_a^b f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 33

Exercice 26 (◔★ Inégalité de Cauchy-Schwarz bis)
Soit $\omega \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],[0,+\infty[)$.

Soient $f,g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que

$$\left|\mathrm{Re}\left(\int_a^b f\overline{g}\omega\right)\right| \leq \sqrt{\int_a^b |f|^2\omega}\sqrt{\int_a^b |g|^2\omega}.$$

Indication p. 33

Exercice 27 (◔☆ Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire)
Déterminer une CNS sur $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ pour que

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f|.$$

Indication p. 33

Exercice 28 (◑★ Lemme de Lebesgue bis)
Soit $T > 0$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction T-périodique.

On note

$$\gamma = \fint_0^T g$$

la valeur moyenne de g (cf exercice 16).

Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{C})$,

$$\int_a^b f(t)g(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\gamma\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 34

Exercice 29 (◑★ Lemme de Lebesgue cas $\mathcal{C}^0_{pm}$)
Soit $\omega > 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b], \mathbb{C})$.

Montrer que

$$\int_a^b f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication p. 34

Exercice 30 (◔★ Valeur moyenne globale et périodicité)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ T-périodique.

Montrer que

$$\fint_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \fint_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 34

Exercice 31 (◑★ Convergence des normes p)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\|f\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty.$$

Indication p. 34

Exercice 32 (◑☆ Seconde inégalité de la moyenne)
Soient $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ monotone et $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. On suppose de plus que f est décroissante positive.

   Montrer qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^d g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 34

Exercice 33 (◔★ Orthogonalité, polynômes et changements de signe)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_a^b f(t)P(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois.

Indication p. 34

Exercice 34 (◔☆ Orthogonal au sinus et cosinus)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$.

On suppose que

$$\int_0^\pi f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[0,\pi]$.

Indication p. 34

Exercice 35 (◕★ Un début d'exemple de principe variationnel)
Soit $E = \{y \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid y(0) = y(1) = 0\}$.

Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

On définit

$$\begin{aligned} F : E &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \frac{1}{2}\int_0^1 (y')^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 y^4 - \int_0^1 yg. \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $y_0 \in E$ on a l'équivalence

$$\left(F(y_0) = \min_{y\in E}(F(y))\right) \Leftrightarrow (-y_0'' + y_0^3 = g).$$

Indication p. 34

Exercice 36 (◔☆ Moyenne et moyennes)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in]a,b[$.

Montrer que

$$\min\left(\fint_a^c f, \fint_c^b f\right) \leq \fint_a^b f \leq \max\left(\fint_a^c f, \fint_c^b f\right)$$

Indication p. 34

Exercice 37 (◑☆ Encore des moyennes prolongées en 0)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R}_+^*)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on note

$$M(x) = \left(\fint_a^b f(t)^x \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Montrer que M admet un prolongement par continuité en 0.

Indication p. 35

Exercice 38 (◑★ Approximation d'un Dirac bis)
Soit $\chi \in \mathcal{C}^0_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que $\forall t > 1$, $\chi(t) = 0$ et $\int_0^1 \chi = 1$.

Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$,

$$\int_0^1 f(t) n \chi(nt) \, \mathrm{d}t \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(0).$$

Indication p. 35

Calculs abstraits

Exercice 39 (◔★ Factorisation et signe)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f = 0$.

Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq f \leq M$.

Montrer

$$\int_0^1 f^2 \leq -mM.$$

Indication p. 35

Exercice 40 (◑★ Un cas classique de découpe)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$.

1. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{f(1)}{n+1} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Indication p. 35

Exercice 41 (◑☆ Tourner autour d'un pôle simple)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$.

Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $|\omega - z| \neq r$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{P\big(\omega + re^{i\theta}\big)}{(\omega + re^{i\theta}) - z}\big(ire^{i\theta}\big)\,\mathrm{d}\theta.$$

On pourra distinguer les cas $|\omega - z\,| > r$ et $|\omega - z\,| < r$.

Indication p. 35

Exercice 42 (◔★ Encore Cesàro)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{C})$.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ telle que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Montrer que

$$⨍_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Indication p. 35

Exercice 43 (◔★ Des dérivées d'intégrales)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Dans chacun des cas montrer que les fonctions sont dérivables et déterminer leurs dérivées.

1. $$\int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. $$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$$

3. $$\int_0^{2\pi} f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Indication p. 36

Exercice 44 (◑★ La dérivée seconde était en fait un Dirac)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{C})$.

Pour $x \in [a,b]$ on pose

$$\varphi(x) = \int_a^b |x-t|\ f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{C})$ et déterminer sa dérivée.

Indication p. 36

Exercice 45 (◑☆ Limite et découpe)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

Montrer que

$$\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0).$$

Indication p. 36

Exercice 46 (◔☆ Cas d'égalité dans un cas d'égalité)
Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $M \in \mathbb{R}$ un majorant de f.

On suppose que

$$⨍_a^b f = M.$$

Que dire de f ?

Indication p. 36

Exercice 47 (◑★ Inégalité de Tchebychev)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ toutes les deux croissantes.

Montrer que

$$⨍_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \; ⨍_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq ⨍_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 36

Exercice 48 (◑★ Un peu de fonction beta)
Pour $x, y \geq 1$ on note

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tous $x, y \geq 1$ on a la relation de symétrie

$$\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x)$$

2. Montrer que pour tous $x, y \geq 1$ on a la relation de Pascal

$$\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(x,y+1) + \mathrm{B}(x+1,y)$$

3. Montrer que pour tout $x, y \geq 1$ on a la formule de la capitaine

$$y\,\mathrm{B}(x,y) = (x+y)\,\mathrm{B}(x,y+1)$$

4. Montrer que $x, y \geq 1$ sont entiers,

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$$

5. Montrer que pour tous $x, y \geq 1$ on a la relation de Wallis généralisée

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2x-1}(\sin(\theta))^{2y-1}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{B}(x,y)$$

Indication p. 36

Exercice 49 (◔☆ Mini initialisation de Maclaurin)
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{4}\|f'\|_\infty.$$

Indication p. 37 · Solution p. 42

Exercice 50 (◑★ Erreur dans la méthode des trapèzes)
Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{C})$.

Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty.$$

Indication p. 37 · Solution p. 42

Exercice 51 (◑★ Primitivation d'une réciproque, version calcul)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1(I,J)$ bijective.

On note F une primitive de f sur I et $f^{-1} \in \mathcal{C}^0(J,I)$ la bijection réciproque de f.

Déterminer une primitive de f^{-1} sur J à l'aide de F et f^{-1}.

Indication p. 37

Exercice 52 (◑★ Primitivation d'une réciproque, version schéma)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^1([a,b],[f(a),f(b)])$ bijective strictement croissante.

On note $f^{-1} \in \mathcal{C}^0([f(a),f(b)],[a,b])$ la bijection réciproque de f.

Montrer que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = bf(b) - af(a)$$

et faire un schéma.

Indication p. 37

Exercice 53 (◕★ Primitivation d'une réciproque, le cas général)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ bijective.

On note F une primitive de f et $f^{-1} \in \mathcal{C}^0(J, I)$ la bijection réciproque de f.

Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in J$,

$$\int_\alpha^\beta f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = [f^{-1}(y)y - F(f^{-1}(y))]_\alpha^\beta.$$

Indication p. 37

Exercice 54 (◑★ Un exercice prisé de M. V.)
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.

On note g ce prolongement. On cherche à montrer que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1. Que dire de g sur $\mathbb{R}^*$?
2. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}^*$ une expression explicite de $g^{(n)}(x)$.
3. À l'aide d'une formule de Taylor reste-intégral réécrire l'expression explicite de $g^{(n)}(x)$ sous forme d'une intégrale.
4. Conclure.

Indication p. 37

Exercice 55 (◔☆ Fonction définie implicitement)
1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un et unique réel $\xi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_x^\xi e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1.$$

2. On note $\varphi(x)$ cet unique réel.

   Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Indication p. 38

Exercice 56 (◔☆ Aire plus grande qu'un triangle)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,+\infty[)$ telle que

$$\int_0^1 f \leq \frac{1}{2}.$$

Montrer que f admet un point fixe.

Indication p. 38

Exercice 57 (◑☆ En vrac: à la somme de Riemann)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on pose $x_k = 0 + \frac{(1-0)k}{n}$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t \right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 |f|.$$

Faire un schéma.

Indication p. 38

Exercice 58 (◑☆ Un point fixe de moyenne)
On définit l'endomorphisme

$$\begin{aligned} T : \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C}) &\to \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C}) \\ f &\mapsto \left(x \mapsto \frac{f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f\left(\frac{x+b}{2}\right)}{2} \right). \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ il existe $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ telle que

$$\forall x \in [a,b], (T^n f)(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x).$$

Indication p. 38

Exercice 59 (◔★ Riemann au carré)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Indication p. 38

Exercice 60 (◔☆ En vrac: comment découper)
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Montrer que

$$x \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ et déterminer sa dérivée seconde.

Indication p. 38

Exercice 61 (◑☆ Un découpage itératif)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+^*)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une et unique subdivision $(x_{0,n},\cdots,x_{n,n})$ de $[a,b]$ telle que

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f = \frac{1}{n}\int_a^b f.$$

2. Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k,n}).$$

Indication p. 38

Exercice 62 (◔☆ En vrac: un quasi-télescopage)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit $h > 0$.

Montrer que

$$\int_0^A (f(x+h) - f(x))\,\mathrm{d}x \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ell h - \int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Indication p. 38

Exercice 63 (◔☆ En vrac: trouver le bon polynôme)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

On suppose que

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4.$$

Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$.

Indication p. 39

Calculs explicites

Exercice 64 (◔★ Comment faire sans ln)
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Déterminer les primitives de

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \frac{1}{t-z}. \end{aligned}$$

Indication p. 39

Exercice 65 (◑★ Puissance fois ln)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Déterminer les primitives de

$$\begin{aligned} f_\alpha :]0,+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \ln(x) \end{aligned}$$

Indication p. 39

Exercice 66 (◔★ Des calculs de sommes)
Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ des sommes suivantes:

1. Pour $\alpha > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}.$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{k}{n}}$$

3. $$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

4. $$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k(n-k)}.$$

5. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}.$$

6. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}.$$

7. $$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}.$$

Indication p. 39

Exercice 67 (◔☆ Une somme de Riemann)
Montrer que lorsque $n \to +\infty$

$$\sum_{k=1}^{n} k\ln(k) = \frac{1}{2}\ln(n)n^2 - \frac{1}{4}n^2 + o_{n\to+\infty}(n^2).$$

Indication p. 39

Exercice 68 (◔☆ Une limite de produit)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+)$.

1. Montrer que pour tout $x > -\frac{1}{2}$

$$x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge quand $n \to +\infty$ et déterminer sa limite.

Indication p. 39

Exercice 69 (◑★ Éléments simples d'ordre 2)

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les primitives de

$$x \mapsto \frac{ax+b}{(1+x^2)}.$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les primitives de

$$x \mapsto \frac{ax+b}{(1+x^2)^2}.$$

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les primitives de

$$x \mapsto \frac{ax+b}{(1+x^2)^3}.$$

4. Commenter.

Indication p. 39

Exercice 70 (◔★ Aire sous le sinus cardinal)
On définit le sinus cardinal sinc par

$$\begin{aligned}\operatorname{sinc} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

1. Montrer que pour tout $A \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^A \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

est bien défini.

2. Soit $\delta > 0$.

Montrer que

$$A \mapsto \int_\delta^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

est croissante et majorée.

3. En déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_0^A \operatorname{sinc}(t)\,\mathrm{d}t \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Indication p. 39

Exercice 71 (◔★ Intégrales qui tournent ou comment récupérer les coefficients)
Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$⨍_0^{2\pi} P\big(e^{i\theta}\big)e^{-ik\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

2. Calculer

$$⨍_0^{2\pi} \big|P\big(e^{i\theta}\big)\big|^2\,\mathrm{d}\theta.$$

Indication p. 40

Exercice 72 (◑☆ Valeur moyenne et lipschitzianité)
Soit $f \in \mathrm{Lip}([0,+\infty[,\mathbb{C})$ une fonction lipschitzienne et $k>0$ tel que f est k-lipschitzienne.

Montrer que

$$F : x \mapsto \fint_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

prolongée par continuité en 0 est $\frac{k}{2}$ lipschitzienne.

Indication p. 40

Exercice 73 (◔★ Une somme alternée)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^{2n}\,\mathrm{d}t$$

et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n+1} - I_n.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1} I_{n+1}.$$

3. Conclure que

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}.$$

Indication p. 40

Exercice 74 (◔★ Puissance et puissance de ln)
Pour $n, m \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ on note

$$I_{n,m} = \int_0^1 x^n (\ln(x))^m \, \mathrm{d}x.$$

1. Justifier la bonne définition de cette intégrale.
2. Montrer que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,
$$I_{n,m} = -\frac{m}{n+1} I_{n,m-1}.$$
3. En déduire une expression explicite de $I_{n,m}$.

Indication p. 40

Exercice 75 (◔☆ Suite d'intégrale sans IPP: Quotient de sinus)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} \, \mathrm{d}x.$$

1. Justifier la bonne définition de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n et de n.
3. Calculer I_0 et I_1.
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de I_n.

Indication p. 40

Exercice 76 (◔★ Suite d'intégrales sans IPP: un peu de binôme)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t} \, \mathrm{d}t.$$

1. Justifier la bonne définition de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n et de n.
3. Calculer I_0.
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
5. Retrouver ce résultat à l'aide d'une décomposition en éléments simples.

Indication p. 40

Exercice 77 (◑☆ Une astuce)
Déterminer pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ une expression de

$$I(x) = \fint_0^{2\pi} \ln\big(|x - e^{i\theta}|\big)\,\mathrm{d}\theta$$

.

Indication p. 41

Exercice 78 (◔☆ En vrac: pas une fonction en escalier)
Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor}\,\mathrm{d}x.$$

Commenter et faire un schéma.

Indication p. 41

Exercice 79 (◑★ Limite en l'infini d'éléments simples)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la fonction A_n par

$$\begin{aligned} A_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation de récurrence entre $A_n(x)$ et $A_{n+1}(x)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{x \to +\infty} A_n(x).$$

Indication p. 41

Exercice 80 (◔★ En vrac: encore Riemann)
Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de

$$\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Indication p. 41

Exercice 81 (◔★ En vrac: étude de fonction)
Soit g la fonction définie par

$$\begin{aligned} g :]0,1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Montrer que g admet un prolongement par continuité en 0 et en 1.

Indication p. 41

Exercice 82 (◑☆ En vrac: pas vraiment Lebesgue)
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$.

Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f(t)|\,|\sin(nt)\,|\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 41

Exercice 83 (◑☆ En vrac: un extrait d'oral X)
Déterminer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x.$$

Indication p. 41

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Sommes de Riemann)
1. Montrer que la fonction en escalier approche uniformément f ou bien reprendre la preuve de l'unicité dans la construction de l'intégrale.
2. Reprendre la preuve de l'unicité et majorer $\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t) - f(x_n)| \, \mathrm{d}t$ par lipschitzianité.
3. Rappel: par IAF et TBA, $\mathcal{C}^1 \subset \mathrm{Lip}$ sur un segment.
4. A priori la preuve précédente ne fonctionne plus. À posteriori comme le nombre de points problématiques est fini, tout fonctionne. Le rédiger.

Indication 2 · Énoncé p. 3 (Une inégalité fondamentale)
Majorer de manière élémentaire en remarquant que $|fg| \leq \|f\|_\infty \, |g|$.

Indication 3 · Énoncé p. 3 (Intégrales et parité)
Dans les deux cas,

$$\int_{-a}^{a} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t) \, \mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_{0}^{a} (f(t) + f(-t)) \, \mathrm{d}t.$$

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Égalités et inégalités de la valeur moyenne)
1. TEAF.
2. La propriété n'est plus vraie, regarder par exemple $t \mapsto e^{it}$ sur $[0, 2\pi]$ ou $t \mapsto 1_{[0,\frac{1}{2}]}$ sur $[0, 1]$.
3. Majorer.

Indication 5 · Énoncé p. 4 (Convergence uniforme et convergence de l'intégrale)
Déjà vu en cours, écrire

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq (b-a) \|f_n - f\|_\infty.$$

La réciproque est fausse, cf par exemple une bosse glissante.

Indication 6 · Énoncé p. 4 (Linéarisation et Cie)
Linéariser. Il s'agit du fameux $\cos(\varphi)$ et des coefficients de Fourier de la physique.

Indication 7 · Énoncé p. 4 (Prolongement de la valeur moyenne)
Avec $F : x \mapsto \int_0^x f$ il faut montrer que $x \mapsto \frac{F(x)-F(0)}{x-0}$ admet un prolongement par continuité en 0.

Indication 8 · Énoncé p. 5 (Approximation d'un Dirac)
Il s'agit d'une reformulation de l'exercice 37.

Indication 9 · Énoncé p. 5 (Des orthogonaux à foison)
Le sens non immédiat est à chaque fois $\Rightarrow$.

1. C'est en particulier le cas pour $g = \overline{f}$.
2. Par exemple approcher $\overline{f}$ par une suite de fonctions en escalier et passer à la limite. Ou bien faire d'abord le point suivant.
3. Remarquer que cela revient à montrer que

$$\left(\forall(\alpha,\beta)\in[a,b]^2 \int_a^b f\mathbb{1}_{[\alpha,\beta]} = 0\right) \Leftrightarrow (f=0)$$

et que toute fonction en escalier est combinaison linéaire de fonctions indicatrices de segments (modulo des points qui n'importent pas dans l'intégrale).

Ou bien si f est non nulle alors en un point où f est non nulle, localement son signe/ argument varie peu.

Alternativement dans chacun des cas pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, par contraposée, si $f \neq 0$ il existe x_0 et $\delta > 0$ tel que f est strictement positive sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Choisir ensuite une fonction positive non nulle sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ et nulle en dehors.

Re-alternativement constater que pour le troisième point avec F une primitive de f on a pour tous α et β, $F(\alpha) = F(\beta)$ i.e F constante et donc $f = F' = 0$.

Indication 10 · Énoncé p. 5 (Wallis)

1. Effectuer une IPP, en se rappelant que $\sin^2 = 1 - \cos^2$.

On obtient que pour tout $n \geq 2$,

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}.$$

2. Distinguer les cas pairs et impairs.
3. Constater que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et que $W_n \sim W_{n-1}$.

Indication 11 · Énoncé p. 6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Faire de même que pour l'inégalité pour des sommes finies, par exemple étudier $t \mapsto \int_a^b (f + \mathrm{tg})^2$.

Indication 12 · Énoncé p. 6 (Inégalité de Holder)
Le cas $(1, +\infty)$ est traité dans l'exercice 2.

Commencer par le cas $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ et conclure par homogénéité.

Indication 13 · Énoncé p. 6 (Inégalité de Minkowski)
Utiliser l'inégalité de Hölder.

Indication 14 · Énoncé p. 7 (Vers la véritable inégalité de Jensen)
L'inégalité est bien définie car $\fint_a^b f \in I$.

Constater que pour $f \in \mathrm{Esc}([a,b], I)$ il s'agit de l'inégalité de convexité pour les sommes finies.

Ensuite approcher f continue par morceaux par des fonctions en escalier, par exemple par des sommes de Riemann, et passer à la limite.

On peut remarquer que l'hypothèse de continuité de φ est superflue, en effet une fonction convexe sur I est lipschitzienne sur tout segment intérieur à I, le cas des bords pouvant alors se traiter séparément.

Alternativement poser $\xi = \fint_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ alors il existe (pourquoi ?) $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [a,b]$,

$$\varphi(f(t)) \geq k(f(t)-\xi) + \varphi(\xi)$$

puis intégrer.

Indication 15 · Énoncé p. 7 (Lemme de Lebesgue cas $\mathcal{C}^1$)
Intégrer par parties pour faire apparaître du $\frac{1}{n}$ et majorer.

Indication 16 · Énoncé p. 7 (Moyenne d'une fonction périodique)

1. Dériver par rapport à a.
2. On rappelle que l'ensemble des périodes d'une fonction continue est de la forme $\tau\mathbb{N}^*$.

Indication 17 · Énoncé p. 7 (Périodicité et primitivation)
Avec $T > 0$ une période, montrer qu'une CNS est $\fint f = 0$ au sens de la valeur moyenne de l'exercice 16.

Indication 18 · Énoncé p. 8 (Un petit changement très utile)

1. Direct par le cours. On obtient de plus l'expression explicite

$$\forall t \in [a,b], \tilde{f}(t) = |f(a)| + \int_a^t |f'(s)|\,\mathrm{d}s.$$

2. Écrire

$$\forall t \in [a,b], f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)\,\mathrm{d}s$$

et conclure par inégalité triangulaire.

Indication 19 · Énoncé p. 8 (Vers la formule de Duhamel)
Constater que pour tout t,

$$y(t) = e^{\lambda t}\int_a^t e^{-\lambda s} f(s)\,\mathrm{d}s$$

et qu'il s'agit donc de la dérivée d'un produit.

Un résultat plus général mais de démonstration analogue fera partie du cours d'équations différentielles.

Indication 20 · Énoncé p. 8 (Vers le lemme de Gronwall version intégrale)
Poser $z : t \mapsto y(a) + \int_a^t \lambda y(s)\,\mathrm{d}s$ et étudier la monotonie de $t \mapsto z(t)e^{-\lambda t}$.

Un résultat plus général mais de démonstration analogue fera partie du cours d'équations différentielles.

Indication 21 · Énoncé p. 9 (Vers le lemme d'Abel)
Effectuer une IPP et utiliser le signe de f' dans l'encadrement de l'intégrale.

Indication 22 · Énoncé p. 9 (Bosse glissante)
Faire un schéma et des calculs explicites.

On commente que

$$\forall x \in [0,1], \varphi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\int_0^1 \phi_n(x)\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\nrightarrow} \int_0^1 0\mathrm{d}x$$

autrement dit la convergence point par point (dite convergence simple) **n**'implique **pas** la convergence des intégrales.

Autrement dit on ne peut **pas** passer sans précaution la limite «dans l'intégrale».

Indication 23 · Énoncé p. 9 (Prolongement par continuité des moments)
Commencer par traiter l'exercice 7.

Faire de même mais en remarquant que $f(0)x^{n+1} = (n+1)\int_0^x t^n f(0)\,\mathrm{d}t$.

Indication 24 · Énoncé p. 10 (Jensen pondéré)
Faire comme pour Jensen classique, cf 14.

Indication 25 · Énoncé p. 10 (Égalité de la moyenne bis)
Montrer que

$$\min_{[a,b]}(f)\int_a^b \omega(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t \leq \max_{[a,b]}(f)\int_a^b \omega(t)\,\mathrm{d}t$$

et conclure par TVI.

Alternativement montrer par l'absurde qu'une fonction d'intégrale nulle s'annule.

Indication 26 · Énoncé p. 10 (Inégalité de Cauchy-Schwarz bis)
Même preuve que pour l'inégalité classique de l'exercice 11

Indication 27 · Énoncé p. 10 (Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire)
On obtient qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ constant et r une fonction positive tels que pour tout t, $f(t) = r(t)e^{i\theta}$.

Indication 28 · Énoncé p. 11 (Lemme de Lebesgue bis)
Regarder d'abord les exercices 15, ainsi que 30.

Ensuite constater que quitte à retrancher g sa valeur moyenne on peut supposer que $\gamma = 0$ et utiliser la même méthode que pour le lemme de Lebesgue.

Indication 29 · Énoncé p. 11 (Lemme de Lebesgue cas $\mathcal{C}^0_{pm}$)
Procéder en deux étapes:

- ▷ Montrer le résultat pour un espace de fonctions bien choisi (par exemple $\mathcal{C}^1$ ou Esc).
- ▷ Approcher f par des fonctions de cet espace et découper avec précaution les ε.

Indication 30 · Énoncé p. 11 (Valeur moyenne globale et périodicité)
Faire comme Cesàro mais en un peu plus simple. Avec $A = nT + a$ où $a \in [0, T]$ couper l'intégrale en n intégrales sur une période et une intégrale entre 0 et a.

Indication 31 · Énoncé p. 12 (Convergence des normes p)

- ▷ Commencer par montrer que pour tout p, $\|f\|_p \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$.
- ▷ Par le théorème des bornes atteintes il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $|f(\xi)| = \|f\|_\infty$.
- ▷ Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout x dans $[\xi - \delta, \xi + \delta]$, $|f(x) - f(\xi)| \leq \varepsilon$.
- ▷ Montrer que

$$(2\delta)^{\frac{1}{p}} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \leq \|f\|_p.$$

- ▷ Conclure avec précaution « à la Cesàro ».

Indication 32 · Énoncé p. 12 (Seconde inégalité de la moyenne)

1. Effectuer une IPP en dérivant f et primitivant G et utiliser l'égalité de la moyenne sur $\int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Remarquer que $t = \frac{f(b)}{f(a)} \in [0, 1]$ et repérer une combinaison convexe.

Indication 33 · Énoncé p. 12 (Orthogonalité, polynômes et changements de signe)
Si ce n'était pas le cas construire un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de même signe que f et donc tq fP positif non nul.

Indication 34 · Énoncé p. 13 (Orthogonal au sinus et cosinus)
Si f ne s'annule qu'une fois construire un élément de $\mathrm{Vect}(\cos, \sin) = \{\cos(\cdot + \varphi), \varphi \in \mathbb{R}\}$ bien choisi.

Indication 35 · Énoncé p. 13 (Un début d'exemple de principe variationnel)
Commencer par montrer que $\big(F(y_0) = \min_{y \in E}(F(y))\big)$ équivaut à ce que pour tout $z \in E$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto F(y_0 + tz)$ admet un minimum en 0.

Faire ensuite une étude de fonction, avec une IPP.

Conclure par « orthogonalité ».

Indication 36 · Énoncé p. 13 (Moyenne et moyennes)
Remarquer que

$$\fint_a^b f = t\fint_a^c f + (1-t)\fint_c^b f$$

pour $t \in [0,1]$ bien choisi.

Indication 37 · Énoncé p. 14 (Encore des moyennes prolongées en 0)
On obtient $\exp\left(\fint_a^b \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right)$.

Indication 38 · Énoncé p. 14 (Approximation d'un Dirac bis)
S'inspirer sans scrupule de l'exercice 8.

Indication 39 · Énoncé p. 14 (Factorisation et signe)
Développer $(f-m)(M-f) \geq 0$.

Indication 40 · Énoncé p. 15 (Un cas classique de découpe)

1. Majorer.

2. Cela revient à montrer que

$$\int_0^1 (n+1)t^n(f(t)-f(1))\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour cela fixer un $\varepsilon > 0$, considérer un $\delta > 0$ correspondant dans la définition de la continuité de f en 1 et découper l'intégrale entre $[0, 1-\delta]$ et $[1-\delta, 1]$.

Indication 41 · Énoncé p. 15 (Tourner autour d'un pôle simple)

- ▷ Par homothétie se ramener à $r = 1$ et $\omega = 0$.
- ▷ En passant par la base de Taylor en z, se ramener au cas $P = 1$.
- ▷ Si $|z| < 1$ comparer à N fixé les valeurs de

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-ze^{-i\theta}}\,\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{N} \left(ze^{-ik\theta}\right)^k \mathrm{d}\theta$$

puis faire $N \to +\infty$.

- ▷ Si $|z| > 1$ comparer à N fixé les valeurs de

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{z}\frac{1}{1-\frac{e^{i\theta}}{z}}\mathrm{d}\theta \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{N+1} \left(\frac{e^{i\theta}}{z}\right)^k \mathrm{d}\theta$$

puis faire $N \to +\infty$.

Indication 42 · Énoncé p. 15 (Encore Cesàro)
Faire comme pour le Cesàro des suites:

- ▷ Se ramener à $\ell = 0$
- ▷ Utiliser la quantification de la définition de la limite.
- ▷ Couper l'intégrale en deux.
- ▷ Majorer le second terme.
- ▷ Re-quantifier pour majorer le premier.

▷ Conclure.

Indication 43 · Énoncé p. 16 (Des dérivées d'intégrales)

1. Avec F une primitive de f, dériver une composée $x \mapsto F(x^2) - F(x)$.
2. Formule de cosinus d'une somme.
3. Repasser par exemple par des taux d'accroissements et encadrer.

Indication 44 · Énoncé p. 16 (La dérivée seconde était en fait un Dirac)
Commencer par constater que si $x \notin [a, b]$ alors φ est constante.

Ensuite couper par Chasles en remarquant que les termes problématiques pour une dérivée seconde se simplifient.

Indication 45 · Énoncé p. 16 (Limite et découpe)
Au pire repasser par les définitions ε-esques en découpant l'intégrale entre $[0, 1-\delta]$ et $[1-\delta, 1]$.

Indication 46 · Énoncé p. 17 (Cas d'égalité dans un cas d'égalité)
Remarquer que $M - f$ est positive d'intégrale nulle.

Indication 47 · Énoncé p. 17 (Inégalité de Tchebychev)
Utiliser la version somme finie et passer à la limite.

Ou plus simplement adapter la preuve:

▷ constater que pour tous $(t, s) \in [a, b]^2$,

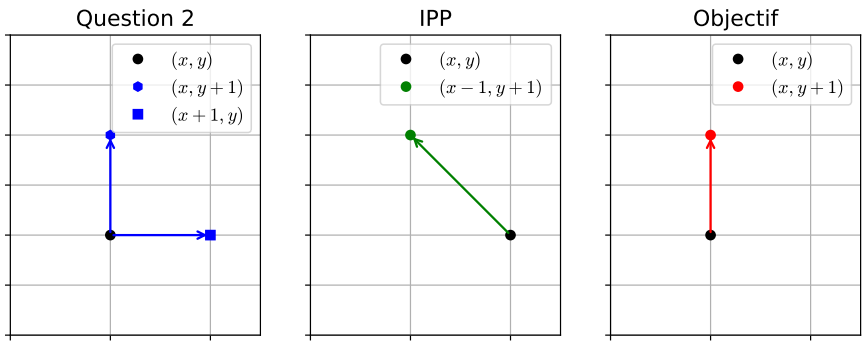
$$(f(t) - f(s))(g(t) - g(s)) \geq 0$$

▷ Intégrer par rapport à une variable puis par rapport à une autre

▷ Simplifier.

Indication 48 · Énoncé p. 17 (Un peu de fonction beta)

1. Changement de variable $s = 1 - t$.
2. Remarquer que $t + (1 - t) = 1$.
3. Commencer par une IPP et méditer le schéma suivant:



4. Fixer x et faire une récurrence sur y.
5. Par exemple constater que $t = \sin(\theta)^2$ est une bonne idée.

Indication 49 · Énoncé p. 18 (Mini initialisation de Maclaurin)
Faire une IPP, en intégrant 1 de manière symétrique par $t \mapsto t - \frac{a+b}{2}$.

Solution p. 42

Indication 50 · Énoncé p. 18 (Erreur dans la méthode des trapèzes)
Faire deux IPPs ou bien utiliser une IAF bien choisie.

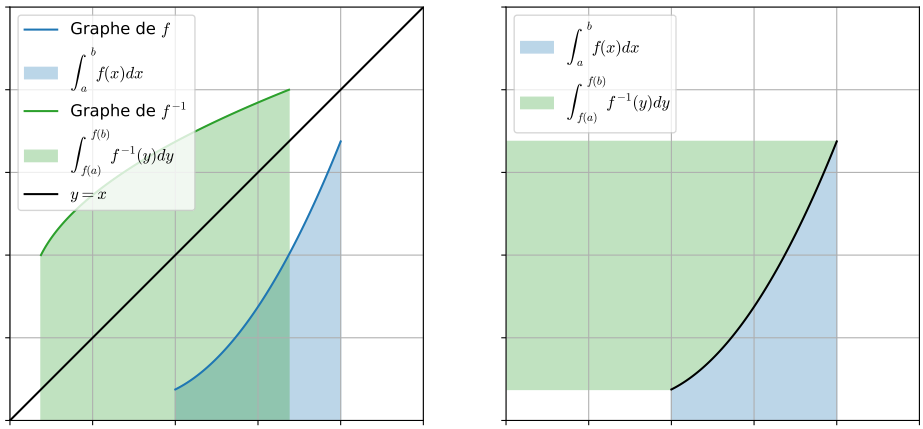
Solution p. 42

Indication 51 · Énoncé p. 18 (Primitivation d'une réciproque, version calcul)
Calculer $\int_a^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ à l'aide du changement de variables $y = f(x)$ puis d'une IPP.

Indication 52 · Énoncé p. 18 (Primitivation d'une réciproque, version schéma)
Cf exercice 51.

Beaucoup de façon de le montrer: IPP, changement de variables, dérivée de la borne supérieure, etc.

Faire le schéma, on peut obtenir par exemple:



Indication 53 · Énoncé p. 19 (Primitivation d'une réciproque, le cas général)
Plusieurs options, dans tous les cas commencer par traiter les exercices 51 et 52.

Constater ensuite qu'ici on a seulement C^0 et pas C^1.

On peut ensuite par exemple remplacer les intégrales par des sommes et les IPP par des transformées d'Abel.

Indication 54 · Énoncé p. 19 (Un exercice prisé de M. V.)

1. Définition de la dérivabilité en 0.
2. Aucun pb.
3. Utiliser Leibniz.
4. Reconnaître une formule de Taylor, mais de x à 0 !

5. Montrer la convergence et ne pas oublier le théorème de prolongement adapté.

Indication 55 · Énoncé p. 19 (Fonction définie implicitement)
Noter F une primitive de $t \mapsto e^{t^2}$.

Remarquer qu'il suffit de trouver φ tel que

$$F(\varphi(x)) = F(x) + 1.$$

Indication 56 · Énoncé p. 20 (Aire plus grande qu'un triangle)
Que dire de $\int_0^1 (f(t) - t)\,\mathrm{d}t$?

Indication 57 · Énoncé p. 20 (En vrac: à la somme de Riemann)
Par seconde inégalité triangulaire pour tout k,

$$\left|\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t\right| - |f(x_k)|\right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)|\mathrm{d}t.$$

Indication 58 · Énoncé p. 20 (Un point fixe de moyenne)
- ▷ Commencer à se ramener par un changement affine à $[a, b] = [0, 1]$.
- ▷ Dans ce cas, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$(T^n f)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$$

- ▷ En déduire avec précaution que

$$g : x \mapsto \fint_a^b f$$

convient.

Indication 59 · Énoncé p. 21 (Riemann au carré)
Repérer le terme croisé du développement de $\left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2$.

Indication 60 · Énoncé p. 21 (En vrac: comment découper)
Découper l'intégrale (Chasles) selon les valeurs du minimum.

Indication 61 · Énoncé p. 21 (Un découpage itératif)
1. Par exemple procéder itérativement et étudier à x_k fixé la fonction $t \mapsto \int_{x_k}^{\xi} f$.

2. Reconnaître la somme de Riemann de $f \circ F^{-1}$.

Indication 62 · Énoncé p. 22 (En vrac: un quasi-télescopage)
À A fixé constater que par Chasles

$$\int_0^A (f(x+h) - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_A^{A+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x$$

et pour la limite du premier terme utiliser par exemple un encadrement ε-esque.

Indication 63 · Énoncé p. 22 (En vrac: trouver le bon polynôme)
Déterminer une CL de X^2, X^3 et X^4 de signe constant.

Par exemple remarquer que $(f^2(1-f)^2) \geq 0$ et $\int_0^1 (f^2(1-f)^2) = 0$.

Donc pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = 0$ ou 1.

Utiliser ensuite la continuité de f pour montrer que la valeur ne dépend en fait pas de t.

Indication 64 · Énoncé p. 22 (Comment faire sans ln)
Avec z sous la forme complexe $z = a + ib$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{t-z} = \frac{(t-a)}{(t-a)^2+b^2} + \frac{ib}{(t-a)^2+b^2}.$$

Indication 65 · Énoncé p. 22 (Puissance fois ln)
Traiter tout d'abord le cas « homogène » $\alpha = 1$.

Dans les autres cas effectuer un changement de variables $u = x^\beta$ avec β bien choisi.

Indication 66 · Énoncé p. 23 (Des calculs de sommes)
Sommes de Riemann.

Indication 67 · Énoncé p. 23 (Une somme de Riemann)
Utiliser des sommes de Riemann.

Indication 68 · Énoncé p. 24 (Une limite de produit)

1. Étude de fonction par exemple.
2. Passer au ln et reconnaître une somme de Riemann à encadrement près. On obtient

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = e^{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Indication 69 · Énoncé p. 24 (Éléments simples d'ordre 2)

1. Fonction usuelle.
2. Poser le changement de variables $x = \tan(\theta)$
3. Poser le changement de variables $x = \tan(\theta)$
4. La même méthode permet de calculer (péniblement) les primitives de $x \mapsto \frac{ax+b}{(1+x^2)^n}$, et donc par changement de variables affine celles de $x \mapsto \frac{ax+b}{(P(x))^n}$ où P est un polynôme irréductible de degré 2. Par décomposition en éléments simples on peut donc calculer les primitives de fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$.

On pourra aussi considérer l'exercice 79 pour une expression de récurrence générale.

Indication 70 · Énoncé p. 25 (Aire sous le sinus cardinal)

1. sinc est continu
2. L'intégrande est positive et majorer par $\frac{1}{t^2}$ dont l'intégrale se calcule explicitement.

3. Couper en $\delta > 0$ (quelconque) et faire une IPP pour utiliser la question précédente et le théorème de limite monotone.

Indication 71 · Énoncé p. 25 (Intégrales qui tournent ou comment récupérer les coefficients)

1. Écrire $P\big(e^{i\theta}\big)e^{-ik\theta} = \sum_{j=0}^{n} a_j e^{i(j-k)\theta}$ et utiliser la linéarité.

2. Remarquer que les termes $a_k\overline{a_j}e^{i(j-k)\theta}$ sont de moyenne nulle pour $j \neq k$ et que les autres termes sont constants.

Cf le TD sur les polynômes pour d'autres exercices généralisant celui-ci.

Indication 72 · Énoncé p. 26 (Valeur moyenne et lipschitzianité)
Le prolongement par continuité en 0 est par $f(0)$ (cf exercice 7).

Effectuer le changement de variables $t = xs$ pour obtenir que pour tout x,

$$F(x) = \int_0^1 f(xs)\,\mathrm{d}s$$

et ainsi majorer $|F(x) - F(y)|$.

Indication 73 · Énoncé p. 26 (Une somme alternée)

1. Remarquer que $\tan^{2n+2} = \tan^{2n}(1 + \tan^2) - \tan^{2n}$.

2. Effectuer une récurrence ou télescoper $(-1)^n I_n$.

3. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par exemple par encadrement.

Indication 74 · Énoncé p. 27 (Puissance et puissance de ln)

1. Vérifier que la fonction est prolongeable par continuité en 0.

2. Intégrer par parties.

3. Faire le produit de la relation précédente jusqu'à $m = 0$.

Indication 75 · Énoncé p. 27 (Suite d'intégrale sans IPP: Quotient de sinus)

1. La fonction $x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$ est prolongeable par continuité en 0 par DL_1.

2. Calculer $I_{n+2} - I_n$ en remarquant que pour tout t, $\sin((n+2)t) - \sin(nt) = 2\cos((n+1)t)\sin(t)$.

3. Calcul explicite.

4. Distinguer le cas pair et impair et télescoper.

Indication 76 · Énoncé p. 27 (Suite d'intégrales sans IPP: un peu de binôme)

1. Prolongeable par continuité en 0.

2. Calculer $I_{n+1} - I_n$ en remarquant que pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)^n - (1-t)^{n+1} = (1-t)^n t$.

3. RAS.

4. D'un côté télescoper. De l'autre développer par le binôme puis intégrer.

5. Considérer la fameuse décomposition en éléments simples de $\frac{1}{X(X-1)\cdots(X-(n+1))}$ et l'évaluer en 1.

Indication 77 · Énoncé p. 28 (Une astuce)
Que dire de $I(x^2)$ et de $I\left(\frac{1}{x}\right)$?

Alternativement utiliser des sommes de Riemann.

Indication 78 · Énoncé p. 28 (En vrac: pas une fonction en escalier)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ calculer

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} \mathrm{d}x$$

comme une somme finie.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor}$ sur $]0,1]$ et prolongée par continuité a donc une « intégrale » calculable mais n'est pas continue par morceaux.

Indication 79 · Énoncé p. 28 (Limite en l'infini d'éléments simples)
1. Par exemple effectuer une IPP bien choisie.
2. Traiter le cas de A_0.

   Procéder par récurrence.

Indication 80 · Énoncé p. 28 (En vrac: encore Riemann)
Passer au ln et Riemann. Ou bien Stirling.

Indication 81 · Énoncé p. 29 (En vrac: étude de fonction)
Pour 0 effectuer un encadrement naif.

Pour 1 effectuer un encadrement plus fin ou le changement de variables $x = e^u$. On obtient $\ln(2)$.

Indication 82 · Énoncé p. 29 (En vrac: pas vraiment Lebesgue)
La fonction $|\sin|$ est périodique, par conséquent il s'agit de l'exercice 28 camouflé.

Indication 83 · Énoncé p. 29 (En vrac: un extrait d'oral X)
Écrire $\ln(1+\tan(x)) = \ln(\cos(x)+\sin(x)) - \ln(\cos(x))$ et repérer une symétrie.

Alternativement repérer la symétrie dès le début en posant $u = \frac{\pi}{4} - x$.

Solutions

Solution pour l'exercice 49 · Énoncé p. 18 · Indication p. 37 (Mini initialisation de Maclaurin)
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient par IPP

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\left(t-\frac{a+b}{2}\right)f(t)\right]_a^b - \int_a^b \left(t-\frac{a+b}{2}\right)f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \int_a^b \left(t-\frac{a+b}{2}\right)f'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Et par inégalité fondamentale, puis aire de deux triangles

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \left(t-\frac{a+b}{2}\right)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \| f' \|_\infty \int_a^b \left|t-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}t \\ &= \| f' \|_\infty \, 2\times\frac{1}{2}\times\frac{b-a}{2}\times\frac{b-a}{2}.\end{aligned}$$

D'où finalement,

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - (b-a)\left(\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right| \leq \tfrac{(b-a)^2}{4}\|f'\|_\infty}.$$

Solution pour l'exercice 50 · Énoncé p. 18 · Indication p. 37 (Erreur dans la méthode des trapèzes)

▷ **Méthode: par intégrations successives**

Posons

$$\begin{aligned}\varphi : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - (x-a)\left(\frac{f(a)+f(x)}{2}\right).\end{aligned}$$

On a par Théorème Fondamental de l'analyse $f \in \mathcal{C}^2$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in [a,b]\ \varphi'(x) &= f(x) - \frac{f(a)+f(x)}{2} - \frac{x-a}{2}f'(x) \\ &= \frac{f(x)-f(a)}{2} - \frac{x-a}{2}f'(x)\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\forall x \in [a,b]\ \varphi''(x) &= \frac{f'(x)}{2} - \frac{f'(x)}{2} - \frac{x-a}{2}f''(x) \\ &= -\frac{x-a}{2}f''(x).\end{aligned}$$

On a donc en particulier

$$\forall x \in [a,b], |\varphi''(x)| \leq \frac{x-a}{2}\,\| f'' \|_\infty .$$

De plus

$$\varphi(a) = 0,$$

d'où par «inégalité fondamentale»

$$\begin{aligned}\forall x \in [a,b], |\varphi'(x)| &= |0 + \int_a^x \varphi''(t)\,\mathrm{d}t| \\ &\leq \| f'' \|_\infty \int_a^x \frac{t-a}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^2}{4} \| f'' \|_\infty .\end{aligned}$$

Et de même, comme

$$\varphi(a) = 0$$

par la même majoration

$$\begin{aligned}|\varphi(b)| &= |0 + \int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{d}t| \\ &\leq \| f'' \|_\infty \int_a^b \frac{(t-a)^2}{4}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(b-a)^3}{12} \| f'' \|_\infty .\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)\left(\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right| \leq \tfrac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty}.$$

Remarque: cette méthode pourrait se généraliser pour étudier des formules exactes pour des polynômes d'un certain degré.

▷ **Méthode 2: par IPPs successives**

Comme $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$ par Intégrations Par Parties (une primitive de $t \mapsto 1$ est $t \mapsto t - \frac{a+b}{2}$)

$$\begin{aligned}\int_a^b 1 \times f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\left(t - \frac{a+b}{2}\right) f(t)\right]_a^b - \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

comme $f' \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{C})$ par Intégration Par Parties (une primitive de $t \mapsto t - \frac{a+b}{2}$ est $t \mapsto \frac{1}{2}\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(b-a)^2}{8} = \frac{(t-a)(t-b)}{2}$)

$$\int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{(t-a)(t-b)}{2} f'(t)\right]_a^b}_{0-0} - \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où finalement

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) + \int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\mathrm{d}t.$$

Et enfin par «l'inégalité fondamentale»

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \| f'' \|_\infty \int_a^b \frac{(t-a)(b-t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \| f'' \|_\infty \left[-\frac{1}{6}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^3 + \frac{(b-a)^2}{8}\left(t-\frac{a+b}{2}\right)\right]_a^b \\
&= \| f'' \|_\infty 2\times\left(-\frac{1}{6\times 8}+\frac{1}{8\times 2}\right)(b-a)^3 \\
&= \frac{(b-a)^3}{12}\| f'' \|_\infty .
\end{aligned}$$

Et on a donc bien

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - (b-a)\left(\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right| \leq \tfrac{(b-a)^3}{12}\|f''\|_\infty}.$$

Remarque: cette méthode peut se généraliser, les Intégrations Par Parties successives font alors intervenir les polynômes de Bernoulli.