Matrices (Retour)

Énoncés 2
Ouvertures 17
Indications 19
Solutions 27

Énoncés

Dans toute la feuille du TD, sauf mention du contraire, $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ un corps (tel que $2 \neq 0$) et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1 (◔★♣ Classes de similitudes des homothéties)
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Déterminer l'ensemble des matrices semblables à λI_n.

Indication p. 19

Exercice 2 (◔★♣ Rang et petit bloc)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrivant par blocs

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $\tilde{A} \in \mathrm{M}_{n-1}(K)$.

Montrer que

$$\mathrm{rg}(A) = 1 + \mathrm{rg}\left(\tilde{A}\right).$$

Indication p. 19

Exercice 3 (◔★♠ Matrices de rang 1 (ligne/colonne))
Soit $A \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Montrer que les deux conditions suivantes sont **équivalentes**:

(i) $\mathrm{rg}(A) = 1$

(ii) $\exists L \in M_{1,q}(\mathbb{K}) \setminus \left\{0_{1,q}\right\}, C \in M_{p,1}(\mathbb{K}) \setminus \left\{0_{p,1}\right\}, A = CL$

Indication p. 19

Exercice 4 (◔★♠ Matrices de rang 1 (similitudes/trace))
Soit u un endomorphisme de rang 1.

Montrer que

- ▹ **Si** $\mathrm{tr}(u) \neq 0$ **alors** il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{tr}(u) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$
- ▹ **Si** $\mathrm{tr}(u) = 0$ **alors** il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & \\ 0 & 0 \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right).$$

Indication p. 19

Exercice 5 (◔★♣ Trace d'un projecteur/d'une symétrie)
Soient F et S deux sevs supplémentaires de E. Soit π la projection sur F parallèlement à S et σ la symétrie par rapport à F parallèlement à S.

1. Exprimer $\mathrm{tr}(\pi)$ et $\mathrm{tr}(\sigma)$ en fonction de $\dim(F)$ et $\dim(S)$.

2. Exprimer $\mathrm{tr}(\pi)$ en fonction de $\mathrm{rg}(\pi)$.

Indication p. 19

Exercice 6 (◔★ Le rang ne dépend pas du corps)
Soit $A \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

On note $\mathrm{rg}_{\mathbb{R}}(A)$ le rang de A en tant que matrice de $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{rg}_{\mathbb{C}}$ le rang de A en tant que matrice de $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.

Montrer que
$$\mathrm{rg}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{rg}_{\mathbb{C}}(A).$$

Indication p. 19

Exercice 7 (◔★ Un théorème de représentation)
Soit φ une forme linéaire sur $\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe une et unique matrice $A \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall M \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \varphi(M) = \mathrm{tr}(A^\top M).$$

Indication p. 19

Exercice 8 (◑★ Nilpotent d'ordre maximal)
Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente d'ordre $d \in \mathbb{N}^*$ ssi $A^d = 0_n$ et $A^{d-1} \neq 0_n$.

1. Soit A une matrice nilpotente d'ordre n.

Montrer que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2. En déduire que toutes les matrices nilpotentes d'ordre n sont semblables.

3. Dans le cas $n = 4$ proposer deux matrices nilpotentes d'ordre 2 non semblables.

Indication p. 19

Exercice 9 (◔★ Sous-algèbre et inverses)
On dit que $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ si c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}, +, .)$ et un sous-anneau de $(\mathcal{A}, +, \times)$.

Autrement dit une sous-algèbre est un ensemble stable par combinaison linéaire et produit et contenant I_n.

1. Donner des exemples de sous-algèbres de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que pour $P \in \mathcal{A} \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $P^{-1} \in \mathcal{A}$.

Indication p. 20

Exercice 10 (◔★ Matrice d'une structure complexe)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indication p. 20

Exercice 11 (◑★ Classes de similitude dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$)
Soit $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer qu'une et exactement une des propositions suivantes est vérifiée.

(i) Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, et dans ce cas λ est unique.

(ii) Il existe $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que A semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, et dans ce cas λ est unique.

(iii) Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda \neq \mu$ tel que A semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et dans ce cas $\{\lambda, \mu\}$ est unique.

Indication p. 20

Exercice 12 (◔★ Trace de la transposée)
Soit $T \in \mathcal{L}(M_n(K))$ l'application qui à toute matrice associe sa transposée.

Déterminer $\mathrm{tr}(T)$.

Indication p. 20

Exercice 13 (◔★ Similitude et corps, cas 2×2)
Soient $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

Montrer que A et B semblables dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ **ssi** A et B semblables dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

Indication p. 20

Exercice 14 (◔★ Matrice d'Attila)
Soit

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de $\mathrm{M}_n(K)$ dont tous les coefficients valent 1.

Montrer que J est semblable à

$$\left(\begin{array}{c|c} n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Indication p. 20

Exercice 15 (◔★ Des Huns camouflés)
Déterminer en fonction de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ le rang de

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Indication p. 20

Exercice 16 (◑★♠ Rang par blocs)
Soient $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_q(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

On suppose

$$\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A).$$

Montrer que

$$\mathrm{rg}\left(\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)\right) = \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(C).$$

Indication p. 20

Exercice 17 (◔★ Un seul bloc inversible)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
(i) $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$
(ii) $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$
(iii) A est semblable à une matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

où $B \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$, $r = \mathrm{rg}(A)$.

Indication p. 21

Exercice 18 (◔★ Tout hyperplan contient une matrice inversible)
Soit H un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que

$$H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \varnothing.$$

Indication p. 21

Exercice 19 (◑★ Caractérisation du rang et produit)
Soit $M \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\mathrm{rg}(M) = \min\left(\left\{r \in \mathbb{N} \mid \exists (A,B) \in M_{nr}(\mathbb{K}) \times M_{rp}(\mathbb{K}), M = AB\right\}\right).$$

Indication p. 21

Exercice 20 (◑★ Une autre caractérisation du rang)
Soit $M \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathrm{rg}(M) = r$ **ssi** il existe $(X_1, ..., X_r) \in (\mathbb{K}^n)^r$ libre et $(Y_1, ..., Y_r) \in (\mathbb{K}^p)^r$ libre tels que

$$A = \sum_{k=1}^{r} X_k Y_k^\top.$$

Indication p. 21

Exercice 21 (◔★ Calcul explicite: périodiques (détaillé))
Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{R}_p$ l'ensemble des suites p-périodiques

$$\mathcal{R}_p = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n \right\}$$

et T l'opérateur de translation

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} &\to \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} &\mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}_p$ est un sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et est stable par T.
2. Montrer que l'endomorphisme induit $T_{\mathcal{R}_p}$ est un automorphisme.
3. Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ on note c_k la suite définie par, $\forall n \in \mathbb{N}, (c_k)_n = \delta_{n\equiv k[p]}$.

   Montrer que $\mathcal{C} = (c_0, c_1, ..., c_{p-1})$ est une base de $\mathcal{R}_p$.
4. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\left(T_{\mathcal{R}_p}\right)$.
5. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{p}}$.

   Pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ on note u_k la suite définie par, $\forall n \in \mathbb{N}, (u_k)_n = \left(\omega^k\right)^n$.

   Montrer que $\mathcal{U} = (u_0, u_1, ..., u_{p-1})$ est une base de $\mathcal{R}_p$.
6. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{U}}\left(T_{\mathcal{R}_p}\right)$.
7. Montrer que les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \omega^{p-1} \end{pmatrix}$$

   sont semblables.

Indication p. 21

Exercice 22 (◔☆ Pivot et similitude: est-ce une bonne idée ?)
On suppose que E est de dimension 2, soit (e_1, e_2) une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On note

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u).$$

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{(e_2,e_1)}(u)$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{(\lambda e_1,e_2)}(u)$.
3. Soit $\mu \in \mathbb{K}$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{(e_1+\mu e_2,e_2)}(u)$.

Indication p. 22

Exercice 23 (◑★ Nilpotents d'ordre 2)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} 0_{r,n-r} & I_r \\ \hline 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{array}\right)$$

où $r = \mathrm{rg}(u) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Indication p. 22

Exercice 24 (◔★ Encore Vandermonde et Lagrange)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

On note

$$\begin{aligned} \mathrm{eval}_x \, \mathbb{K}_n[X] &\to \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\mapsto \begin{pmatrix} P(x_0) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. Montrer **avec le moins de calculs possibles** que eval_x est inversible **ssi** les x_k $(0 \leq k \leq n)$ sont deux à deux distincts.
2. En déduire (toujours avec le moins de calculs possibles) une CNS sur les x_k $(0 \leq k \leq n)$ pour que la matrice

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

soit inversible.
3. Proposer au moins 3 méthodes pour calculer de manière générale une expression de $\mathrm{rg}(V_n)$ en fonction de $\left|\{x_k\}_{0\leq k\leq n}\right|$ (c'est à dire du nombre de x_k distincts). En rédiger au moins une.

Indication p. 22

Exercice 25 (◔★ Inversible et projecteur)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant $P^2 = P$ tels que

$$A = UP.$$

Indication p. 22

Exercice 26 (◑★ Formes linéaires invariantes par similitudes)
Soit $\varphi \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^*$ une forme linéaire sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ invariante de similitude, c'est à dire telle que pour toutes matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, si A et B sont semblables alors $\varphi(A) = \varphi(B)$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \operatorname{tr}$.

Indication p. 22

Exercice 27 (◑★ Un bloc maximal)
Soit $r \in [\![0, n]\!]$ et $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r qui peut s'écrire par blocs

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

où $A \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$.

1. Montrer que

$$\mathrm{Im}(M) = \left\{ M\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}, X \in \mathbb{K}^r \right\}.$$

2. En déduire que pour tout $Y \in \mathbb{K}^{n-r}$ il existe un et unique $X \in \mathbb{K}^r$ tel que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M)$$

et exprimer X en fonction de Y.

3. En utilisant la question précédente montrer que

$$D - CA^{-1}B = 0.$$

Indication p. 22

Exercice 28 (◔★ Retour sur les matrices de Pascal)
Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ on note

$$T_n(\alpha) = \left(\binom{j-1}{i-1}\alpha^{j-i}\right)_{\substack{1\leq i\leq n+1\\ 1\leq j\leq n+1}}.$$

1. Montrer **avec le moins de calculs possibles** que pour tous $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $T_n(\alpha+\beta) = T_n(\alpha)T_n(\beta)$.
2. Soient $(u_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(v_k)_{0\leq k\leq n}\in\mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$\forall i \in [\![0,n]\!], v_i = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}u_j.$$

Déterminer une expression de $(u_k)_{0\leq k\leq n}$ en fonction de $(v_k)_{0\leq k\leq n}$.

Indication p. 23

Exercice 29 (◑☆ Matrices semblables à leur carré)
Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ semblables à leur carré.

Indication p. 23

Exercice 30 (◑★ Triangulaires et drapeaux)
Soit E un espace vectoriel de dimension n.

On dit qu'une suite de sevs de E, $F_0,...,F_d$ est un *drapeau* si

$$\{0_E\}\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_{d-1}\subset F_d = E.$$

On dit de plus que le drapeau est *complet* ssi $d=n$ et pour tout $k\in[\![0,...,n]\!]$, $\dim(F_k)=k$.

On dit qu'un endomorphisme $u\in\mathcal{L}(E)$ *stabilise* un tel drapeau ssi $\forall k\in[\![0,...,d]\!]$, u stabilise F_k.

1. Donner un exemple de drapeau, un exemple de drapeau complet.
2. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre
   (i) il existe un drapeau complet stabilisé par u
   (ii) il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure
3. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.

Indication p. 23

Exercice 31 (◑★ Équations matricelles avec trace)

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{S}_A$ l'ensemble des solutions de l'équation matricielle

$$X^\top + X = \mathrm{tr}(X)A$$

d'inconnue $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1.1. Montrer que $A_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{S}_A$.

1.2. Montrer que **si** $\mathrm{tr}(A) \neq 2$ ou $A \notin S_n(\mathbb{K})$ **alors** $\mathcal{S}_A = A_n(\mathbb{K})$.

1.3. Montrer que **si** $\mathrm{tr}(A) = 2$ et $A \in S_n(\mathbb{K})$ **alors** $\mathcal{S}_A = A_n(\mathbb{K}) \oplus \mathrm{Vect}(A)$.

2. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{S}_{A,B}$ l'ensemble des solutions de l'équation matricielle

$$X = \mathrm{tr}(X)A + B$$

d'inconnue $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

2.1. Montrer que si $\mathrm{tr}(A) \neq 1$ on a

$$\mathcal{S}_{A,B} = \left\{ \frac{\mathrm{tr}(B)}{1 - \mathrm{tr}(A)} A + B \right\}.$$

2.2. Montrer que si $\mathrm{tr}(A) = 1$ et $\mathrm{tr}(B) \neq 0$ alors

$$\mathcal{S}_{A,B} = \varnothing.$$

2.3. Montrer que si $\mathrm{tr}(A) = 1$ et $\mathrm{tr}(B) = 0$ alors

$$\mathcal{S}_{A,B} = \{\lambda A + B, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Indication p. 23

Exercice 32 (◔★ Puissances d'une matrice de rang 1)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$A^k = \mathrm{tr}(A)^{k-1} A.$$

Indication p. 23

Exercice 33 (◔★ Une inégalité de Sylvester sur le rang)
Soient $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{K})$.

Montrer que

$$\mathrm{rg}(AB) \geq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) - p$$

avec égalité ssi $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Im}(B)$.

Indication p. 23

Exercice 34 (◑★ Une inégalité de Frobenius sur le rang)
Soient A, B, C trois matrices telles que le produit ABC est bien défini.

Montrer que

$$\mathrm{rg}(ABC) \geq \mathrm{rg}(AB) + \mathrm{rg}(BC) - \mathrm{rg}(B)$$

avec égalité ssi $\mathrm{Im}(B) \cap \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}(BC) \cap \mathrm{Ker}(A)$.

Indication p. 24

Exercice 35 (◔☆ Arithmético-géométrique)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^n$ et $U_0 \in \mathbb{K}^n$.

On considère la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^n)^{\mathbb{N}}$ définie par

$$U_0 = U_0$$
$$\forall k \in \mathbb{N}, U_{k+1} = AU_k + B$$

Donner pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de U_n.

Indication p. 24

Exercice 36 (◑☆ Modifier la diagonale)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice n'étant pas une homothétie.

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{K}^n$ tel que (X, AX) est libre.
2. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à A telle que la première colonne de B est $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à A dont tous les coefficients diagonaux sont nuls sauf le dernier qui est $\mathrm{tr}(A)$.

Indication p. 24 · Solution p. 27

Exercice 37 (◑☆ Commutateurs et trace nulle)
Montrer que

$$\left\{AB - BA, (A, B) \in \left(\mathrm{M}_n(\mathbb{K})\right)^2\right\} = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}).$$

Indication p. 24 · Solution p. 29

Exercice 38 (◔★ Espace engendré par les matrices inversibles)
Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Indication p. 24

Exercice 39 (◔★ Des inversibles dans toutes les directions !)

1. Montrer que toute matrice non inversible est équivalente à une matrice triangulaire supérieure stricte.
2. Soit A une matrice non inversible. Montrer qu'il existe $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ telle que
$$\{A + \lambda U, \lambda \in \mathbb{K}^*\} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Indication p. 24

Exercice 40 (◔☆ Un terme au milieu)
Soient $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{K})$ deux matrices non nulles.

Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $APB \neq 0_{nq}$.

Indication p. 25

Exercice 41 (◑☆ Encore un terme au milieu)
Soient $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{qm}(\mathbb{K})$ deux matrices.

Déterminer
$$\dim\big(\{M \in \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{K}) \mid AMB = 0_{nm}\}\big).$$

Indication p. 25

Exercice 42 (◕☆ Un peu comme le rang)
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to [\![0, n]\!]$ vérifiant
$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) \leq \min(f(A), f(B)).$$

Indication p. 25

Exercice 43 (◔☆ Un calcul avec des rangs et projections)
Soient $A \in \mathrm{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ tels que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$.
2. Montrer que $BA = I_2$.

Indication p. 25

Exercice 44 (◔☆ Minicalcul)
Soit $n \geq 2$.

Déterminer $\mathrm{rg}\Big((\sin(i+j))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}\Big)$.

Indication p. 25

Exercice 45 (◔☆ Un petit calcul explicite)
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$ on note $\varphi_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie par $\varphi_k : t \mapsto t^k e^{\alpha t}$.
1. Déterminer la dimension de $E = \mathrm{Vect}\Big((\varphi_k)_{0\leq k\leq n}\Big)$.
2. Montrer que $D \in \mathcal{L}(E)$ définie par $D : f \mapsto f'$ est bien définie.
3. Écrire la matrice de D dans la base $(\varphi_0, ..., \varphi_n)$.
4. Déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $D - \lambda \mathrm{Id}_E \notin \mathrm{GL}(E)$.

Indication p. 25

Exercice 46 (◔☆ Matrice de la multiplication matricielle à gauche)
Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$. Soit $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathrm{M}_2(\mathbb{K}))$ défini par

$$\begin{aligned} \varphi_A : \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) &\to \mathrm{M}_2(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto AM. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$ la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_A)$.

Proposer une généralisation.

Indication p. 25

Exercice 47 (◔☆ Rang de la multiplication à gauche)
Soient n, p, q des entiers.

Soit $A \in \mathrm{M}_{np}(\mathbb{K})$. Exprimer en fonction de $\mathrm{rg}(A)$ le rang de

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{K}) &\to \mathrm{M}_{nq}(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto AM. \end{aligned}$$

Indication p. 25

Exercice 48 (◔☆ Idéaux bilatères de $M_n(\mathbb{K})$)
Soit $\mathcal{I} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ tel que:
- ▹ $\mathcal{I}$ sous-groupe additif de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,
- ▹ $\forall X \in \mathcal{I}, \forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), AX \in \mathcal{I}$,
- ▹ $\forall X \in \mathcal{I}, \forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), XA \in \mathcal{I}$.

Montrer que $\mathcal{I} = \left\{0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}\right\}$ ou $\mathcal{I} = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Indication p. 26

Exercice 49 (◑☆ Projecteurs et groupe)
Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de cardinal fini.

On pose (au cas où cela serait utile dans la preuve)

$$\Pi = \frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{M \in \mathcal{G}} M.$$

Montrer que $\sum_{M \in \mathcal{G}} \mathrm{tr}(M) \in \mathbb{N}$ et

$$|\mathcal{G}| \mid \sum_{M \in \mathcal{G}} \mathrm{tr}(M).$$

Indication p. 26

Exercice 50 (◑☆ Un peu de comptage)
Dans cette question on suppose que le corps $\mathbb{K}$ admet un nombre fini $q \in \mathbb{N}^*$ d'éléments.

1. Soit F un sev de $\mathbb{K}^n$ de dimension d. Montrer qu'il y a exactement $q^n - q^d$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$ non contenus dans F.
2. En déduire que

$$|\mathrm{GL}_n(K)| = \prod_{k=0}^{n-1} \left(q^n - q^k\right).$$

Indication p. 26

Exercice 51 (◑☆ Coefficient et similitude)
Soit $n \geq 2$.

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A n'est pas une homothétie. Montrer que pour tout $\beta \in \mathbb{K}^*$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$ il existe B une matrice semblable à A telle que $(B)_{ij} = \beta$.
2. Que dire dans le cas $i = j$?

Indication p. 26

Ouvertures

Les résultats et méthodes de ces exercices seront revus et améliorés en deuxième année.

Exercice 52 (◑★ Début de trigonasibilité des matrices complexes)
Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n^2}[X]$ non nul tel que $P(A) = 0$.
2. On rappelle que tout polynôme complexe non nul peut s'écrire comme un produit de la forme $\prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$ (où les $(\lambda_k)_{1\leq k\leq r} \in \mathbb{C}^r$ et $(m_k)_{1\leq k\leq r} \in (\mathbb{N}^*)^r$).

   Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

   où $\lambda \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.
3. Commenter.

Indication p. 26

Exercice 53 (◑★ Mini lemme des noyaux et diagonasibilité)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ distincts.

On suppose que

$$(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \circ (u - \mu \operatorname{Id}_E) = 0_E.$$

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont dans $\{\lambda, \mu\}$.

Indication p. 26

Exercice 54 (◔☆ Liberté de vecteurs propres)
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, ..., \lambda_d \in \mathbb{K}^d$ deux à deux distincts et $x_1, ..., x_d \in E^d \setminus \{0_E\}$ des vecteurs non nuls.

On suppose que pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $u(x_k) = \lambda_k x_k$.

Montrer que la famille $(x_1, ..., x_d)$ est libre.

Indication p. 26

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Classes de similitudes des homothéties)
L'écrire. On obtient λI_n est tout seul dans sa classe de similitude.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Rang et petit bloc)
Par exemple commencer par faire un pivot de pivot α.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Matrices de rang 1 (ligne/colonne))
Il y a au moins une méthode par définition du rang !

- ▷ En tant que rang des colonnes, avec $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \cdots & \ell_q \end{pmatrix}$ et C une colonne on a CL la matrice de colonnes $(\ell_1 C | \cdots | \ell_q C)$.
- ▷ En tant que rang des lignes avec $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ et L une ligne on a CL la matrice de lignes $\begin{pmatrix} c_1 L \\ \hline \vdots \\ \hline c_p L \end{pmatrix}$.
- ▷ En tant que rang d'une application linéaire si A est de rang A prendre C tq $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C)$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(L)$ et conclure.

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Matrices de rang 1 (similitudes/trace))
Soit $x \in E$ tel que $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$ (pourquoi existe-t-il ?). Écrire dans une base adaptée en distinguant les cas $u(x) \neq 0_E$ de $u(x) = 0_E$.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Trace d'un projecteur/d'une symétrie)
Écrire la matrice dans une base adaptée à $F \oplus S = E$.

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Le rang ne dépend pas du corps)
Se convaincre que cela est par exemple issu du pivot de Gauss.

Rédiger par équivalence à J_r.

Indication 7 · Énoncé p. 4 (Un théorème de représentation)
Commencer par l'unicité, puis en déduire l'existence.

Plus précisément il y a au moins deux méthodes:

- ▷ Par **analyse-synthèse**. Pour l'analyse si A convient en évaluant en les matrices élémentaires on obtient pour tout i, j, $(A)_{ij} = \varphi(E_{ij})$. Faire ensuite la synthèse.
- ▷ Par **dualité et dimension**. Considérer $\Xi \in \mathcal{L}\big(\mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K}), \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^*\big)$ définie par $\Xi : A \mapsto (M \mapsto \mathrm{tr}(A^\top M))$. Alors Ξ est injective car pour tout $A \in \mathrm{Ker}(\Xi)$, $\mathrm{tr}(A^\top A) = 0$ donc $A = 0$. Et par dimension Ξ est donc surjective.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Nilpotent d'ordre maximal)

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $n-1$. Montrer que $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est un base de E.
2. La similitude est un relation d'équivalence.
3. Regarder par exemple deux blocs diagonaux 2×2.

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Sous-algèbre et inverses)

1. Par exemple les matrices triangulaires supérieures, inférieures, triangulaires supérieures strictes, inférieures strictes. Ou encore les matrices diagonales.

   Ou bien étant donnée une structure de blocs, les matrices triangulaires supérieures (reps. inférieures, resp. strict), diagonales, etc. par blocs.

2. Étant donné $P \in \mathcal{A}$ inversible considérer l'application $M \mapsto PM$. Elle est injective par inversibilité de P et donc bijective par dimension. Il suffit ensuite de regarder l'antécédent de I_n. $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$

Indication 10 · Énoncé p. 5 (Matrice d'une structure complexe)
Prendre x non nul, montrer que $(x, u(x))$ est une base.

Indication 11 · Énoncé p. 5 (Classes de similitude dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$)
Pour l'existence remarquer que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0_2$.

Distinguer selon le nombre de racines de $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + 1$.

- ▷ Pour une racine double, on a $\mathrm{Ker}\left((A - \lambda I_2)^2\right) = \mathbb{C}^2$, et distinguer sur $\dim(\mathrm{Ker}((A - \lambda)))$.
- ▷ Pour de racines distinctes, montrer que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_2) \oplus \mathrm{Ker}(A - \mu I_2) = \mathbb{C}^2$.

Pour l'unicité considérer les $\mathrm{rg}(A - tI_2)$.

Indication 12 · Énoncé p. 5 (Trace de la transposée)
Au choix: l'écrire dans une base et faire le calcul. Ou bien remarquer que T est la symétrie par rapport à $S_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{K})$.

Indication 13 · Énoncé p. 5 (Similitude et corps, cas 2×2)
Pour le sens $\Rightarrow$ avec $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tq $A = P^{-1}AP$, montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Re}(P) + t\,\mathrm{Im}(P) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Pour cela considérer la fonction polynomiale $t \mapsto \det(\mathrm{Re}(P) + t\,\mathrm{Im}(P))$.

Indication 14 · Énoncé p. 6 (Matrice d'Attila)
On pourra commencer par remarquer que $\mathrm{rg}(J) = 1$ et utiliser ensuite l'un des nombreux exercices sur les matrices de rang 1.

Ou bien déterminer une base adaptée à partir de la base canonique (par exemple $\left(\sum_{i=1}^n e_i, e_1 - e_2, e_1 - e_3, ..., e_1 - e_n\right)$).

Indication 15 · Énoncé p. 6 (Des Huns camouflés)
Posons $J = M_{1,1}$. Alors $M_{\alpha,\beta} = \beta J + (\alpha - \beta)I_n$.

Et J est semblable à une matrice simple (cf 14).

Indication 16 · Énoncé p. 6 (Rang par blocs)
Par exemple procéder par blocs.

Effectuer une « transvection par blocs » sur les colonnes par blocs en multipliant à gauche par

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & D \\ \hline 0 & I_q \end{array}\right)$$

et montrer que la condition $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Im}(A)$ permet d'annuler le bloc sur-diagonal.

Utiliser ensuite la caractérisation du rang par équivalence.

Indication 17 · Énoncé p. 7 (Un seul bloc inversible)
L'implication (et même équivalence) entre (i) et (ii) a déjà été traitée. (Par exemple travailler sur $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A)$ et conclure par dimension).

L'implication de (ii) vers (iii) se traite en choisissant une base adaptée à $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A) = \mathbb{K}^n$.

L'implication (iii) vers (ii) est un calcul.

Indication 18 · Énoncé p. 7 (Tout hyperplan contient une matrice inversible)
On peut par exemple utiliser l'exercice 7. Alors il existe $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(A^\top M) = 0\}$. On cherche donc M inversible telle que $\mathrm{tr}(A^\top M) = 0$. Prendre par exemple une matrice d'opération élémentaire bien choisie.

Indication 19 · Énoncé p. 7 (Caractérisation du rang et produit)
- ▷ Le minimum est bien défini car $M = MI_p = I_n M$.
- ▷ Le rang est inférieur au minimum car si $M = AB$, $\mathrm{rg}(M)$ est majoré par les rang de A et B et en particulier par les dimensions de A et B.
- ▷ Il reste à montrer qu'avec $r = \mathrm{rg}(M)$, il existe $(A, B) \in \mathrm{M}_{nr}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{rp}(\mathbb{K})$ tq $M = AB$. Il y a alors plusieurs méthodes: rang sur lignes/colonnes, forme géométrique du théorème du rang, etc.

Indication 20 · Énoncé p. 7 (Une autre caractérisation du rang)
Pour le sens direct on peut par exemple se ramener à J_r par équivalence.

De même pour le sens réciproque, ou bien varier et interpréter comme un produit par blocs.

Indication 21 · Énoncé p. 8 (Calcul explicite: périodiques (détaillé))
1. Écrire les définitions.
2. L'injectivité est immédiate, conclure par dimension.
3. Une suite périodique de période p est entièrement définie par ses p premières valeurs. Remarquer que ces p premières valeurs sont les coordonnées dans $\mathcal{C}$.
4. On a $Tc_k = c_{k-1}$ (avec $0 - 1 = p - 1$).
5. Pour la liberté, une relation de liaison $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u_k = 0$ revient, en posant $Q = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k$ à $\forall \omega \in \mathbb{U}_p, Q(\omega) = 0$. Compter ensuite le nombre de racines et un majorant du degré. Conclure ensuite par dimension.
6. On a $Tu_k = \omega^k u_k$.

7. Peut très bien se faire sans les questions précédentes (penser matrice compagnon, endomorphismes cycliques, etc.) ou bien juste regarder les matrices obtenues précédemment.

Indication 22 · Énoncé p. 8 (Pivot et similitude: est-ce une bonne idée ?)
Faire le calcul explicitement, et en déduire que le résultat n'était peut être pas celui que vous attendiez.

Indication 23 · Énoncé p. 9 (Nilpotents d'ordre 2)
Interpréter $u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ géométriquement par $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Soit S un supplémentaire du noyau, avec $(s_1, ..., s_r)$ une base de S, remarquer que $(u(s_1), ..., u(s_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$ que l'on peut compléter en une base de $\mathrm{Ker}(u)$.

Indication 24 · Énoncé p. 9 (Encore Vandermonde et Lagrange)

1. Par dimension cela revient à calculer le noyau. Ce noyau est $\{P \in \mathbb{K}_n[X] \mid \forall k \in [\![0, n]\!], P(x_k) = 0\}$. Si les x_k tous distincts compter le nombre de racines et un majorant du degré. Si par exemple $x_1 = x_2$, que dire de $(X - x_1)(X - x_3)(X - x_4)\cdots(X - x_n)$.

2. Écrire la matrice de eval_x dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}^{n+1}$.

3. Soit r le nombre de valeurs distinctes, quitte à réordonner $(x_1, ..., x_r)$ deux à deux distincts.

- ▷ Juste regarder les lignes (ou les colonnes) !
- ▷ Par pivot malin et récurrence sur les matrices de Vandermonde tout échelonner…
- ▷ Le rang est majoré par r et par le cas inversible montrer qu'il existe une sous-matrice inversible de taille r.
- ▷ Le noyau $\mathrm{Ker}(\mathrm{eval}_x)$ est l'intersection des hyperplans $\mathrm{Ker}(P \mapsto P(x_k))$ et le rang de ces formes linéaires est r.
- ▷ Le noyau de $\mathrm{Ker}(\mathrm{eval}_x)$ est (factorisation par racines) $\{(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_r)Q(X), Q \in \mathbb{K}_{n-r}[X]\}$.
- ▷ L'image de eval_x est de dimension $\leq r$. Par interpolation l'image est de dimension $\geq r$.

Indication 25 · Énoncé p. 10 (Inversible et projecteur)
Utilise une forme du théorème du rang.

Par exemple la forme géométrique, ou bien $A = UV^{-1}J_rV$.

Indication 26 · Énoncé p. 10 (Formes linéaires invariantes par similitudes)
On pourra par exemple montrer que pour tous i et j, $E_{ii} \sim E_{jj}$ et $E_{ij} \sim -E_{ij}$.

Indication 27 · Énoncé p. 10 (Un bloc maximal)

1. Une inclusion est immédiate. Conclure par dimension.

2. Cela revient à montrer qu'il existe X tel que $M\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} 0 \\ -Y \end{pmatrix}$. Pour l'expression explicite et l'expression remarquer que l'on obtient par calcul par blocs, $AX + BY = 0$ (et $CX + DY = 0$) et que A est inversible.

3. Montrer que pour tout Y, $DY = CA^{-1}BY$. Pour cela prendre le X précédent et écrire la seconde équation par bloc, $CX + DY = 0$.

Indication 28 · Énoncé p. 11 (Retour sur les matrices de Pascal)

1. Considérer l'endomorphisme de $\tau_\alpha \in \mathbb{K}_n[\mathcal{X}]$ défini par $\tau_\alpha : P \mapsto P(X+\alpha)$ et sa matrice dans la base canonique.

2. En particulier $T_n(1)^{-1} = T_n(-1)$.

Indication 29 · Énoncé p. 11 (Matrices semblables à leur carré)
Être semblable à son carré est stable par similitude. Par l'exercice 11 se ramener à un nombre fini de cas à traiter.

On obtient les classes de similitude de $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}j&0\\0&j^2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

Indication 30 · Énoncé p. 11 (Triangulaires et drapeaux)

1. Par exemple le drapeau complet $(\mathbb{K}_k[X])_{k\in[\![0,n]\!]}$, ou bien avec $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, le drapeau $\left(\mathrm{Ker}\left(u^k\right)\right)_{0\leq k\leq d}$.

2. Si la matrice dans $(e_1, ..., e_n)$ est triangulaire supérieure, considérer les $(\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k))_{0\leq k\leq n}$.

Dans l'autre sens prendre une base adaptée au drapeau, c'est à dire telle que pour tout k, $(e_1, ..., e_k)$ est une base de F_k (pourquoi est-ce possible ?)

3. L'intérêt est ici d'utiliser des drapeaux pour formaliser la preuve.

Indication 31 · Énoncé p. 12 (Équations matricelles avec trace)

1. **1.1.** On rappelle que les matrices antisymétriques sont en particulier de coefficients diagonaux nuls.

1.2. Si X est un solution non antisymétrique alors $\mathrm{tr}(X)A \neq 0_n$. En prenant la trace obtenir $2\,\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X)\,\mathrm{tr}(A)$ et en prenant la transposée $\mathrm{tr}(X)A = \mathrm{tr}(X)A^\top$.

1.3. Commencer par l'inclusion et le caractère direct de la somme. Utiliser ensuite une analyse-synthèse (ou une CL bien choisie).

2. Commencer par remarquer que pour déterminer X il suffit de déterminer $\mathrm{tr}(X)$.

2.1. Soit X une solution. Prendre la trace de l'équation. Vérifier que c'est bien une solution.

2.2. L'inclusion $\subset$ est toujours vraie. Vérifier que l'inclusion $\supset$ est bien vérifiée.

Indication 32 · Énoncé p. 12 (Puissances d'une matrice de rang 1)
On pourra commencer par traiter les exercices 3 ou 4.

Indication 33 · Énoncé p. 12 (Une inégalité de Sylvester sur le rang)
Écrire votre forme préférée du théorème du rang (par exemple $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}\left(A_{|B}\right) = \mathrm{rg}(B) - \dim(\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(B))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = p - \mathrm{rg}(A)$).

On pourra regarder aussi l'exercice 34 qui est une généralisation de ce résultat.

Indication 34 · Énoncé p. 13 (Une inégalité de Frobenius sur le rang)
On pourra commencer par regarder l'exercice 33 qui est un cas particulier.

Écrire la formule du rang appliquée à $A_{|\operatorname{Im}(B)}$ et $A_{|\operatorname{Im}(BC)}$.

Alternativement (pourquoi est-ce en fait la même méthode ?), prendre S un supplémentaire de $\operatorname{Im}(BC)$ dans $\operatorname{Im}(B)$ et montrer que $\operatorname{Im}\left(A_{|S}\right) + \operatorname{Im}\left(A_{|BC}\right) = \operatorname{Im}(AB)$.

Ou encore (pourquoi est-ce en fait la même méthode ?) se ramener à des matrices de la forme $Q^{-1}J_rP$ et faire plein de calculs par blocs…

Indication 35 · Énoncé p. 13 (Arithmético-géométrique)
Faire de même que pour les suites réelles.

Indication 36 · Énoncé p. 13 (Modifier la diagonale)

1. Si pour tout X, (X, AX) liée alors A est une homothétie.
2. Compléter (X, AX) en une base.
3. Faire une récurrence.

   Pour l'hérédité, avec A semblable à $\left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & \tilde{A} \end{array}\right)$ si $\tilde{A}$ n'est une homothétie considérer une matrice P de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{P} \end{array}\right)$. Si c'est une homothétie nulle il n'y a plus rien à faire, et si c'est une homothétie non nulle se ramener au cas général par une transvection.

Solution p. 27

Indication 37 · Énoncé p. 13 (Commutateurs et trace nulle)
Le sens $\subset$ est rapide.

Pour le sens réciproque, se ramener, par exemple en utilisant l'exercice 36, au cas de la diagonale nulle.

Pour le cas de diagonale nulle, prendre A diagonale, B quelconque et écrire $AB - BA$.

Solution p. 29

Indication 38 · Énoncé p. 14 (Espace engendré par les matrices inversibles)
Il suffit d'écrire les E_{ij} comme CL de matrices inversibles.

Pour $i \neq j$, que dire de la transvection $I_n + E_{ij}$? Pour $i = j$ que dire de $P_\tau + E_{ii}$ où τ est une transposition telle que $\tau(i) \neq i$?

Indication 39 · Énoncé p. 14 (Des inversibles dans toutes les directions !)

1. Il s'agit ici d'équivalence. Donc rang.
2. Traiter le cas triangulaire supérieur.

Indication 40 · Énoncé p. 14 (Un terme au milieu)
Par exemple en terme d'endomorphismes, avec $x \in \mathrm{Im}(B)$ non nul et $y \notin \mathrm{Ker}(A)$, construire C tq $y = Cx$ puis compléter.

Indication 41 · Énoncé p. 14 (Encore un terme au milieu)
On peut par équivalence se ramener au cas ou $A = J_{\mathrm{rg}(A)}$ et $B = J_{\mathrm{rg}(B)}$ et interpréter par blocs.

Alternativement (et de manière équivalente) constater qu'une CNS d'appartenance de M à l'ensemble est $\mathrm{Im}\left(M_{\mathrm{Im}(B)}\right) \subset \mathrm{Ker}(A)$.

Indication 42 · Énoncé p. 14 (Un peu comme le rang)
- ▷ On constate que les fonctions $f = F \circ \mathrm{rg}$ avec $F :: [\![0, n]\!] \to [\![0, n]\!]$ croissante conviennent.
- ▷ Remarquer que $f(I_n) = \max_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}(f)$, puis en montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, $f(A) = \max_{\mathrm{M}_n(\mathbb{K})}(f)$.
- ▷ Montrer que multiplier par une matrice fait diminuer f, et donc par symétrie conserve f.
- ▷ Montrer que si A et B sont équivalentes alors $f(A) = f(B)$ et en déduire qu'il existe F tq $f = F \circ \mathrm{rg}$.
- ▷ Pour la monotonie, remarquer que $J_r J_{r+1} = J_r$.

Indication 43 · Énoncé p. 15 (Un calcul avec des rangs et projections)
1. Le rang est au moins 2 par le produit, et donc exactement 2 par les tailles.
2. On a $(AB)^2 = AB$ donc $A(BA - I_2)B = 0_3$. Calculer ensuite les possibilités pour le rang de $BA - I_2$.

Indication 44 · Énoncé p. 15 (Minicalcul)
Utiliser les formules d'addition pour montrer que le rang est inférieur à 2. Montrer que le rang est 2.

Indication 45 · Énoncé p. 15 (Un petit calcul explicite)
1. Montrer que la famille est libre en remarquant qu'une relation de liaison $\sum_{k=0}^{n} \varphi_k = 0$ peut s'interpréter comme $\forall t \in \mathbb{R}, P(t)e^{\alpha t} = 0$ pour $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$.
2. La linéarité est immédiate, pour montrer que E stable par D remarquer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P(t)e^{\alpha t}) = (\alpha P(t) + P'(t))e^{\alpha t}$
3. Le calcul précédent montrer que $D(\varphi_k) = \alpha\varphi_k + k\varphi_{k-1}$ pour $k \geq 1$.
4. Remarquer que $D - \lambda\,\mathrm{Id}$ admet une matrice triangulaire dans la base précédente.

Indication 46 · Énoncé p. 15 (Matrice de la multiplication matricielle à gauche)
Aucun piège, il faut juste calculer les AE_{ij} puis prendre les coordonnées.

Indication 47 · Énoncé p. 16 (Rang de la multiplication à gauche)
Par exemple le noyau est l'ensemble des matrices M telles que $\mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(A)$, qui est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathbb{K}^q, \mathrm{Ker}(A))$.

Ou bien en s'inspirant de l'exercice 46, écrire la matrice de l'application dans la base canonique bien ordonnée et conclure par rang par bloc.

Indication 48 · Énoncé p. 16 (Idéaux bilatères de $M_n(\mathbb{K})$)
Remarquer que $\mathcal{I}$ est en particulier stable par équivalence.

Montrer que si on a un J_r non nul alors on a J_1 puis conclure.

Indication 49 · Énoncé p. 16 (Projecteurs et groupe)
Montrer que Π est un projecteur et en déduire que sa trace est entière.

Indication 50 · Énoncé p. 17 (Un peu de comptage)
1. Un sev de dimension d admet q^d vecteurs.
2. Pour construire successivement les colonnes d'une matrice inversible, il faut et suffit qu'à chaque étape la colonne suivante soit non contenue dans le Vect des colonnes précédentes.

Indication 51 · Énoncé p. 17 (Coefficient et similitude)
1. Montrer qu'il existe x tq $(x, u(x))$ est libre et compléter en une base. Cela permet de traiter $(i, j) = (1, 2)$ et $\beta = 1$. Le cas général s'y ramène.
2. Commencer par regarder le cas de la dimension 2.

Indication 52 · Énoncé p. 17 (Début de trigonasibilité des matrices complexes)
1. Cela revient à montrer qu'il existe une relation de liaison non triviale pour la famille $\left(I_n, A, A^2, ..., A^{n^2}\right)$. Compter le nombre de vecteurs.
2. Avec $P = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k}$ on obtient alors $\prod_{k=1}^{r} (A - \lambda_k I_n)^{m_k} = 0_n$. Donc au moins un des $A - \lambda_k I_n$ est non inversible (car un produit de matrices inversibles est inversible et en particulier non nul). Fixons un tel λ Avec $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ non nul toute base adaptée à $\mathrm{Vect}(x) \subset \mathbb{K}^n$ convient.
3. Beaucoup de commentaires à faire ! Sans viser l'exhaustivité:
   - ▷ Par récurrence on peut alors montrer que toute matrice complexe est semblable à une matrice triangulaire.
   - ▷ Ce résultat est faux dans $\mathbb{R}$, ainsi $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est semblable à aucune matrice triangulaire.
   - ▷ Ce n'est que le début de la *réduction des endomorphismes* !

Indication 53 · Énoncé p. 18 (Mini lemme des noyaux et diagonasibilité)
Commencer par montrer que

$$\mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mu \,\mathrm{Id}_E) = E$$

puis prendre une base adaptée à cette somme directe.

Indication 54 · Énoncé p. 18 (Liberté de vecteurs propres)
Écrire une relation de liaison. Appliquer u un certain nombre de fois, faire des combinaisons linéaires et remarquer l'apparition de Vandermonde/Lagrange.

Solutions

Solution pour l'exercice 36 · Énoncé p. 13 · Indication p. 24 (Modifier la diagonale)

1. Il s'agit d'un exercice classique.

Supposons par l'absurde que pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, (X, AX) est liée. Par conséquent pour tout $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ il existe $\lambda_X \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda_X X$ (car $X \neq 0_{\mathbb{K}^n}$).

Soit $X, Y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Procédons par disjonction de cas pour montrer que $\lambda_X = \lambda_Y$.

- Si X, Y est liée alors (comme $Y \neq 0_{\mathbb{K}^n}$) il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $X = \mu Y$. Comme $X \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ on a $\mu \neq 0$.

  On a alors
  $$AX = A(\mu Y) = \mu AY = \mu\lambda_Y Y$$
  ainsi que
  $$AX = \lambda_X X = \lambda_X \mu Y.$$
  Comme $Y \neq 0_{\mathbb{K}^n}$, on en déduit que $\mu\lambda_X = \mu\lambda_Y$.

  Et comme $\mu \neq 0$ on a bien
  $$\lambda_X = \lambda_Y.$$
- Si X, Y est libre alors
  $$A(X+Y) = (\lambda_{X+Y})(X+Y)$$
  et aussi
  $$A(X+Y) = AX + AY = \lambda_X X + \lambda_Y Y.$$
  Par conséquent
  $$(\lambda_{X+Y} - \lambda_X)X + (\lambda_{X+Y} - \lambda_Y)Y = 0_{\mathbb{K}^n}$$
  et donc par liberté
  $$\lambda_X = \lambda_{X+Y} = \lambda_Y.$$

Dans tous les cas $\lambda_X = \lambda_Y$.

Ainsi, il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ (indépendant de X) tel que pour tout $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $AX = \lambda X$. Comme on a aussi $A0_{\mathbb{K}^n} = 0_{\mathbb{K}^n}$ on en déduit $A = \lambda I_n$.

D'où A est une homothétie, ce qui est absurde.

On a donc bien montré qu'il $\boxed{\text{existe } X \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } (X, AX) \text{ est libre}}$.

2. Soit
$$\begin{aligned} u : \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^n \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$
l'application linéaire canoniquement associée à A.

Par la question précédent il existe $X_1 \in \mathbb{K}^n$ tel que (X_1, AX_1) est libre. Par le théorème de la base incomplète on peut compléter cette famille libre en une base de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{B}(X_1, AX_1, X_3, ..., X_n)$.

Comme $u(X_1) = AX_1 = 0X_1 + 1AX_1 + \sum_{k=2}^{n} 0X_k$, on en déduit que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

Et comme A est semblable à cette matrice (matrices du même endomorphismes dans des bases), on en déduit en particulier que $\boxed{A \text{ est semblable à une matrice de première colonne } E_2}$.

3. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}_n$: toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas une homothétie est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls sauf le dernier qui est $\mathrm{tr}(A)$.

▷ **Initialisation**

Soit $(a) \in \mathrm{M}_1(\mathbb{K})$ on a $(a) \sim (a)$ et $a = \mathrm{tr}((a))$.

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}_n$.

Soit $A \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ qui n'est pas une homothétie.

Par la question précédente on sait que A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 1 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $\tilde{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On procède par disjonction de cas.

▷ Si $\tilde{A}$ n'est pas une homothétie.

Alors par $\mathcal{P}_n$ il existe $\tilde{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\tilde{P}^{-1}\tilde{A}\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & 0 & * \\ * & \cdots & * & \mathrm{tr}\left(\tilde{A}\right) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{pmatrix}$$

on a, comme

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \tilde{P}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \tilde{P}^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & I_n\end{pmatrix} = I_{n+1}$$

que $P \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \tilde{P}^{-1}\end{pmatrix}$.

D'où par produit par blocs

$$P^{-1}\begin{pmatrix}0 & *\\ * & \tilde{A}\end{pmatrix}P = \begin{pmatrix}0 & * & \cdots & * & *\\ * & 0 & \cdots & * & *\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ * & * & \cdots & 0 & *\\ * & * & \cdots & * & \mathrm{tr}\left(\tilde{A}\right)\end{pmatrix}.$$

on a donc A semblable à cette matrice, et comme la trace est un invariant de similitude, en prenant a posteriori la trace on a bien $\mathrm{tr}\left(\tilde{A}\right) = \mathrm{tr}(A)$.

▷ Si $\tilde{A}$ est une homothétie.

On a donc A semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix}0 & * & \cdots & *\\ 1 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}$$

.

Si $n+1 = 2$ alors on a bien A semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix}0 & *\\ * & \lambda\end{pmatrix}$ et a posteriori, la trace étant un invariant de similitude, $\lambda = \mathrm{tr}(A)$.

Si $n+1 \geq 3$, alors avec $P = I_n + E_{13}$ on a P inversible et $P^{-1} = I_n - E_{13}$ (matrice de transvection).

De plus on a le produit matriciel [à détailler si nécessaire]

$$(I_n + E_{13})\begin{pmatrix}0 & * & * & \cdots & *\\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}(I_n - E_{13}) = \begin{pmatrix}0 & * & * & \cdots & *\\ 1 & \lambda & -1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}.$$

Et donc on se ramène au cas où $\tilde{A}$ n'est pas une homothétie.

▷ **Conclusion** Par récurrence on a donc bien montré que toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice de la forme

$$\boxed{\begin{pmatrix}0 & \cdots & * & *\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ * & \cdots & 0 & *\\ * & \cdots & * & \mathrm{tr}(A)\end{pmatrix}}$$

Solution pour l'exercice 37 · Énoncé p. 13 · Indication p. 24 (Commutateurs et trace nulle)
Notons $\Gamma = \left\{AB - BA, (A,B) \in \left(\mathrm{M}_n(\mathbb{K})\right)^2\right\} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

On constate tout d'abord que pour tous $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$ d'où l'inclusion $\boxed{\subset}$.

On s'intéresse désormais à l'autre inclusion.

Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on constate que pour toute matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ on

$$P(AB - BA)P^{-1} = (PAP^{-1})(PBP^{-1}) - (PBP^{-1})(PAP^{-1}).$$

Ainsi pour tout $M \in \Gamma$, pour tout $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $PMP^{-1} \in \Gamma$, c'est à dire que l'appartenance à Γ est un invariant de similitude.

Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathrm{tr}(M) = 0$. Par ce qu'on vient de constater il suffit de montrer qu'il existe une matrice semblable à M qui est dans Γ.

On commence par traiter l'exercice 36.

Il existe alors une matrice $\widetilde{M}$ de diagonale nulle semblable à M.

Soit $B = \left(b_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice quelconque et $\Lambda = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale telle que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lambda_i \neq \lambda_j$.

On a alors

$$\begin{aligned} B\Lambda - \Lambda B &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \cdots & \lambda_n b_{1n} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 b_{n1} & \lambda_2 b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n} \\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (\lambda_2 - \lambda_1) b_{12} & \cdots & (\lambda_n - \lambda_1) b_{1n} \\ (\lambda_1 - \lambda_2) b_{21} & 0 & \cdots & (\lambda_n - \lambda_2) b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\lambda_1 - \lambda_n) b_{n1} & (\lambda_2 - \lambda_n) b_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc en prenant $\lambda_1, ..., \lambda_n$ n scalaires distincts (ce qui est possible car $\mathbb{K}$ est infini) et en posant pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ si $i \neq j$, $b_{i,j} = \frac{m_{i,j}}{\lambda_j - \lambda_i}$ et par exemple $b_{i,i} = 0$, on a bien $\boxed{\widetilde{M} = B\Lambda - \Lambda B \in \Gamma}$.

D'où l'inclusion $\boxed{\supset}$.