Polynômes

Énoncés 2
Polynômes 2
Thème: Fonctions polynomiales réelles 13
Thème: Équations fonctionnelles polynomiales 17
Thème: Fonctions polynomiales complexes 19
Thème: Polynômes et arithmétique de $\mathbb{Z}$ 20
Indications 23
Solutions 35

Énoncés

Dans toute la feuille du TD, sauf mention du contraire, $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle (c'est à dire tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \cdot 1 \neq 0$).

Polynômes

Exercice 1 (◔★♣ Racines et conjugués)
Soit $P \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P alors $\overline{\alpha}$ est une racine de P.

Indication p. 23

Exercice 2 (◔★♠ Parité et polynômes)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est pair ssi $P(-X) = P(X)$, et on dit que P est impair ssi $P(-X) = -P(X)$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes
   (i) $P(-X) = P(X)$
   (ii) tous les coefficients d'ordre impair de P sont nuls
   (iii) il existe un polynôme Q tel que $P(X) = Q(X^2)$.

   Énoncer et démontrer un résultat similaire pour les polynômes impairs.
2. Soit P un polynôme pair (resp. impair). Montrer que P' est impair (resp. pair).
3. Montrer que l'ensemble des polynômes pairs et l'ensemble des polynômes impairs sont des sevs de $\mathbb{K}[X]$ supplémentaires.

Indication p. 23 · Solution p. 35

Exercice 3 (◔★♣ Degré d'une composée)
Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

- ▷ Montrer que si Q est non constant, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.
- ▷ Que dire de $\deg(P \circ Q)$ si Q est constant ?

Indication p. 23

Exercice 4 (◔★♠ S'est échappé d'un TD précédent)
Montrer que

1. Tout polynôme réel impair admet au moins une racine réelle.
2. Si un polynôme réel est scindé à racines simples alors sa dérivée est scindée à racine simple.
3. Si un polynôme réel est scindé alors sa dérivée est scindée.

Indication p. 23

Exercice 5 (◔★♣ Calculs de reste)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X - \alpha$.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ distincts. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)(X - \beta)$.
3. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^2$.

Indication p. 23 · Solution p. 38

Exercice 6 (◔★♠ Polynômes à coefficients dans un anneau)
Soit A un sous-anneau de $\mathbb{K}$.

On note $A[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont tous les coefficients sont dans A.

1. Montrer que $A[X]$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}[X]$. Déterminer $(A[X])^\times$.
2. Soient $S \in A[X]$ et $T \in A[X]$ non nul et de **coefficient dominant inversible** (dans A).

   Montrer qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in (A[X])^2$ tel que

   $$S = QT + R$$
   $$\deg(R) < \deg(T).$$

   Ce résultat reste-t-il vrai si on ne suppose plus l'inversibilité du coefficient dominant ?

Indication p. 23

Exercice 7 (◔★ Racines et arithmétique dans les petits degrés)

1. Donner un exemple de polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 4 n'admettant aucune racine et n'étant pas irréductible.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(P) \in \{2, 3\}$. Montrer que si P n'est pas irréductible ssi P admet une racine.

Indication p. 23

Exercice 8 (◑★ Petites sommes de Newton)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n.

On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les racines de P comptées avec multiplicité

On rappelle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on note σ_k la k-ième fonction élémentaire des racines

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k}.$$

1. Rappeler l'expression des fonctions élémentaires des racines en fonction des coefficients de P.

Pour tout $d \in \mathbb{N}$ on note S_d la somme de Newton

$$S_d = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^d.$$

1. Exprimer S_1 et S_2 en fonction de σ_1 et σ_2.
2. Exprimer S_3 en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Indication p. 24

Exercice 9 (◑★ Systèmes de sommes de Newton)
Déterminer tous les $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = -5. \end{cases}$$

Indication p. 24

Exercice 10 (◔★♠ Vers les fractions rationnelles: dérivée logarithmique)
Soit $P = \alpha \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k} \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé.

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $P(z) \neq 0$ on a

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{z - \lambda_k}.$$

Indication p. 24

Exercice 11 (◔★ Quelques polynômes usuels)
Pour chacun des polynômes suivants déterminer sa factorisation en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X^n + 1$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} X^k$$

Indication p. 24

Exercice 12 (◔★ Polynômes réels et racines complexes)
Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_z \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(z) = 0$ **ssi** $P_z \mid Q$.

Indication p. 24

Exercice 13 (◔★ Nombre de racines distinctes)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant.

Montrer que $\deg(P) - \deg(P \wedge P')$ est égal au nombre de racines distinctes de P.

Indication p. 24

Exercice 14 (◔★ Entre Taylor et Lagrange)
Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$.

Exprimer P en fonction de $P(0), P'(0), P(1), P'(1)$.

Indication p. 24

Exercice 15 (◔★♣ Rappels sur les coefficients binomiaux)
On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer la formule de la capitaine

$$\forall k \in [\![1, n]\!], k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

3. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ Montrer la formule de Vandermonde

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, n]\!]$. Montrer la formule des capitaines généralisée

$$\forall k \in [\![r, n]\!], \binom{k}{r}\binom{n}{k} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}.$$

Indication p. 24 · Solution p. 39

Exercice 16 (◔★ Régularité de la composition à droite)
Soient $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ **non constant**.

Montrer que

$$Q_1(P) = Q_2(P) \Rightarrow Q_1 = Q_2.$$

Indication p. 25

Exercice 17 (◔☆ Divisibilité et composition à droite)
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ **non constant**.

Montrer que

$$A(P) \mid B(P) \Rightarrow A \mid B.$$

Indication p. 25

Exercice 18 (◔★ Petits couples de Bézout)
Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et non constants.

Montrer qu'il existe U, V dans $\mathbb{K}[X]$, tels que

$$AU + BV = 1$$

et

$$\deg(U) < \deg(B)$$
$$\deg(V) < \deg(A).$$

Indication p. 25

Exercice 19 (◑★ PGCD et algorithme d'Euclide)
Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que

$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^{n \wedge m} - 1.$$

Indication p. 25

Exercice 20 (◑★ Polynômes divisibles par leur dérivée)
Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Indication p. 25

Exercice 21 (◔★ Encore des coefficients binomiaux)
En s'inspirant de l'exercice 15 montrer

1. Une formule de sélection: pour $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \equiv 0[N]}} \binom{n}{k} = \frac{1}{N} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_N} (1+\omega)^n$$

2. La formule de Vandermonde généralisée: pour $(p_1, ..., p_r) \in \mathbb{N}^r$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_r) \in \mathbb{N}^r \\ i_1+\cdots+i_r=n}} \binom{p_1}{i_1}\binom{p_2}{i_2}\cdots\binom{p_r}{i_r} = \binom{p_1+p_2+\cdots+p_r}{n}.$$

Indication p. 25

Exercice 22 (◔★ Calcul de coefficients dominants)
Pour chacun des polynômes suivants calculer son degré et ,si ce degré est un entier, son coefficient dominant.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{K}[X]$,
$$P(X+1) - P(X-1).$$
2. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,
$$P(X) + P(X+\alpha).$$
3. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$
$$P - XP'$$

Indication p. 25

Exercice 23 (◔★ Polynôme complexe trop réel)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

On suppose qu'il existe une infinité de réels α tels que $P(\alpha)$ est réel.

Montrer que tous les coefficients de P sont réels.

Indication p. 26

Exercice 24 (◔★ Changement de corps)
Soient $A, B \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$ deux polynômes réels.

On suppose que $A \underset{\mathbb{C}[X]}{|} B$.

Montrer que $A \underset{\mathbb{R}[X]}{|} B$.

Indication p. 26

Exercice 25 (◔★ Racines et conjugués II)
Soit $P \in \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que si $\sqrt{2}$ est racine de P alors $-\sqrt{2}$ est racine de P.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$. Montrer que si $a + b\sqrt{2}$ est racine de P alors $a - b\sqrt{2}$ est racine de P.

Indication p. 26

Exercice 26 (◔☆ Polynômes et module)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x \in [a,b], |P(x)| = 1$.
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\forall x \in [a,b], |P(x)| = 1$.

Indication p. 26

Exercice 27 (◑★ Polynômes stabilisant le cercle unité)
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Indication p. 26

Exercice 28 (◔★ La dérivation est localement nilpotente I)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

   Montrer qu'il existe un et unique $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que

   $$P - P' = Q$$

   et l'exprimer en fonction de Q.
2. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.

   Montrer qu'il existe un et unique $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

   $$P - P' = Q$$

   et l'exprimer en fonction de Q.

Indication p. 26

Exercice 29 (◑★ La dérivation est localement nilpotente II: Polynôme en la dérivée polynomiale)
Soit $D \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ définie par

$$\begin{aligned} D : \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K}[X] \\ Q &\mapsto Q' \end{aligned}$$

et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Montrer que $P(D) \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}[X])$ ssi $P(0) \neq 0$.

Indication p. 26

Exercice 30 (◑☆ Une divisibilité)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Montrer que P divise $P(X+P)$.

Indication p. 27

Exercice 31 (◔★ Un triangle et son inversion)
Soient $(z_1, z_2, z_3) \in (\mathbb{C}^*)^3$ tels que

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \text{ et } \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0.$$

Montrer que $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ et faire un schéma.

Indication p. 27

Exercice 32 (◔☆ Un Vandermonde peu camouflé)
Soit $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts.

Montrer que $\left((X-\lambda_k)^n\right)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Indication p. 27

Exercice 33 (◑★ Divisibilité et Bernoulli itéré)
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P - X$ divise $\underbrace{P \circ P \circ \cdots \circ P}_{n \text{ fois}} - X$.

Indication p. 27

Exercice 34 (◔☆ Le jeu immoral du docteur B.)
Un professeur de mathématiques vous propose le jeu suivant:

- ▹ Vous choisissez une suite finie (de longueur de votre choix et secrète) d'entiers **naturels** $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$.
- ▹ À chaque tour du jeu, le professeur vous donne un entier $\beta \in \mathbb{N}$ et vous lui répondez par la valeur de $\sum_{k=0}^{n} a_k \beta^k$.
- ▹ Au bout de N tours (ou avant si il le souhaite) le professeur propose une suite finie d'entiers naturels. Si il s'agit de la bonne suite il gagne la partie, sinon il perd.

Si le professeur gagne vous lui devez une tablette de chocolat, sinon il vous doit une tablette de chocolat.

1. Pour quelle valeurs de $N \geq 2$ acceptez-vous de jouer à ce jeu ?

Le professeur vous propose une variante: vous pouvez choisir une suite finie d'entiers **relatifs** $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, et en échange à chaque tour il peut choisir $\beta \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de $N \geq 1$ acceptez-vous de jouer à cette variante ?

Indication p. 27

Exercice 35 (◔☆ Symétrie point par point)
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes réel unitaires de degrés 2024 tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \neq Q(x)$.

Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x - \alpha) = Q(x + \alpha)$.

Indication p. 27

Exercice 36 (◑☆ Contourner Bézout)
Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts.

1. Montrer à l'aide d'une relation de Bézout qu'il existe $P_1, ..., P_n$ des polynômes tels que

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \times \prod_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq k}} (X - \lambda_j) = 1.$$

2. Montrer sans utiliser relation de Bézout qu'il existe $P_1, ..., P_n$ des polynômes tels que

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \times \prod_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq k}} (X - \lambda_j) = 1.$$

Indication p. 28

Exercice 37 (◑☆ Familles libres ou liées)
Soient P et Q deux polynômes non constants.

1. Montrer que la famille $\left(P^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.
2. Montrer que la famille $\left(P^kQ^j\right)_{(k,j)\in\mathbb{N}^2}$ est liée.

Indication p. 28

Exercice 38 (◑★ Exponentielle de la dérivée)
Soit $D \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ l'opérateur de dérivation.

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda D)^k}{k!}(P) = P(X+\lambda).$$

Indication p. 28

Exercice 39 (◑☆ Une autre façon de primitiver)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

On pose

$$Q = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} X^{k+1} P^{(k)}.$$

Montrer que $Q(0) = 0$ et

$$Q' = P.$$

Indication p. 28

Exercice 40 (◔☆ Un exercice d'entraînement rapide)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer qu'il existe un et unique $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P(X+1) + P(X) = X^n.$$

Indication p. 28

Exercice 41 (◕☆ Comme le spectre mais dimension quelconque)
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{C}, u - \lambda \mathrm{Id}_E \notin \mathrm{GL}(E)\}.$$

Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$P(\mathrm{Sp}(u)) = \mathrm{Sp}(P(u)).$$

Indication p. 28

Exercice 42 (◑☆ Un autre exemple de base)
Soient $a, b \in \mathbb{K}$ distincts.

Montrer que $\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Indication p. 28

Exercice 43 (◔★ Application linéaires et degré)
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$.

1. On suppose que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(u(P)) \geq \deg(P)$. Montrer que u est injective.
2. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, si $\deg(P) \geq r$ alors $\deg(u(P)) = \deg(P) - r$. Montrer que u est surjective.
3. On suppose que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(u(P)) = \deg(P)$. Montrer que u est un automorphisme.

Indication p. 28

Thème: Fonctions polynomiales réelles

Exercice 44 (◑★ Fonctions localement polynomiales)
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction localement polynomiale c'est à dire telle que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X], \forall x \in [a-\delta, a+\delta], f(x) = P(x).$$

Montrer que f est une fonction polynomiale.

Indication p. 28

Exercice 45 (◑★ Somme de deux carrés)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0) \Leftrightarrow (\exists (A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2, P = A^2 + B^2).$$

Indication p. 29 · Solution p. 41

Exercice 46 (◑☆ Une variante de sommes de deux carrés)
Soit $P \in R[X]$ tel que pour tout $x \in [-1, 1]$, $P(x) \geq 0$.

Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P = A^2 + (1 - X^2)B^2.$$

Indication p. 29 · Solution p. 42

Exercice 47 (◑☆ Somme des dérivées)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$.

On pose $Q = P + P' + P'' + \cdots P^{(n)}$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \geq 0$.

Indication p. 29

Exercice 48 (◔★ Fonctions non polynomiales)

1. Montrer que $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas polynomiale (c'est à dire qu'il n'existe pas de $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, \exp(t) = P(t)$.)
2. Montrer que $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ n'est pas polynomiale.
3. Montrer que $\begin{array}{c}\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}\end{array}$ n'est pas polynomiale.
4. Montrer que $z \mapsto \overline{z}$ n'est pas polynomiale.

Indication p. 29

Exercice 49 (◔★ Une inégalité)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé.

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t)P''(t) \leq (P'(t))^2.$$

Indication p. 29

Exercice 50 (◔☆ Petite factorisation réelle)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et P et Q deux polynômes distincts de réels de degrés n.

Montrer que

$$\deg(P^3 - Q^3) \geq 2n$$

et donner un exemple où l'égalité est atteinte.

Le résultat reste-t-il vrai si on considère des polynômes complexes ?

Indication p. 29

Exercice 51 (◑★ Un peu mieux que Rolle)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n scindé à racines simples et $\lambda_1 < ... < \lambda_n$ ses racines.

1. Rappeler brièvement pourquoi P' est scindé à racine simples et de racines $\mu_1 < ... < \mu_{n-1}$ vérifiant
$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \lambda_k < \mu_k < \lambda_{k+1}.$$
2. Montrer que pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$,
$$n\prod_{k=1}^{n}(\lambda_j - \mu_k) = \prod_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq j}}(\lambda_j - \lambda_k).$$
3. Montrer que pour tout
$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \lambda_k + \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{n} < \mu_k < \lambda_{k+1} - \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{n}.$$

Indication p. 30

Exercice 52 (◔★ Somme partielle de l'exponentielle)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$ le nombre de racines réelles de P_n.

Indication p. 30

Exercice 53 (◕☆ Polynômes surjectifs)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto P(n) \end{aligned}$$

est surjective.

Montrer que $P = X$.

Indication p. 30

Exercice 54 (◔☆ Un ordre assez lexicographique)
On définit une relation $\lhd$ sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, P \lhd Q \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}, \forall t \geq A, P(t) \leq Q(t).$$

Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}[X]$.

Indication p. 30

Exercice 55 (◑★ Polynômes orthogonaux sans le dire)
Soit $[a,b]$ un segment non trivial de $\mathbb{R}$ et $\omega \in \mathcal{C}^0([a,b],]0,+\infty[)$.

On admet que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b],[0,+\infty[)$, si $\int_a^b f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors $f = 0_{[a,b]\to\mathbb{R}}$.

Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base échelonnée de $\mathbb{R}[X]$ telle que

$$\forall i,j \in \mathbb{N}, i \neq j \Rightarrow \int_a^b P_i(t)P_j(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, P_k est scindé à racines simples et que toutes ses racines sont dans $[a,b]$.

Indication p. 30

Exercice 56 (◔☆ Monotonie ÀPCR)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant.

Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $P_{|[A,+\infty[}$ est strictement monotone.

Indication p. 30

Thème: Équations fonctionnelles polynomiales

Exercice 57 (◑☆ Polynômes multiplicatifs)
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, P(xy) = P(x)P(y).$$

Indication p. 30

Exercice 58 (◔★ Des équations fonctionnelles polynomiales)
Pour chaque équation suivante déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ satisfaisant la condition.

1. $P \circ P = P$.
2. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
3. $P(2X) = P(X) - X$.

Indication p. 30 · Solution p. 44

Exercice 59 (◔★ Déjà vu au moins deux fois)
Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que

$$P(X+1) - P(X) = X^2.$$

Indication p. 30

Exercice 60 (◕★ Une équation fonctionnelle de commutativité)
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X)^2 + 1 = P(X^2+1).$$

Indication p. 31

Exercice 61 (◑★ Une équation fonctionnelle polynomiale ultra-classique)
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(X^2) = P(X-1)P(X).$$

Indication p. 31

Exercice 62 (◔☆ Encore une équation fonctionnelle polynomiale)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X) + (X-1)P'(X) = X^n.$$

Indication p. 31

Exercice 63 (◑★ Re-encore une équation fonctionnelle polynômes)
Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$XP(X+1) = (X+2)P(X)$$

Indication p. 31

Exercice 64 (●★ Block-Thielmann)
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base échelonnée de $\mathbb{K}[X]$. On dit qu'une telle base est commutante ssi pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $P_n \circ P_m = P_m \circ P_n$.

1. Montrer que la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que la base de Tchebychev $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont commutantes.
2. Soit Λ un polynôme de degré 1. Montrer que Λ est inversible. On note Λ^{-1} son inverse.
3. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base commutante de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que $(\Lambda \circ P_n \circ \Lambda^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une base commutante de $\mathbb{K}[X]$.
4. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base commutante tel qu'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que $P_2 = X^2 + c$. Montrer que $c \in \{0, -2\}$.
5. En déduire qu'une base est commutante ssi existe Λ un polynôme de degré 1 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \Lambda \circ X^n \circ \Lambda^{-1}$ ou qu'il existe Λ un polynôme de degré 1 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \Lambda \circ T_n \circ \Lambda^{-1}$.

Indication p. 31

Thème: Fonctions polynomiales complexes

Exercice 65 (◑★ Norme infinie sur le cercle unité)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$.

1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{N} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_N} \omega^k = \begin{cases} 1 & \text{si } N \mid k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Soit $N > n$. Montrer que

$$\frac{1}{N} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_N} P(\omega) = a_0.$$

3. Soit $N > n$. Montrer que

$$\max_{\omega \in \mathbb{U}_N} (|P(\omega)|) \geq \max_{k \in [\![0,n]\!]} (|a_k|)$$

Indication p. 32

Exercice 66 (◑★ Formule de Cauchy)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P\left(e^{i\theta}\right)}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

2. Soit $z_0 \in \mathcal{D}(\omega, R) \setminus \mathcal{C}(\omega, R)$. Calculer

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P\left(\omega + Re^{i\theta}\right)}{Re^{i\theta} - z_0} i R e^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

Indication p. 32

Exercice 67 (◕★ Principe du maximum)
Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $R > 0$.

On note $\mathcal{D}(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z - \omega| \leq R\}$ le disque fermé de rayon R et de centre ω, ainsi que $\mathcal{C}(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z - \omega| = R\}$ le cercle de rayon R et de centre ω.

Soit $z_0 \in \mathcal{D}(\omega, R)$. Montrer que

$$|P(z_0)| \leq \max_{z \in \mathcal{C}(\omega, R)} |P(z)|.$$

Indication p. 32

Thème: Polynômes et arithmétique de $\mathbb{Z}$

Exercice 68 (◔★ Un petit lemme utile en arithmétique)
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers.

Montrer que pour tous entiers a et b, $a-b$ divise $P(a)-P(b)$ (pour la division dans $\mathbb{Z}$).

Indication p. 32 · Solution p. 45

Exercice 69 (◔☆ Progression divisible)
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers.

Montrer que pour tout entier n il existe un entier N_n tel que

$$n \mid \sum_{k=0}^{N_n} P(k).$$

Indication p. 32

Exercice 70 (◑☆ Un exemple d'irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$)
Soient $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ des entiers deux à deux distincts.

On pose

$$P = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k) - 1.$$

Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Indication p. 32

Exercice 71 (◔☆ Divisibilité et divisibilité)
Soient P et Q deux polynômes à coefficients entiers, unitaires et non constants.

On suppose qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $P(n)$ divise $Q(n)$ (dans $\mathbb{Z}$).

Montrer que P divise Q (dans $\mathbb{Z}[X]$).

Indication p. 33

Exercice 72 (◑☆ Polynôme qui permute ?)

1. Soient $a_1, ..., a_r$ des réels deux à deux distincts.

   Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $P(a_i) = a_{i+1}$ (avec la notation $a_{r+1} = a_1$).
2. Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ à coefficients **entiers** et $r \geq 3$ entiers $a_1, ..., a_r$ deux à deux distincts tels que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $P(a_i) = a_{i+1}$ (avec la notation $a_{r+1} = a_1$) ?

Indication p. 33

Exercice 73 (◔★♠ Petit critère d'Eisenstein)
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha \wedge \beta = 1$.

Montrer que

$$P\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0 \Rightarrow (\alpha \mid a_0 \text{ et } \beta \mid a_n).$$

Commenter.

Indication p. 33

Exercice 74 (◑★♠ Contenu d'un polynôme et lemme de Gauss polynomial)
Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers, on appelle son *contenu*, noté $c(P)$ le pgcd de ses coefficients, c'est à dire

$$c(P) = \bigwedge_{k=0}^{n} a_k.$$

1. Commenter la définition.
2. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $c(P_1) = 1$ et $c(P_2) = 1$. Montrer que $c(P_1 P_2) = 1$.
3. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que $c(P_1 P_2) = c(P_1)c(P_2)$.

Indication p. 33

Exercice 75 (◔★ Petit théorème de Fermat et coefficients binomiaux)
Soit p un nombre premier. On admet le petit théorème de Fermat.

Montrer que dans $\frac{\mathbb{Z}}{p}\mathbb{Z}[X]$,

$$(X+1)^p = X^p + 1$$

En déduire que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \mid \binom{p}{k}$.

Indication p. 33 · Solution p. 45

Exercice 76 (◕★ Polynômes à valeurs entières)
On note dans cet exercice $\mathcal{H}$ l'ensemble des polynômes à valeurs entières sur les entiers, c'est à dire

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{Q}(X) \mid \forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}\}.$$

On note aussi Δ l'opérateur de différence discrète, c'est à dire

$$\begin{aligned}\Delta : \mathbb{Q}[X] &\to \mathbb{Q}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X).\end{aligned}$$

Enfin on note pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$H_p = \frac{X(X-1)\cdots(X-p+1)}{p!}.$$

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est une partie stable par Δ, et que pour tout $P \in \mathcal{H}$, si $\Delta(P) \in \mathcal{H}$ et $P(0) \in \mathbb{Z}$ alors $P \in \mathcal{H}$.
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $H_p \in \mathcal{H}$.
3. Soit $P \in \mathbb{Q}_d[X]$.

   Montrer que

$$P \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \exists (a_0, ..., a_d) \in \mathbb{Z}^{d+1}, P = \sum_{k=0}^{d} a_k H_k.$$

Indication p. 34

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Racines et conjugués)
Montrer que comme P est à coefficients réels, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Parité et polynômes)

1. Procéder par chaîne d'implications.

   Le résultat pour les polynômes impairs est
   (i) $P(-X) = -P(X)$
   (ii) tous les coefficients d'ordre pair de P sont nuls
   (iii) il existe un polynôme Q tel que $P(X) = XQ(X^2)$.
2. Juste dériver la relation.
3. Montrer que le seul polynôme pair et impair est 0 et remarque que pour tout P, $P = \frac{1}{2}(P(X) + P(-X)) + \frac{1}{2}(P(X) - P(-X))$.

   Alternativement remarquer que $P \mapsto P(-X)$ est une symétrie.

Solution p. 35

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Degré d'une composée)
Dans le cas Q constant distinguer selon que cette constante est ou non une racine de P.

Indication 4 · Énoncé p. 3 (S'est échappé d'un TD précédent)

1. Limites et TVI.
2. Rolle.
3. Re-Rolle.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Calculs de reste)

1. Évaluer en α.
2. Évaluer en α et β
3. Évaluer et évaluer la dérivée en α.

Solution p. 38

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Polynômes à coefficients dans un anneau)

1. Vérifier la définition de sous-anneau. On a $(A[X])^\times = A^\times$, en identifiant un polynôme constant à la constante associée.
2. Faire la même preuve que pour un corps, et noter l'utilisation de l'inversibilité du coeff dominant.

   Le résultat est faux de manière générale. Ainsi remarquer que dans $\mathbb{Z}[X]$ il n'existe pas de division euclidienne entre X^2 et $2X$!

Indication 7 · Énoncé p. 3 (Racines et arithmétique dans les petits degrés)

1. N'importe quel polynôme de signe constant convient, que dire par exemple de $X^4 + 1$?

2. Remarquer que si $a+b \in \{2,3\}$ avec a et b dans $\mathbb{N}^*$ alors au moins l'un des deux vaut 1.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Petites sommes de Newton)
1. Il s'agit des relations coefficients-racines.
2. On obtient $S_1 = \sigma_1$, $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$.
3. On obtient $S_3 = S_1S_2 - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Systèmes de sommes de Newton)
Avec $P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$ que dire de P ?

Remarquer que -1 est racine «évidente» de $X^3 - X^2 + 2$.

Ne pas oublier les 3! permutations à la fin.

Indication 10 · Énoncé p. 4 (Vers les fractions rationnelles: dérivée logarithmique)
Écrire l'expression explicite de la dérivée d'un produit.

Indication 11 · Énoncé p. 5 (Quelques polynômes usuels)
Une fois factorisé dans $\mathbb{C}[X]$ en regroupant les racines complexes conjuguées deux par deux on obtient la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
1. À connaître par cœur, ou au pire c'est un trinôme. Ne pas oublier les deux cas particuliers dans $\mathbb{R}[X]$ que sont $\cos(\theta) = \pm 1$.
2. Quasiment les racines n-ièmes.
3. Pour trouver les racines complexes, pour $z \neq 1$ c'est une somme géométrique puis des racines n-ièmes.

Indication 12 · Énoncé p. 5 (Polynômes réels et racines complexes)
Si $z \in \mathbb{R}$ c'est un résultat du cours.

Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $P_z = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$ (pourquoi ?).

Alternativement utiliser la structure des idéaux de $\mathbb{R}[X]$.

Indication 13 · Énoncé p. 5 (Nombre de racines distinctes)
Étudier les racines, et donc dans $\mathbb{C}$ les facteurs irréductibles, des diviseurs communs à P et P'.

Indication 14 · Énoncé p. 5 (Entre Taylor et Lagrange)
Il s'agit bien évidemment de déterminer des polynômes tels qu'une valeur vaut 1 et les autres s'annulent.

Indication 15 · Énoncé p. 6 (Rappels sur les coefficients binomiaux)
1. Utiliser le fait que $1+1=2$.
2. D'un côté dériver puis développer par le binôme. De l'autre développer par le binôme puis dériver.

3. D'un côté faire le produit puis développer par le binôme. De l'autre développer par le binôme puis faire le produit.
4. Dériver r fois.

Solution p. 39

Indication 16 · Énoncé p. 6 (Régularité de la composition à droite)
Par degré, la famille $\left(P^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre.

Alternativement, dans le cas $\mathbb{K}$ infini, remarquer que si P non constant alors l'image de P est infinie.

Indication 17 · Énoncé p. 6 (Divisibilité et composition à droite)
Par exemple déduire la division euclidienne de $B(P)$ par $A(P)$ de celle de B par A.

Indication 18 · Énoncé p. 7 (Petits couples de Bézout)
Comme dans $\mathbb{Z}$, déterminer tous les couples de Bézout, et montrer qu'au moins un convient.

Indication 19 · Énoncé p. 7 (PGCD et algorithme d'Euclide)
Cf le TD d'arithmétique.

Montrer pour tous a et $b\neq 0$ entiers avec r le reste de la division euclidienne de a par b, X^r-1 est le reste de la division euclidienne de X^a-1 par X^b-1.

Faire tourner un algorithme d'Euclide.

Indication 20 · Énoncé p. 7 (Polynômes divisibles par leur dérivée)
Le quotient est de degré 1, par conséquent $P=\kappa(X-\alpha)P'$.

Écrire ensuite P dans la base de Taylor adaptée.

En déduire que $P=C(X-\alpha)^n$ pour un certain n.

Indication 21 · Énoncé p. 7 (Encore des coefficients binomiaux)
1. Écrire une somme double et intervertir. On pourrait par ailleurs s'intéresser à une généralisation, le calcul de $\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k\equiv r[N]}}\binom{n}{k}$ en regardant l'exercice 65.
2. Calculer $(1+X)^{p_1}(1+X)^{p_2}\cdots(1+X)^{p_r}$.

Indication 22 · Énoncé p. 8 (Calcul de coefficients dominants)
1. Développer le binôme. On obtient un degré $n-1$ et un coefficient dominant $2n$.
2. Déterminer le coefficient dominant et degré de $P(X+\alpha)$ en fonction de celui de P on obtient le même degré que P et si celui est positif un coefficient dominant double de P.
3. Distinguer le cas où P est de degré 1.

Indication 23 · Énoncé p. 8 (Polynôme complexe trop réel)
Le polynôme P est égal à un polynôme d'interpolation réel en suffisamment de points.

Indication 24 · Énoncé p. 8 (Changement de corps)
Existence de la division euclidienne dans le petit cours et unicité de la division euclidienne dans le grand.

Indication 25 · Énoncé p. 8 (Racines et conjugués II)

1. Écrire $P\left(\sqrt{2}\right) = A + \sqrt{2}B$ avec A et B rationnels et constater que $P\left(\sqrt{2}\right) = A - \sqrt{2}B$. De $A + B\sqrt{2} = 0$, déduire que $A = B = 0$ Alternativement constater que $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2}, (a,b) \in \mathbb{Q}\right\}$ est un corps compris entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

   Montrer que la conjugaison $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ est bien définie et est un morphisme de corps.

   Refaire l'exercice 1.
2. Idem. Ou bien poser $Q(X) = P(a + bX)$.

Indication 26 · Énoncé p. 9 (Polynômes et module)

1. Par exemple TVI, ou que dire de P^2 ?
2. Que dire de $P\overline{P}$?

Indication 27 · Énoncé p. 9 (Polynômes stabilisant le cercle unité)
Écrire $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et remarquer que la proposition se traduit par $z \in \mathbb{U}$, $P(z)\overline{P(z)} = 1$.

De là on peut par exemple en déduire que pour tout n,

$$\sum_{k-l=n} a_k \overline{a_l} = \delta_{n=0}$$

puis que les a_k sont tous nuls sauf 1.

Alternativement poser $\tilde{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_{n-k}} X^k$, déterminer $P\tilde{P}$ et en déduire P.

Indication 28 · Énoncé p. 9 (La dérivation est localement nilpotente I)

1. On peut écrire le système sur les coefficients. Ou plus simplement constater qu'avec D l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}_n[X]$ on a $D^{n+1} = 0$ et que l'on cherche à déterminer l'inversibilité et l'inverse de $\mathrm{Id} - D$.
2. Tout polynôme appartient à un certain $\mathbb{K}_n[X]$. Ne pas oublier de traiter de l'unicité (noyau).

Indication 29 · Énoncé p. 9 (La dérivation est localement nilpotente II: Polynôme en la dérivée polynomiale)
Remarquer que $P(D) = P(0)\,\mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]} + \sum_{k=1}^{n} a_k D^k$.

Si $P(0) = 0$ alors les polynômes constants sont dans le noyaux.

Si $P(0) = 0$ montrer au choix que l'image d'une famille échelonnée est échelonnée ou expliciter l'inverse par nilpotence de D et car X et P premiers entre eux.

Indication 30 · Énoncé p. 10 (Une divisibilité)
Par exemple développer explicitement mais judicieusement $P(X+P(X))$ pour vérifier que la somme des termes ne comportant pas explicitement P est en fait … égale à P !

Alternativement appliquer l'exercice 33 à $P+X$.

Indication 31 · Énoncé p. 10 (Un triangle et son inversion)
On a les z_k racines de $X^3-\sigma_3=0$.

Conclure (on a même mieux que l'égalité des modules, les angles sont espacés de $\frac{2\pi}{3}$).

Indication 32 · Énoncé p. 10 (Un Vandermonde peu camouflé)
Par le binôme se ramener à une matrice (ou un système) de Vandermonde.

Indication 33 · Énoncé p. 10 (Divisibilité et Bernoulli itéré)
On peut montrer que pour tout R

$$R(P(X))-R(X)=Q_R(X)(P(X)-X)$$

et conclure avec les cas particulier $R=P$ et $R=X$.

Pour cela il suffit de traiter le cas $R=X^k$ et utiliser une formule de Bernoulli.

Pour la deuxième question appliquer à $R=P^{(\circ n)}$ et $R=P^{(\circ(n-1))}$ et télescoper.

Alternativement appliquer l'exercice 30 à $P-X$.

Alternativement remarquer que modulo $P-X$, $P\equiv X[P-X]$ et itérer.

Indication 34 · Énoncé p. 11 (Le jeu immoral du docteur B.)
De manière peu intuitive le professeur gagne toujours au jeu qu'il a proposé !

Il est en effet toujours possible de terminer le jeu en exactement deux tours.

Tout d'abord en obtenant une borne sur l'ensemble des coefficients, puis en évaluant en un nombre assez grand (par exemple 10^N où tq 10^N est bien plus grand que chaque coefficient).

De cette intuition, montrer que pour $\beta\in\mathbb{R}$ un seul tour suffit: il suffit de prendre β tel que $\left(\beta^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{Q}$-libre, une construction explicite pouvant s'inspirer du cas précédent (par exemple $\sum_k \frac{1}{10^{k!}}$).

Indication 35 · Énoncé p. 11 (Symétrie point par point)
Poser $P=\sum a_kX^k$, $Q=\sum b_kX^k$.

Constater que par la première condition $a_{2023}\neq b_{2023}$.

On cherche ensuite à montrer que $R=P(X-\alpha)-Q(X+\alpha)$ admet une racine.

Le coefficient de R de degré 2024 est 0, celui de degré 2023 est $a_{2023}-b_{2023}-2\times 2024\alpha$.

Donc R est de degré impair.

Indication 36 · Énoncé p. 11 (Contourner Bézout)
1. Par exemple utiliser la décomposition en facteurs irréductibles pour conclure la primalité dans l'ensemble.
2. Interpoler 1 en $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Indication 37 · Énoncé p. 12 (Familles libres ou liées)
1. Par degré.
2. Par degré, pour $n \in \mathbb{N}$ minorer le nombre de vecteur dans $\mathbb{K}_n[X]$ et prendre n assez grand.

Indication 38 · Énoncé p. 12 (Exponentielle de la dérivée)
Tout d'abord montrer que comme P est de degré fini la somme est bien définie car nulle à partir d'un certain rang.

Ensuite vérifier la relation sur une base (par exemple canonique ou Taylor).

Indication 39 · Énoncé p. 12 (Une autre façon de primitiver)
Par exemple calculer explicitement la dérivée de Q et télescoper.

Indication 40 · Énoncé p. 12 (Un exercice d'entraînement rapide)
Il suffit de montrer qu'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ est surjectif.

Indication 41 · Énoncé p. 13 (Comme le spectre mais dimension quelconque)
Ici le corps $\mathbb{C}$ est essentiel.

Dans un sens écrire $P - P(\lambda)$ comme produit d'irréductibles et idem avec $P - \lambda$ dans l'autre. Remarquer qu'en dimension quelconque un produit de non inversibles peut être non inversible mais qu'ici comme $\mathbb{K}[u]$ est commutatif on s'en sort par la droite ou la gauche.

Indication 42 · Énoncé p. 13 (Un autre exemple de base)
Évaluer en a et continuer.

Indication 43 · Énoncé p. 13 (Application linéaires et degré)
1. Que dire du noyau ?
2. Montrer que pour tout n, $u^{|\mathbb{K}_n[X]}_{|\mathbb{K}_{n+r}[X]}$ est bien définie et surjective par dimension. Puis se rappeler que pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ il existe n tel que $Q \in \mathbb{K}_n[X]$.
3. Utiliser les deux questions précédentes.

Indication 44 · Énoncé p. 13 (Fonctions localement polynomiales)
Constater que si deux polynômes coïncident sur un intervalle (non vide et non réduit à un point) alors ils sont égaux.

Utiliser ensuite un principe de continuation. Étant donné $a \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que f et $t \mapsto P(t)$ coïncident sur un voisinage de a, considérer $\{x \geq a, f(x) = P(x)\}$ et notamment son sup.

Indication 45 · Énoncé p. 14 (Somme de deux carrés)
Le sens réciproque est immédiat.

Pour le sens direct, procéder comme pour l'exercice dans $\mathbb{Z}$: montrer que l'ensemble des sommes de deux carrés est stable par produit et traiter le cas des polynômes irréductibles de degré 2.

Solution p. 41

Indication 46 · Énoncé p. 14 (Une variante de sommes de deux carrés)
- ▷ Montrer que dans un anneau quelconque on a pour tout a, b,

$$(a^2+ub^2)(c^2+ud^2) = (ac+ubd)^2 + u(ad-bc)^2.$$

- ▷ Faire le cas de degré ≤ 2.
- ▷ DPI

Solution p. 42

Indication 47 · Énoncé p. 14 (Somme des dérivées)
Commencer par remarquer que $Q = P + Q'$.

Montrer que Q ayant même degré et coefficient dominant que P admet un minimum global donc local.

En déduire que ce minimum est une valeur de P donc positif.

Alternativement étudier $t \mapsto Q(t)e^{-t}$.

Indication 48 · Énoncé p. 14 (Fonctions non polynomiales)
1. Croissance comparée ou remarquer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $P' = P$.
2. Croissance comparée ou remarquer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $XP' = 1$.
3. Croissance comparée ou remarquer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $P'' = -P$.
4. Par exemple, que dire de $XP(X)$?

Indication 49 · Énoncé p. 15 (Une inégalité)
Utiliser l'exercice 10 et dériver.

Indication 50 · Énoncé p. 15 (Petite factorisation réelle)
Se rappeler des règles de calcul dans un anneau commutatif, par exemple $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Regarder ensuite le coefficients dominant de $P^2 + PQ + Q^2$.

Il y a égalité par pour $P - Q$ constant, par exemple $X^n + 1$ et X^n.

Enfin dans $\mathbb{C}$ la factorisation reste correcte mais il n'y a plus de positivité des carrés (et conséquences) permettant de conclure à la non nullité du coefficient d'ordre $2n$. Regarder par exemple jX^n et X^n.

Indication 51 · Énoncé p. 15 (Un peu mieux que Rolle)

1. Rolle.

2. Calculer de deux manières différentes $P'(\lambda_j)$.

3. Remarquer que l'égalité précédente peut se réécrire

$$\frac{\mu_k - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_k - \lambda_j}{\lambda_k - \mu_j} \prod_{j=k+1}^{n} \frac{\lambda_k - \lambda_{j+1}}{\lambda_k - \mu_j}$$

Indication 52 · Énoncé p. 16 (Somme partielle de l'exponentielle)
Remarquer que $P_n' = P_{n-1}$ et $P_n = P_{n-1} + \frac{X^n}{n!}$ et procéder par récurrence.

Indication 53 · Énoncé p. 16 (Polynômes surjectifs)
Que dire d'une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ surjective monotone à partir d'un certain rang ?

Indication 54 · Énoncé p. 16 (Un ordre assez lexicographique)
Remarquer que cela revient à $P - Q$ positif au voisinage de $+\infty$.

Indication 55 · Énoncé p. 16 (Polynômes orthogonaux sans le dire)
Remarquer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $L \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, $\int_a^b P_k(t)L(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

En déduire que si P_k admet strictement moins de k changements de signes, par interpolation, on obtient une contradiction.

Indication 56 · Énoncé p. 17 (Monotonie ÀPCR)
On a P' admet une limite de signe strict.

Indication 57 · Énoncé p. 17 (Polynômes multiplicatifs)
Déduire que pour tout $y \in \mathbb{C}$, $P(yX) = P(y)P(X)$ puis que $P(y) = y^n$ pour un certain n.

Conclure.

Indication 58 · Énoncé p. 17 (Des équations fonctionnelles polynomiales)
De manière générale une idée est de commencer par considérer le degré/coefficient dominant (après avoir traiter le polynôme nul).

On obtient alors une condition nécessaire sur le degré.

Il suffit alors de déterminer les coefficients.

Solution p. 44

Indication 59 · Énoncé p. 17 (Déjà vu au moins deux fois)
Montrer que $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ est linéaire, de noyau $\mathbb{K}_0[X]$, etc.

Ou bien juste majorer le degré de P est résoudre un système linéaire sur les coefficients.

Ou bien avoir l'intuition télescopique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0) + \frac{(n-1)(n-2)(2n-3)}{6}$.

Indication 60 · Énoncé p. 17 (Une équation fonctionnelle de commutativité)
Posons $Q = X^2 + 1$.

On cherche alors tous les polynômes P tels que

$$P \circ Q = Q \circ P.$$

On remarque tout d'abord que l'ensemble des polynômes convenant est stable par composition et que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\underbrace{Q \circ \cdots \circ Q}_{r \text{ fois}}$ convient.

De plus tout polynôme constant égal à c où $c = c^2 + 1$ convient.

Il reste à montrer que ce sont les seuls.

Tout d'abord on a $P(-X)^2 = P(X)^2$ donc $(P(X) - P(-X))(P(X) + P(-X)) = 0$.

Par intégrité P est pair ou P est impair.

- ▹ Si P est impair en particulier $P(0) = 0$.

  En considérant la suite $u_{n+1} = Q(u_n)$ on obtient une infinité de points où P coïncide avec X.
- ▹ Si P est pair on peut écrire $P = R(X^2)$ et donc à décalage près $P = S(X^2 + 1)$ où $S(X) = R(X^2 - 1)$. Donc $P = S \circ Q$.

  Alors $S \circ Q \circ Q = Q \circ S \circ Q$. Comme Q non constant $S \circ Q = Q \circ S$.

  De plus si S non constant le degré est strictement plus petit d'où le résultat par descente infinie.

Indication 61 · Énoncé p. 18 (Une équation fonctionnelle polynomiale ultra-classique)
Que dire des racines complexes de P ?

Montrer successivement qu'elles sont de module 1, puis sont égales à j ou $\overline{j}$.

Indication 62 · Énoncé p. 18 (Encore une équation fonctionnelle polynomiale)
Écrire dans la base canonique et identifier un système vérifié par les coefficients.

En déduire que $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} X^k$.

Indication 63 · Énoncé p. 18 (Re-encore une équation fonctionnelle polynômes)
Montrer que si z est une racine non nulle alors $z + 1$ aussi.

Indication 64 · Énoncé p. 18 (Block-Thielmann)

1. Pour Tchebychev remarquer que pour tout x, $\cos(n(mx)) = \cos(m(nx))$.
2. On a $y = ax + b$ ssi $x = \frac{y-b}{a}$.
3. Calcul explicite.
4. Regarder P_3.
5. Constater qu'en choisissant Λ on peut se ramener à $P_2 = X^2 + c$. Le cas $c = 0$ correspond à la base canonique et $c = -2$ à la base de Tchebychev.

Indication 65 · Énoncé p. 19 (Norme infinie sur le cercle unité)

1. Utiliser un peu de théorie des groupes ou juste remarquer qu'il s'agit d'une somme géométrique.
2. Utiliser une somme double: $\sum_{\omega\in\mathbb{U}_N} P(\omega) = \sum_{\omega\in\mathbb{U}_N}\sum_{k=0}^{n} a_k\omega^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{\omega\in\mathbb{U}_N}\omega^k$.
3. S'inspirer de la question précédente. À $k \in [\![0,n]\!]$ fixé, pour « isoler » un coefficient a_k remarquer que

$$\frac{1}{N}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_N} \omega^{-k}P(\omega) = a_k$$

et conclure que comme

$$\frac{1}{N}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_N} |P(\omega)| \geq |a_k|$$

au moins un des termes est plus grand que a_k.

Indication 66 · Énoncé p. 19 (Formule de Cauchy)
(Les non simplifications de l'énoncé sont volontaires.)

1. Traiter le cas des monômes puis conclure par linéarité (ou de manière équivalente écrire $P = \sum a_k X^k$).
2. Se ramener par « changement de variables » au cas précédent.

   Alternativement traiter le cas de la base de Taylor adaptée à z_0.

Indication 67 · Énoncé p. 19 (Principe du maximum)
Au choix utiliser la formule de Cauchy, ou bien le principe d'Argand, cf DM.

Indication 68 · Énoncé p. 20 (Un petit lemme utile en arithmétique)
Bernoulli.

Solution p. 45

Indication 69 · Énoncé p. 20 (Progression divisible)
On remarque que pour tout entier k, $P(n+k) \equiv P(k)[n]$.

Donc, en regroupant les termes on a

$$\sum_{k=0}^{n^2-1} P(k) = \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} P(qn+r)$$

qui est divisible par n.

Indication 70 · Énoncé p. 20 (Un exemple d'irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$)
Supposons $P = AB$ avec A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ non constants.

Pour tout k, $A(\lambda_k)B(\lambda_k) = -1$ donc $(A+B)(\lambda_k) = 0$.

Conclure par degré et en comptant les racines que $P = -A^2$ ce qui est impossible par coefficient dominant.

Indication 71 · Énoncé p. 20 (Divisibilité et divisibilité)
Comme il s'agit de polynômes unitaires, on peut effectuer une division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$, soient A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que

$$Q = AP + B$$

et $\deg(B) < \deg(P)$.

Alors il existe une infinité d'entiers n tels que $P(n)$ divise $B(n) = A(n)P(n) - Q(n)$.

Comme $\deg(P) > \deg(B)$, à partir d'un certain rang on a de plus $|P(n)| > |B(n)|$.

Donc (comme l'intersection d'un ensemble infini et du complémentaire d'un ensemble borné est infini), il existe une infinité d'entiers n tels que $B(n) = 0$.

Indication 72 · Énoncé p. 21 (Polynôme qui permute ?)

1. Lagrange.
2. Il n'existe pas de telle configuration.

   En effet pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ comme $a_{i+1} - a_i \mid P(a_{i+1}) - P(a_i)$, on a en particulier $a_{i+1} - a_i \mid a_{i+2} - a_{i+1}$.

   Donc en particulier, pour tout i, $|a_{i+1} - a_i| = |a_{i+2} - a_{i+1}|$. De plus si $a_{i+1} - a_i = -(a_{i+2} - a_{i+1})$ alors $a_i = a_{i+2}$, ce qui contredit le caractère distinct.

   Donc on a que pour tout i, $a_{i+2} - a_{i+1} = a_{i+1} - a_i$.

   Mais donc $a_r - a_1 = a_2 - a_1$ et $a_r - a_1 = (r-1)(a_r - a_1)$ ce qui est absurde.

Indication 73 · Énoncé p. 21 (Petit critère d'Eisenstein)
On a $\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \beta^{n-k} = 0$ d'où $\alpha\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \alpha^{k-1} \beta^{n-k}\right) = -a_0 \beta^n$ et $\beta\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \alpha^k \beta^{n-1-k}\right) = -a_n \alpha^n$.

On remarquer donc que si on recherche des racines « évidentes » on peut se restreindre à un nombre fini de valeurs à tester.

Indication 74 · Énoncé p. 21 (Contenu d'un polynôme et lemme de Gauss polynomial)

1. Deux commentaires possibles: cela ne dépend pas de n, et pour tout P, $P = c(P)\tilde{P}$ où $c(\tilde{P}) = 1$, ce qui est essentiel pour étudier les irréductibles.
2. Si p est un diviseur premier de $c(PQ)$, remarquer que $r = \min(\{k, pdivides.\neg a_k\})$ et $s = \min(\{k, pdivides.\neg b_k\})$ existent.

   Montrer que le coefficient de X^{r+s} dans PQ n'est pas divisible par p.
3. Se ramener à un contenu de 1.

Indication 75 · Énoncé p. 22 (Petit théorème de Fermat et coefficients binomiaux)
Le polynôme $(X+1)^p - (X^p + 1)$ est de degré $\leq p - 1$ et s'annule p fois.

Solution p. 45

Indication 76 · Énoncé p. 22 (Polynômes à valeurs entières)

1. Différence d'entiers et télescopage.

2. Que dire de $\Delta(H_p)$? Ou bien juste un coefficient binomial (disjonction de cas selon $n < 0$ ou $n > p$)

3. Écrire une «formule de Taylor discrète».

Solutions

Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 2 · Indication p. 23 (Parité et polynômes)

1. Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et procédons par chaîne d'implications.

▷ (i) ⇒ (ii) : Supposons que $P(-X) = P(X)$, c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (-X)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \big(1 - (-1)^k\big) X^k = 0$$

et donc (liberté de la base canonique), pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k\big(1 - (-1)^k\big) = 0$.

En particulier pour tout k impair $2a_k = 0$ c'est à dire $a_k = 0$.

D'où (ii).

▷ (ii) ⇒ (iii) : Supposons que tous les coefficients d'ordre impair de P sont nuls.

Alors

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &= \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} a_k X^k + 0 \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j} X^{2j}. \end{aligned}$$

Posons

$$Q = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j} X^j.$$

On a alors $Q(X^2 = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2j} X^{2j}$ et donc (iii).

▷ (iii) ⇒ (i) : Supposons qu'il existe Q tel que $P = Q(X^2)$.

Alors

$$P(-X) = Q\big((-X)^2\big) = Q(X^2) = P(X)$$

d'où (i).

D'où l'équivalence.

Pour l'imparité on a équivalence entre

(i) $P(-X) = -P(X)$
(ii) tous les coefficients d'ordre pair de P sont nuls
(iii) il existe un polynôme Q tel que $P(X) = XQ(X^2)$.

Procédons par exactement la même chaîne d'implications.

▷ (i) ⇒ (ii) : Supposons que $P(-X) = -P(X)$, c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(-X)^k = -\sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\big(1+(-1)^k\big)X^k = 0$$

et donc (liberté de la base canonique), pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k\big(1+(-1)^k\big) = 0$.

En particulier pour tout k pair $2a_k = 0$ d'où $a_k = 0$.

D'où (ii).

▷ (ii) ⇒ (iii) : Supposons que tous les coefficients d'ordre pair de P sont nuls.

Alors

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\ &= \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} a_k X^k + 0 \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} X^{2j+1} \\ &= X \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} X^{2j}. \end{aligned}$$

Posons

$$Q = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} X^{j}.$$

On a alors $Q(X^2) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} a_{2j+1} X^{2j}$ et donc $P = XQ(X^2)$ d'où (iii).

▷ (iii) ⇒ (ii) : Supposons qu'il existe Q tel que $P = XQ(X^2)$.

Alors $P(-X) = (-X)Q((-X)^2) = -XQ(X^2) = -P(X)$ d'où (ii).

D'où l'équivalence pour les polynômes impairs.

2.

3. Chacune des trois caractérisations permet de montrer ce résultat.

▷ **Par (i)**

Supposons P pair c'est à dire

$$P(-X) = P(X).$$

Alors en dérivant

$$-P'(-X) = P'(X)$$

i.e

$$P'(-X) = -P'(X)$$

et donc P' est impair.

Supposons que P est impair, c'est à dire

$$P(-X) = -P(X).$$

Alors en dérivant

$$-P'(-X) = -P'(X)$$

i.e

$$P'(-X) = P'(X)$$

et donc P' est pair.

▷ **Par (ii)**

Supposons

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où pour tout k impair $a_k = 0$.

Alors

$$P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

et on a bien pour tout k pair, comme $k+1$ impair, $(k+1)a_{k+1} = (k+1) \times 0 = 0$.

Supposons

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

où pour tout k pair $a_k = 0$.

Alors

$$P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

et on a bien pour tout k impair, comme $k+1$ pair, $(k+1)a_{k+1} = (k+1) \times 0 = 0$.

▷ **Par (iii)**

Supposons qu'il existe un polynôme Q tel que

$$P = Q(X^2)$$

alors en dérivant on a

$$P' = 2XQ'(X^2)$$

et en posant

$$R = 2Q'$$

on a bien

$$P' = XR(X^2).$$

Supposons qu'il existe un polynôme Q tel que

$$P = XQ(X^2)$$

alors en dérivant

$$P' = Q(X^2) + 2X^2Q'(X^2)$$

et en posant

$$R = (Q + 2XQ')$$

on a bien

$$P' = R(X^2).$$

4. Pour varier proposons une preuve qui utilise l'algèbre linéaire plutôt qu'une des trois caractérisations précédentes.

Soit

$$\begin{aligned} s : \mathbb{K}[X] &\to \mathbb{K}[X] \\ P &\mapsto P(-X). \end{aligned}$$

Alors s est linéaire et pour tout P, $s(s(P)) = P(-(-X)) = P$. D'où s est une symétrie.

Par le cours sur les symétries vectorielles, on en déduit

$$\mathrm{Ker}\big(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}\big) \oplus \mathrm{Ker}\big(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}\big) = \mathbb{K}[X].$$

Or

$$\mathrm{Ker}\big(s - \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}\big) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(-X) - P(X) = 0\}$$

c'est à dire l'ensemble des polynômes pairs, et

$$\mathrm{Ker}\big(s + \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}\big) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(-X) + P(X) = 0\}$$

c'est à dire l'ensemble des polynômes impairs.

D'où le l'ensemble des polynômes pairs et l'ensemble des polynômes impairs sont des sevs de $\mathbb{K}[X]$ supplémentaires.

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 3 · Indication p. 23 (Calculs de reste)

1. Par division euclidienne il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_0[X]$ tels que

$$P = Q(X-\alpha) + R$$
$$\deg(R) < \deg(X-\alpha) = 1.$$

En évaluant en α on a

$$P(\alpha) = 0 + R(\alpha)$$

et comme R est un polynôme constant, on en déduit

$$\boxed{R = P(\alpha)}.$$

2. Par division euclidienne il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_1[X]$ tels que

$$P = Q(X-\alpha)(X-\beta) + R$$
$$\deg(R) < \deg((X-\alpha)(X-\beta)) = 2.$$

En évaluant en α et en β on obtient

$$\begin{cases} P(\alpha) = 0 + R(\alpha) \\ P(\beta) = 0 + R(\beta). \end{cases}$$

Comme R est affine et que $\alpha \neq \beta$, on en déduit (équation d'une droite passant par deux points ou cas particulier de l'interpolation de Vandermonde, à revoir sans hésitation si nécessaire) que

$$\boxed{R = P(\alpha)\tfrac{X-\beta}{\alpha-\beta} + P(\beta)\tfrac{X-\alpha}{\beta-\alpha}} = \frac{P(\alpha)-P(\beta)}{\alpha-\beta}X + \frac{\alpha P(\beta) - \beta P(\alpha)}{\alpha-\beta}.$$

3. Par division euclidienne il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_1[X]$ tels que

$$P = Q(X-\alpha)^2 + R$$
$$\deg(R) < \deg((X-\alpha)^2) = 2.$$

En évaluant en α on obtient

$$P(\alpha) = 0 + R(\alpha).$$

De plus en dérivant on obtient

$$P' = Q'(X-\alpha)^2 + 2Q(X-\alpha) + R'$$

et donc en évaluant en α de nouveau

$$P'(\alpha) = 0 + 0 + R'(\alpha).$$

Par conséquent comme R est affine, on en déduit (équation d'une droite donnée par un point et une pente ou cas particulier de la formule de Taylor, à revoir sans hésitation si nécessaire) que

$$\boxed{R = P'(\alpha)(X-\alpha) + P(\alpha)}.$$

Solution pour l'exercice 15 · Énoncé p. 6 · Indication p. 24 (Rappels sur les coefficients binomiaux)
On a l'égalité polynomiale (formule du binôme)

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

1. En évaluant en 1 on obtient

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k$$

c'est à dire

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. En dérivant on obtient

$$n(1+X)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kX^{k-1}$$

c'est à dire par la formule du binôme de nouveau

$$n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kX^{k-1}$$

c'est à dire après une renumérotation

$$\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} kX^{k-1}.$$

Par égalité des coefficients on obtient donc que pour tout k

$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

3. En effectuant le produit $(1+X)^p(1+X)^q$ puis en utilisant la formule du binôme on a d'un côté

$$\begin{aligned}(1+X)^p(1+X)^q &= (1+X)^{p+q} \\ &= \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} X^k\end{aligned}$$

et de l'autre côté par la formule du binôme puis la définition du produit polynomial

$$\begin{aligned}(1+X)^p(1+X)^q &= \left(\sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} X^j\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i+j=k} \binom{p}{i}\binom{q}{j}\right) X^k.\end{aligned}$$

Par conséquent (par égalité) on a pour tout k,

$$\sum_{i+j=k} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \binom{p+q}{k}$$

ce qui est bien le résultat recherché.

4. On a pour tout entier r, par récurrence immédiate

$$\begin{aligned}((1+X)^n)^{(r)} &= n(n-1)\cdots(n-r+1)(1+X)^{n-r}\\ &= r!\binom{n}{r}(1+X)^{n-r}\end{aligned}$$

et donc d'un côté par dérivation puis par formule du binôme (et changement d'indice)

$$\begin{aligned}((1+X)^n)^{(r)} &= r!\binom{n}{r}\sum_{k=0}^{n-r}\binom{n-r}{k}X^k\\ &= r!\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}X^{k-r}.\end{aligned}$$

De l'autre côté par formule du binôme puis par dérivation

$$\begin{aligned}((1+X)^n)^{(r)} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right)^{(r)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(X^k)^{(r)}\\ &= \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}r!\binom{k}{r}X^{k-r}\\ &= r!\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{r}X^{k-r}.\end{aligned}$$

Par égalité on a donc bien pour tout k,

$$\binom{k}{r}\binom{n}{k} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}.$$

Solution pour l'exercice 45 · Énoncé p. 14 · Indication p. 29 (Somme de deux carrés)

Indications détaillées

Une somme de deux carrés étant toujours positive le sens réciproque est immédiat.

Pour le sens réciproque on procède de la manière suivante

- ▷ On montre que tout polynôme positif s'écrit comme produit de polynômes de degré 2 et de carrés de polynômes de degré 1.
- ▷ On montre que l'ensemble des polynômes s'écrivant comme somme de deux carrés est stable par produit
- ▷ On montre que les polynômes de degré 2 sans racine et les carrés de polynômes de degré 1 sont somme de deux carrés.

Ces trois points permettent alors de conclure.

Plus en détails

- ▷ Soit P un polynôme positif, par la caractérisation des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, on peut écrire

$$P = \alpha \prod_{j=1}^{r} (X-\lambda_j)^{m_j} \prod_{k=1}^{d} (X^2+b_kX+c_k)^{n_k}$$

où pour tout k, $(b_k)^2 - 4c_k < 0$, et les λ_j distincts.

Si par l'absurde il existe un j tel que m_j est impair alors au voisinage de λ_j, P change de signe ce qui est absurde.

Donc pour tout j, m_j est pair.

▷ Pour le deuxième point il s'agit de la remarque habituelle (cf nombre complexes)

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = (AC-BD)^2 + (AD+BC)^2.$$

▷ Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$(X-\lambda)^2 = (X-\lambda)^2 + 0$$

et pour $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 - 4c < 0$, or a la forme canonique

$$X^2+bX+c = \left(X - \left(-\frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}\right)^2.$$

Solution pour l'exercice 46 · Énoncé p. 14 · Indication p. 29 (Une variante de sommes de deux carrés)

1. Supposons tout d'abord que $\deg(P) \leq 2$.

Procédons d'abord au brouillon (phase d'analyse non nécessaire)

▷ **Brouillon** (ne pas écrire au propre)

On cherche A de degré au plus 1 et B de degré au plus 0 (constante) tels que

$$P = A^2 + (1-X^2)B^2.$$

Si de tels A et B conviennent alors en évaluant en 1 et -1 on a

$$P(1) = A(1)^2,$$
$$P(-1) = A(-1)^2.$$

i.e, comme $P(1)$ et $P(-1) \geq 0$,

$$A(1) = \pm\sqrt{P(1)}$$
$$A(-1) = \pm\sqrt{P(-1)}.$$

Pour déterminer B, cela est pratique si par exemple si A admet une racine λ dans $[-1,1]$ alors en évaluant en λ on a

$$B^2(1-\lambda^2) = P(\lambda)$$

et donc (positivité de P en λ), pour $\lambda \neq \pm 1$,

$$B = \pm\sqrt{\frac{P(\lambda)}{1-\lambda^2}}.$$

En choisissant les $\pm$ on peut de plus forcer A à changer de signe.

Il reste alors à gérer $\lambda = \pm 1$, par exemple une dérivée car

$$P'(1) = 2A(1)A'(1) - 2B^2$$

et si $P(1) = 0$ et P positive au voisinage à gauche de 1 alors $P'(1) \leq 0$.

▷ **Construction au propre**

Posons (comme $P(1)$ et $P(-1)$ sont positifs),

$$A = \sqrt{P(1)}\frac{X+1}{1+1} + \left(-\sqrt{P(-1)}\right)\frac{X-1}{-1-1}.$$

Il s'agit d'un polynôme de degré ≤ 1 vérifiant

$$A(1) = \sqrt{P(1)},$$
$$A(-1) = -\sqrt{P(-1)}.$$

d'où

$$(P - A^2)(1) = 0,$$
$$(P - A^2)(-1) = 0.$$

Par conséquent

$$(1 - X^2) \mid P - A^2$$

et comme par degré

$$\deg(P - A^2) \leq 2$$

on en déduit qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$P - A^2 = \beta(1 - X^2).$$

- ▷ Si $P(1) > 0$ et $P(-1) > 0$, alors A change de signe entre -1 et 1 et donc il existe $\lambda \in]-1, 1[$ tel que $A(\lambda) = 0$.

  En évaluant en λ on a

  $$\beta = \frac{P(\lambda)}{1 - \lambda^2} \geq 0.$$

- ▷ Si par exemple $P(1) = 0$ alors en dérivant puis en évaluant en 1,

  $$P'(1) - 0 = -2\beta$$

  et comme P admet un minimum local à gauche en 1, $P'(1) \leq 0$ et donc $\beta \geq 0$.

Dans tous les cas $\beta \geq 0$ et en posant $B = \sqrt{\beta}$ on a bien

$$\boxed{P = A^2 + (1 - X^2)B^2}.$$

2. On a de manière générale pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ (peut se retrouver en calculant au brouillon dans $(\mathbb{R}[X])\left[\sqrt{Q}\right]$), pour tous $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$,

$$(A^2+QB^2)(C^2+QD^2)=(AC+QBD)^2+Q(AD-BC)^2.$$

Ainsi les polynômes de la forme A^2+QB^2 sont stables par produit.

Considérons la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Il existe $\lambda_1,...,\lambda_r\in\mathbb{R}$ et $Q_1,...,Q_s\in\mathbb{R}[X]$ irréductibles unitaires de degré 2 tels que

$$P=\kappa\prod_{\substack{i\in[\![1,r]\!]\\ \lambda_i\leq -1}}(X-\lambda_i)^{\alpha_i}\prod_{\substack{(i\in[\![1,r]\!]\\ \lambda_i\in]}}-1,1[)(X-\lambda_i)^{\alpha_i}\prod_{\substack{i\in[\![1,r]\!]\\ \lambda_i\geq 1}}(\lambda_i-X)^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{s}Q_j^{\beta_j}.$$

- ▷ Tous les facteurs Q_j sont strictement positifs sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[-1,1]$. Par le point précédent, ils sont de la forme $A^2+(1-X^2)B^2$.
- ▷ Soit $i\in[\![1,r]\!]$ tel que $\lambda_i\in]-1,1[$.

  Alors au voisinage de λ_i on a

  $$P(x)\underset{x\to\lambda_i}{\sim}\underbrace{\kappa\prod_{\ell\neq i}(\lambda_i-\lambda_\ell)^{\alpha_\ell}\prod_{j=1}^{s}Q_j(\lambda_i)}_{\text{constante non nulle}}\qquad (x-\lambda_i)^{\alpha_i}.$$

  Par positivité de P au voisinage de λ_i, α_i est **pair** et on a $(X-\lambda_i)^2$ qui est de la forme $A^2+(1-X^2)B^2$.
- ▷ Soit $i\in[\![1,r]\!]$ tel que $\lambda_i\notin]-1,1[$. Alors $X-\lambda_i$ si $\lambda_i\leftarrow 1$ ou λ_i-X si $\lambda_i>1$ est positif sur $[-1,1]$ et par conséquent de la forme $A^2+(1-X^2)B^2$.
- ▷ Enfin on a $\kappa>0$ (quotient de deux termes positifs, en évaluant en un point de $]-1,1[$ qui n'est pas racine de P) et donc de la forme $A^2+(1-X^2)B^2$.

Par conséquent $\boxed{P \text{ est de la forme } A^2+(1-X^2)B^2}$.

Solution pour l'exercice 58 · Énoncé p. 17 · Indication p. 30 (Des équations fonctionnelles polynomiales)

1. Les polynômes constants sont solutions.

Si P est solution non constante alors $\deg(P)^2=\deg(P)$ d'où $\deg(P)=1$.

De plus $P=aX+b$ est solution ssi $a(aX+b)+b=aX+b$ c'est à dire $a^2=a$ et $ab+b=b$.

Les solutions sont donc les polynômes constants et X.

2. Si P est une solution alors $2\deg(P)=2+\deg(P)$ d'où $\deg(P)=-\infty$ ou $\deg(P)=2$.

On peut alors continuer l'analyse, par exemple en remarquant que $P(1)=2P(1)$ d'où $P(1)=0$ et $2P(-1)=P(1)$ d'où $P(-1)=0$, d'où $X^2-1\mid P$, etc. ou tout simplement résoudre le système 3×3 sans réfléchir.

Un polynôme $P=aX^2+bX+c$ est solution ssi $aX^4+bX^2+c=aX^4+bX^3+(a+c)X^2+bX+c$ c'est à dire ssi

$$\begin{cases} a & = a \\ b & = 0 \\ a+c & = 0 \\ b & = 0 \\ c & = c. \end{cases}$$

ou encore ssi $a = -c$ et $b = 0$.

On obtient donc (après synthèse) que les solutions sont les

$$\lambda(X^2-1), \lambda \in \mathbb{K}.$$

3. Aucun polynôme constant n'est solution.

De plus si P de degré $n \geq 1$ et de coefficient dominant $a_n \neq 0$ est solution alors $2^n a_n = a_n$.

Il n'y a donc pas de solution.

Solution pour l'exercice 68 · Énoncé p. 20 · Indication p. 32 (Un petit lemme utile en arithmétique)
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $a-b$ divise $a^k - b^k$ (formule de Bernoulli). D'où avec $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$ où pour tout k, $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ on a

$$P(a) - P(b) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(a^k - b^k\right)$$

est divisible par $a-b$.

Solution pour l'exercice 75 · Énoncé p. 22 · Indication p. 33 (Petit théorème de Fermat et coefficients binomiaux)
On effectue tous les calculs dans $\frac{\mathbb{Z}}{p}Z$ et $\frac{\mathbb{Z}}{p}\mathbb{Z}[X]$.

D'après le petit théorème de Fermat les polynômes $(X+1)^p$ et X^p+1 coïncident sur tout $\frac{\mathbb{Z}}{p}\mathbb{Z}$, car pour tout a, $(a+1)^p = a+1 = a^p+1$.

Donc le polynôme $Q = (X+1)^p - (X^p+1)$ admet au moins p racines.

Or il est de degré inférieur ou égal à $p-1$, en effet $(X+1)^p$ et X^p+1 sont tous les deux de degré p et ont le même coefficient dominant (égal à 1).

Par conséquent $Q = 0$ c'est à dire

$$(X+1)^p = X^p + 1$$

Par le binôme, comme $(X+1)^p = 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} X^k + X^p$ on en déduit que, dans $\frac{\mathbb{Z}}{p}\mathbb{Z}$, pour tout k entre 1 et $p-1$, $\binom{p}{k} = 0$ ce qui est le résultat recherché.