# Dérivabilité

Énoncés . . . . . 2
Indications . . . . . 22
Solutions . . . . . 31

# Énoncés

Dans toute la feuille du TD, sauf mention du contraire, $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point).

**Exercice 1** (◔★ Petite fonction, grande dérivée)
Soient $\varepsilon > 0$ et $\omega > 0$.

On considère

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \varepsilon \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Montrer brièvement les faits suivants:
- $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
- $\forall t \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq \varepsilon$,
- $\forall M \in [0, \omega\varepsilon[, \exists t \in \mathbb{R}, |f'(t)| > M$.

Commenter.

Indication p. 22

**Exercice 2** (◔★ Le début des méthodes de différences finies)
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Déterminer l'ensemble des $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, pour tout $a \in I$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\alpha f(a+h) + \beta f(a) + \gamma f(a-h)}{h} = f'(a).$$

Indication p. 22

**Exercice 3** (◔★ Extension des gendarmes)
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Soient $g_1$,$g_2$ et $f$ trois fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$ telles que au voisinage épointé de $a$.

$$\forall x \in I, g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x).$$

On suppose que $g_1$ et $g_2$ sont dérivables en $a$ et que

$$g_1(a) = g_2(a) \quad \text{et} \quad g_1'(a) = g_2'(a).$$

Montrer que $f$ est dérivable en $a$ et

$$f(a) = g_1(a) = g_2(a)$$

$$f'(a) = g_1'(a) = g_2'(a).$$

Indication p. 22

**Exercice 4** (◑★ Plein d'espaces fonctionnels)
Pour $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ on rappelle que l'on note
- ▹ $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $I$,
- ▹ $\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $I$,
- ▹ $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $I$ de dérivée continue sur $I$.

On note aussi
- ▹ $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $I$,
- ▹ $\mathcal{C}^0_{\text{unif}}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions uniformément continues sur $I$.

**1.** Rappeler pourquoi on a les inclusions suivantes:

$$\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$$

$$\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0_{\text{unif}}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$$

**2.** Montrer que pour $I = [0,1[$, $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{C}^0_{\text{unif}}(I,\mathbb{R})$ et $\mathrm{Lip}(I,\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{D}^1(I,\mathbb{R})$.

Commenter les autres inclusions.

**3.** On suppose dans cette question que $I$ est un **segment**.

Montrer que dans ce cas que $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$.

Montrer $\mathcal{D}^1(I,\mathbb{R}) \not\subset \mathrm{Lip}(I,\mathbb{R})$.

Commenter les autres inclusions.

Indication p. 22

**Exercice 5** (◔★ Variantes de Rolle)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$. Faire un schéma.
2. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$. Faire un schéma.
3. On suppose que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0).$$
Montrer qu'il existe $c \in ]0, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Indication p. 22 · Solution p. 31

**Exercice 6** (◔★ Variante du TEAF)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que
$$f(x) = \alpha x + o_{x\to+\infty}(1)$$
et
$$f(x) = \alpha x + o_{x\to-\infty}(1).$$
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que
$$f'(c) = \alpha.$$
Faire un schéma.

Indication p. 22 · Solution p. 32

**Exercice 7** (◔★ Multi-Rolle I)
Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $x_1 < \cdots < x_n$ des éléments de $I$ tels que $f(x_1) = \cdots = f(x_n)$.

Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\xi_1 < \cdots < \xi_{n-k}$ des éléments de $I$ tels que $f^{(k)}(\xi_1) = \cdots = f^{(k)}(\xi_{n-k}) = 0$.

Indication p. 23

**Exercice 8** (◔★ Multi-Rolle II)
Soient $a < b$ deux réels, et $f \in \mathcal{D}^n([a,b],\mathbb{R})$.

On suppose que $f(b) = 0$ et pour tout $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$.

Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe $x_k \in ]a,b]$ tel que $f^{(k)}(x_k) = 0$.

Indication p. 23

**Exercice 9** (◔★ Rolle et polynômes réels I)
Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ est dit **scindé à racines simples** ssi il admet exactement $n$ racines distinctes.

Montrer que la dérivée d'un polynôme (de degré $\geq 2$) scindé à racines simples est scindé à racines simples.

Indication p. 23

**Exercice 10** (◔★ Petit difféo local)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$.

On suppose que $f'(a) \neq 0$.

Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f_{(|I\cap]}a-\delta, a+\delta[)$ est bijective sur son image.

Indication p. 23

**Exercice 11** (◑★ Un exemple de cut-off par raccordement)
On définit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que $\varphi_{|(0,+\infty)} \in \mathcal{C}^\infty((0,+\infty))$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall x > 0, \varphi^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}}\varphi(x).$$
2. En déduire que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $\chi_\varepsilon$ vérifiant:
   - $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$
   - $\chi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
   - $\chi_{|[a,b]} = 1$
   - $\chi_{|\mathbb{R}\setminus[a-\varepsilon,b+\varepsilon]} = 0$

   et faire un schéma.

Indication p. 23

**Exercice 12** (◔★ Mise sous forme complexe)
Soient $\omega > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On considère

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto e^{\lambda t}\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$.

Indication p. 23

**Exercice 13** (◕★ Formule de Taylor-Lagrange)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. On suppose que $f$ est dérivable. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $\xi \in [0, x]$ tel que
$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x.$$
2. On suppose que $f$ est deux fois dérivable. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $\xi \in [0, x]$ tel que
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f$ est $n+1$ fois dérivable.

   Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $\xi \in [0, x]$ tel que
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Indication p. 23 · Solution p. 32

**Exercice 14** (◑★ Rolle et polynômes réels II)
Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ est dit **scindé** ssi il admet exactement $n$ racines comptées avec multiplicité, c'est à dire ssi il existe $x_1, ..., x_r$ des réels distincts et $m_1, ..., m_r$ des entiers (appelés multiplicités des racines) tels que
$$P = \alpha \prod_{k=1}^{r} (X - x_k)^{m_k}$$
où $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et
$$\sum_{k=1}^{r} m_k = n.$$
Montrer que la dérivée d'un polynôme réel (de degré $\geq 2$) scindé à racines est scindé.

Indication p. 23

**Exercice 15** (◔★ Un exercice de limite)
Déterminer, si elle existe, la limite quand $n \to +\infty$ de
$$\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n.$$

Indication p. 23

**Exercice 16** (◔★ Un exemple de contre-exemple)
Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f'$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Indication p. 24

**Exercice 17** (◔★ Une règle très peu utile)
Soient $f$, $g$ deux fonctions dérivables de $I$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose $f(a) = g(a) = 0$, qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in ]a-\eta, a+\eta[\setminus\{0\}$, $g(x) \neq 0$ et que $g'(x) \neq 0$.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Indication p. 24

**Exercice 18** (◑★ Une inégalité de Landau - Kolmogorov)
Soit $f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On suppose que $f$ et $f''$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup_{\mathbb{R}(|f|)}$, $M_2 = \sup_{\mathbb{R}(|f''|)}$.

**1.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall h \in \mathbb{R}, |f(x+h) - (f(x) + hf'(x))\ | \leq M_2 \frac{h^2}{2}.$$

**2.** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall h > 0, |f'(x)| \leq h\frac{M_2}{2} + \frac{1}{h} 2M_0.$$

**3.** Conclure que $f'$ est bornée et qu'en posant $M_1 = \sup_{\mathbb{R}}(|f'|)$ on a

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

**4.** Montrer que l'on a en fait

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}$$

Indication p. 24 · Solution p. 34

**Exercice 19** (◔★ Que dire de Holder strictement plus grand que 1 ?)
Soit $\alpha > 1$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in I^2, \mid f(x) - f(y) \mid \leq |x - y|^{\alpha}.$$

Montrer que $f$ est constante.

Indication p. 24

**Exercice 20** (◔★ Une caractérisation des polynômes)
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction polynomiale (sur $I$) ssi il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = P(x)$.

1. Montrer que si $f'$ est polynomiale sur $I$, alors $f$ est polynomiale sur $I$.
2. Montrer que $f$ est polynomiale sur $I$ ssi il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(d)} = 0$.

Indication p. 24

**Exercice 21** (◔★ Équation fonctionnelle de Cauchy, cas dérivable)
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Indication p. 24

**Exercice 22** (◔★ Une variante de la règle de l'Hopital)
Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables de $I$ dans $\mathbb{R}$ telles que $g'$ ne s'annule pas.

Soit $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$.

Montrer que $g(a) \neq g(b)$ et qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Indication p. 24 · Solution p. 35

**Exercice 23** (◑★ Un principe utile en équations différentielles)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0.$$

Montrer que $f$ s'annule au plus une fois.

Indication p. 24

**Exercice 24** (◔★ Puissance variable)
Soit $f$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} f :]0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(]0,1], \mathbb{R})$.
2. Montrer que $f$ admet un prolongement par continuité en 0.

   On note $\tilde{f}$ ce prolongement par continuité.
3. La fonction $\tilde{f}$ est elle dérivable sur $[0,1]$ ?
4. Montrer que $\tilde{f}$ est décroissante.

Indication p. 25

**Exercice 25** (◑★ Ceci n'est pas une somme de Riemann)
Soit $I$ un intervalle contenant un voisinage de 0 et $f : I \to \mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

1. On suppose $f$ est continue en 0.

   Montrer que

   $$C_n = nf(0) + o_{n\to+\infty}(n).$$
2. On suppose que $f$ est dérivable en 0.

   Montrer que

   $$C_n = nf(0) + \frac{1}{2}f'(0) + o_{n\to+\infty}(1).$$

Indication p. 25

**Exercice 26** (◑☆ Variations autour des sommes)
Soit $I$ un intervalle contenant un voisinage de 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en 0.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{1}{k+n}\Big).$$

Déterminer un développement de $I_n$ asymptotique en $o_{n\to+\infty}(1)$.

Indication p. 25

**Exercice 27** (◔★ Dérivabilité d'une périodisation)
Soit $f \in \mathcal{D}^1([0,1],\mathbb{R})$.

On définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(t - \lfloor t \rfloor)$.

1. Faire un schéma.
2. Montrer que $\varphi$ est 1-périodique et dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
3. Montrer que $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$ ssi $f(0) = f(1)$.

   On suppose désormais que $f(0) = f(1)$.
4. Montrer que $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ssi $f'(0) = f'(1)$.

Indication p. 25

**Exercice 28** (◑★ Une histoire de tangente)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{D}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que

$$f'(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Montrer qu'il existe $x \in ]a,b[$ tel que

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

et faire un schéma.

Indication p. 25

**Exercice 29** (◑★ Encore une histoire de tangente)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue en tout point de $[a,b]$ et dérivable en tout point de $]a,b[$. On suppose de plus que $f(a)=f(b)=0$.

Soit $d\in\mathbb{R}\setminus[a,b]$.

Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(c)}{c-d}.$$

Indication p. 26

**Exercice 30** (◑★ À la Cesàro)
Soit $f\in\mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\ell\in\mathbb{C}$.

Montrer que **si**

$$f'(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ell.$$

**alors**

$$\frac{f(x)}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ell.$$

Que dire de la réciproque ?

Indication p. 26

**Exercice 31** (◑★ À la Cesàro infini)
Soit $f\in\mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Montrer que **si**

$$f'(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

**alors**

$$\frac{f(x)}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Indication p. 26

**Exercice 32** (◑★ Limites des moyennes)
Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs.

On définit

$$\begin{aligned} m : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \left(\frac{a^t + b^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}} \end{aligned}$$

1. Expliquer pourquoi la fonction $m$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que $m$ admet un prolongement par continuité en 0 et le déterminer.

   On note $\tilde{m} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce prolongement par continuité.
3. Étudier la monotonie éventuelle de $\tilde{m}$.
4. La fonction $\tilde{m}$ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ ?
5. Déterminer les limites éventuelles en $-\infty$ et $+\infty$ de $\tilde{m}'$.

Indication p. 26

**Exercice 33** (◔★ Pas besoin de dériver une composée)
On définit la fonction $g_{2025}$ par

$$g_{2025} = \underbrace{\sin \circ \sin \circ \cdots \circ \sin}_{2025 \text{ fois}}.$$

1. Déterminer $g'_{2025}(0)$.

Indication p. 26

**Exercice 34** (◔★ Développements en l'infini)

**1.** Soit $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer, si elle existe, la limite quand $x \to +\infty$ de

$$x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a+x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

**2.** Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Déterminer, si elle existe, la limite quand $x \to +\infty$ de

$$((a_1+x)(a_2+x)(a_3+x))^{\frac{1}{3}} - x.$$

**3.** Soit $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer, si elle existe, la limite quand $x \to +\infty$ de

$$x^2(\arctan(x+a) - \arctan(x)).$$

*Indication: on pourra utiliser* $\arctan(h) = h + o_{h\to 0}(h^2)$.

Indication p. 26

**Exercice 35** (◔★ L'exponentielle n'est vraiment pas un polynôme)
Soit $P$ un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$.

Montrer que

$$|\{x \in \mathbb{R} \mid e^x = P(x)\}| \leq d+1.$$

Indication p. 26 · Solution p. 36

**Exercice 36** (◔★ Dérivabilité du maximum)
Soient $f, g \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$ dérivables et $a \in I$.

Déterminer une CNS pour que $\max(f,g)$ soit dérivable en $a$.

Indication p. 27

**Exercice 37** (◔★ De la force à l'énergie)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)f(x) \leq 0$.

Montrer que l'ensemble des points d'annulation de $f$ est de la forme $\varnothing$ ou $]-\infty, +\infty[$, ou $[T, +\infty[$ où $T \in \mathbb{R}$.

Indication p. 27

**Exercice 38** (◔★ Un peu de factorisation de paires)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ paire.

Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x^2)$.

Indication p. 27

**Exercice 39** (◔★ Conjugaison par une exponentielle)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on suppose que $f$ s'annule au moins trois fois.

Montrer que $f'' + 2\lambda f' + \lambda^2 f$ s'annule au moins une fois.

Indication p. 27

**Exercice 40** (◑★ Limite monotone combiné avec limite de la dérivée)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, \mathbb{R})$.

On suppose que $f'$ est croissante.

Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Indication p. 27

**Exercice 41** (◑★ Idempotents dérivables)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(I, I)$ tel que $f \circ f = f$.

On pose $J = f(I)$.

**1.** Expliquer pourquoi $J$ est un intervalle.

**2.** Que dire de $f$ si $J$ est un singleton ?

On suppose désormais que $J$ n'est pas un singleton.

On pose $\alpha = \inf(J)$ et on suppose par l'absurde $\alpha \neq \inf(I)$ (en particulier $\alpha \in I$).

**2.1.** Montrer que la dérivée à gauche de $f$ en $\alpha$ est négative.

**2.2.** Montrer que la dérivée à droite de $f$ en $\alpha$ est 1.

**2.3.** Conclure que $f = \mathrm{Id}_I$.

Indication p. 27

**Exercice 42** (◑★ Reste d'interpolation)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ et $(x_1,...,x_n) \in [a,b]^n$ deux à deux distincts.

Pour $k \in [\![1,n]\!]$ on pose

$$L_k = \prod_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq k}} \frac{(X-x_j)}{(x_k-x_j)}.$$

On définit aussi $R \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$ par

$$\forall t \in I, f(t) = \left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)L_k(t)\right) + R(t).$$

1. Faire un schéma.
2. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$ il existe $c_x \in ]a,b[$ tel que
$$R(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}\prod_{k=1}^{n}(x-x_k).$$
3. En déduire qu'il existe une constante $M_n(f) > 0$ telle que
$$\forall t \in [a,b], |f(t) - \sum_{k=1}^{n} f(x_k)L_k(t)\ | \leq \frac{M_n(f)}{n!}$$
4. Commenter.

Indication p. 27

**Exercice 43** (◔★ Juste un peu plus que la stricte croissante)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) \geq \varepsilon$. Montrer que $f$ est bijective.
2. Le résultat précédent est-il vrai si on suppose seulement $\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) > 0$.

Indication p. 28

**Exercice 44** (◔☆ Cas d'Égalité dans l'Inégalité des Accroissements Finis)
Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup_{t\in[a,b]}(f'(t)).$$

Montrer que $f$ est affine.

Indication p. 28

**Exercice 45** (◔☆ Fonctions absolument monotones)
On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est absolument monotone ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$.

1. Donner un exemple de fonction absolument monotone.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions absolument monotones est stable par somme et par produit.
3. Soit $f$ absolument monotone. Montrer que $\exp \circ f$ est absolument monotone.
4. Montrer que $\arcsin : [0, 1[ \to \mathbb{R}$ est absolument monotone.

Indication p. 28

**Exercice 46** (◔☆ Contre-exemple en vrac)
Déterminer l'ensemble des points de dérivabilité de $x \mapsto x^2 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

Pour $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, construire une fonction $f$ dérivable en $x_1, ..., x_n$ et non continue en tous les autres réel(s).

Indication p. 28

**Exercice 47** (◔☆ Dérivée symétrique)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

On dit que $f$ est symétriquement dérivable en $a$ ssi il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \ell.$$

1. Montrer que toute fonction dérivable en $a$ est symétriquement dérivable en $a$.
2. Donner un exemple de fonction symétriquement dérivable en un point et non dérivable en ce point.

Indication p. 28

**Exercice 48** (◔☆ Petit produit croisé)
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

On suppose $f$ et $g$ dérivables en $a$.

Montrer que la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}$$

existe et la déterminer.

Indication p. 28

**Exercice 49** (◔☆ Encore des Rolleries)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $f \in \mathcal{D}^n([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $f$ s'annule au moins $n+1$ fois. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.
2. Soit $f \in \mathcal{D}^n([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!], f^{(k)}(1) = 0$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.
3. On suppose qu'il existe $p$ et $q$ tels que $p+q = n$ et que $\forall k \in [\![0, p-1]\!], f^{(k)}(0) = 0$, $\forall k \in [\![0, q-1]\!], f^{(k)}(1) = 0$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule.

Indication p. 28

**Exercice 50** (◑☆ Dérivabilité par limites de rationnels)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $a \in I$.

Montrer que $f$ est dérivable en $a$ de dérivée $\ell \in \mathbb{R}$ ssi

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{Q}}}{\longrightarrow} \ell.$$

Indication p. 28

**Exercice 51** (◕☆ Moitiés, limites, et Cesàro)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0.

Montrer que $f$ est dérivable en 0 **ssi** il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{f(2h)-f(h)}{h} \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{\longrightarrow} \ell$$

. Dans ce cas donner une relation entre $f'(0)$ et $\ell$.

Indication p. 28

**Exercice 52** (◔☆ Condition nécessaire de surjectivité)
Soit $f \in \mathcal{D}^1([0,1],[0,1])$.

On suppose que $f$ est surjective.

1. Montrer qu'il existe $c \in ]0,1[$ tel que $|f'(c)| \geq 1$.
2. Montrer qu'il existe $d \in ]0,1[$ tel que $|f'(d)| \leq 1$.

Indication p. 29

**Exercice 53** (◔☆ Pour s'entraîner au raisonnement)
Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{D}^1([a,b],\mathbb{R})$.

On suppose que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) > 0$.

Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) < 0$.

Indication p. 29

**Exercice 54** (◔☆ Toujours la même chose)
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ périodique.

Montrer que $f$ est lipschitzienne.

Indication p. 29

**Exercice 55** (◑☆ Encore des équations fonctionnelles)

**1.** Déterminer toutes les fonctions $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x).$$

**2.** En déduire toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2}.$$

**3.** Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2}.$$

Indication p. 29

**Exercice 56** (◑☆ MultiTEAF)
Soit $f \in \mathcal{D}^1([a,b],\mathbb{R})$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\xi_1 < \cdots < \xi_n$ éléments de $]a,b[$ tels que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(\xi_k) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Indication p. 29

**Exercice 57** (◔☆ Théorème d'Euler unidimensionnel)
Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes:

(i) $f$ est homogène de degré $\alpha$, c'est à dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, f(tx) = t^\alpha f(x). \tag{1}$$

(ii) $f$ vérifie l'identité d'Euler,

$$\forall x \in \mathbb{R}, xf'(x) = \alpha f(x).$$

Indication p. 29

**Exercice 58** (◑☆ Quelques suites se comportent bien)

**1.** Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f$ est bornée et $f'$ ne converge pas vers 0 en $+\infty$.

**2.** Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f'$ converge vers 0 en $+\infty$ et $f$ n'est pas bornée.

**3.** Soit $f \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $f$ est bornée. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $(f'(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Indication p. 29

**Exercice 59** (◑☆ Cas particulier de composition)
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$\begin{aligned} g_n : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

**1.** Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g_n(x)$ en fonction de $x$ et de $g_{n-1}(x)$. En déduire pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ une expression de $g_n^{(d)}$ en fonction de $g_{n-1}^{(d-1)}$ et $g_{n-1}^{(d)}$.

**2.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, g_n^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Indication p. 30

**Exercice 60** (◔☆ Dans ce chapitre c'est facile)
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

Montrer qu'il existe $t \in ]0,1[$ tel que

$$4@^3 + 3bt^2 + 2ct + d = a + b + c + d.$$

Indication p. 30

# Indications

**Indication 1** · Énoncé p. 2 (Petite fonction, grande dérivée)
Pour les démonstrations tout est explicite.

Méditer les commentaires possibles.

**Indication 2** · Énoncé p. 2 (Le début des méthodes de différences finies)
Effectuer un DL1 et obtenir un système linéaire d'inconnue $(\alpha, \beta, \gamma)$.

**Indication 3** · Énoncé p. 3 (Extension des gendarmes)
Notons $\alpha_0 = g_1(a) = g_2(a)$ et $\alpha_1 = g_1'(a) = g_2'(a)$.

Écrire un encadrement sur

$$\frac{f(x) - (\alpha_0 + \alpha_1(x-a))}{|x-a|}$$

utiliser le théorème des gendarmes et conclure.

Ou bien faire les gendarmes à gauche et à droite en prenant soin de faire attention au signe de $x - a$.

**Indication 4** · Énoncé p. 3 (Plein d'espaces fonctionnels)

1. Cours.
2. Par exemple $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$ (mais il y a beaucoup d'autres exemples).

   Pour les autres inclusions si $A \subset B$ et $A \not\subset C$ alors $B \not\subset C$, faire un schéma.
3. TBA + IAF.

**Indication 5** · Énoncé p. 4 (Variantes de Rolle)
Il y a de nombreuses méthodes.

- ▷ **Méthode 1**:Reprendre la preuve du théorème de Rolle. Il suffit de montrer que $f$ admet un extremum local.
- ▷ **Méthode 2**: Prolonger par continuité (dans le cas limite finie) $f \circ \tan$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et appliquer Rolle à ce prolongement après avoir vérifié les hypothèses.
- ▷ **Méthode 3**: Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$ tels que $f(a) = f(b)$ puis utiliser Rolle.

Solution p. 31

**Indication 6** · Énoncé p. 4 (Variante du TEAF)
Comme pour le TEAF classique, se ramener à Rolle.

Solution p. 32

**Indication 7** · Énoncé p. 4 (Multi-Rolle I)
Par récurrence sur $n$ en utilisant Rolle entre $x_i$ et $x_{i+1}$.

**Indication 8** · Énoncé p. 5 (Multi-Rolle II)
Par récurrence sur $k$ en utilisant Rolle entre $a$ et $x_{k-1}$.

**Indication 9** · Énoncé p. 5 (Rolle et polynômes réels I)
Cf exercice 7.

**Indication 10** · Énoncé p. 5 (Petit difféo local)
Montrer la stricte monotonie au voisinage de $a$.

**Indication 11** · Énoncé p. 6 (Un exemple de cut-off par raccordement)

1. Procéder par récurrence sur $n$.
2. Utiliser le théorème de la limite de la dérivée et les croissances comparées.
3. Commencer par le schéma, utiliser la fonction $\varphi$ précédente.

**Indication 12** · Énoncé p. 6 (Mise sous forme complexe)
Poser $\alpha = \lambda + i\omega$ et constater que $f : t \mapsto \mathrm{Re}(e^{\alpha t})$.

**Indication 13** · Énoncé p. 7 (Formule de Taylor-Lagrange)

1. Il s'agit de reformuler l'égalité des accroissements finis.
2. Donner un nom au reste:
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + R_1(x)$$
puis appliquer le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire bien choisie.
3. Donner un nom au reste:
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)(0)}}{n!} + x^n R_n(x)$$
puis appliquer le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire bien choisie.

Solution p. 32

**Indication 14** · Énoncé p. 7 (Rolle et polynômes réels II)
Montrer que si $\lambda$ est racine de multiplicité $m \geq 2$ de $P$ alors c'est une racine de multiplicité $m$ de $P'$.

Puis utiliser **Rolle**.

**Indication 15** · Énoncé p. 7 (Un exercice de limite)
Effectuer un DL1.

**Indication 16** · Énoncé p. 8 (Un exemple de contre-exemple)
S'inspirer de l'exercice 1, en prenant une amplitude tendant vers 0 et une pulsation tendant vers $+\infty$.

Par exemple considérer $x \mapsto e^{-bx}\sin(e^{ax})$ pour $a$ et $b$ bien choisis.

**Indication 17** · Énoncé p. 8 (Une règle très peu utile)
Juste écrire la définition du nombre dérivée.

**Indication 18** · Énoncé p. 8 (Une inégalité de Landau - Kolmogorov)

1. Regarder l'exercice 13 ou juste appliquer l'IAF à une fonction auxiliaire bien choisie.
2. Juste l'inégalité triangulaire et des majorations à partir de la question précédente.
3. Prendre le sup sur $x$ pour le caractère borné. Pour la borne annoncée, prendre l'inf sur $h$.
4. Symétriser en montrant que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, |f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)\ | \leq M_2 h^2$$

puis effectuer une démonstration analogue.

Solution p. 34

**Indication 19** · Énoncé p. 9 (Que dire de Holder strictement plus grand que 1 ?)
Montrer que $f$ est dérivable et que sa dérivée est nulle.

**Indication 20** · Énoncé p. 9 (Une caractérisation des polynômes)

1. Par analyse synthèse.
2. Par récurrence.

**Indication 21** · Énoncé p. 9 (Équation fonctionnelle de Cauchy, cas dérivable)
On peut bien évidemment procéder comme dans le cas plus général (cf TD continuité).

Ou ici un raccourci et de fixer une variable et de dériver par rapport à l'autre.

**Indication 22** · Énoncé p. 9 (Une variante de la règle de l'Hopital)
Cela revient à montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $(f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = 0$.

Poser une fonction auxiliaire adaptée et utiliser Rolle.

Solution p. 35

**Indication 23** · Énoncé p. 10 (Un principe utile en équations différentielles)
Faire un schéma.

Supposons qu'il existe $x_0$ tq $f(x_0) = 0$ et $f'(x_0) > 0$ et fixons le.

Montrer que si $x_1 = \min\{t > x_0 \mid f(t) = 0\}$ est bien défini, alors $f(x_1) = 0$ et $f'(x_1) \leq 0$.

**Indication 24** · Énoncé p. 10 (Puissance variable)

1. Remarquer que pour $x \in ]0,1]$, $f(x) = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$.
2. Faire un DL1 de ln
3. Théorème de la limite de la dérivée.
4. Étudier le signe de la dérivée. Pour simplifier l'étude on pourra étudier le signe de $1 - \frac{1}{1+y} - \ln(1+y)$.

**Indication 25** · Énoncé p. 10 (Ceci n'est pas une somme de Riemann)

1. Il suffit de montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0)\right| \underset{n\to+\infty,\text{ classique}}{\longrightarrow} 0.$$

   Pour cela on peut par exemple repasser à une quantification en $\varepsilon - \delta$ et montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, ÀPCR en $n$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0)| \leq \varepsilon$ puis sommer.
2. De même que pour le premier point, mais cette fois en considérant

$$|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - \left(f(0) + \frac{k}{n^2}\right)f'(0)|$$

   après avoir remarqué que

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{1}{2} + o_{n\to+\infty}(1).$$

**Indication 26** · Énoncé p. 11 (Variations autour des sommes)
Faire comme l'exercice 25. On pourra écrire le développement en fonction de la limite quand $n \to +\infty$ de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$ (pourquoi existe-elle ?).

Pour calculer cette limite, par exemple prendre $f = \ln(1+\cdot)$.

**Indication 27** · Énoncé p. 11 (Dérivabilité d'une périodisation)

1. Le graphe représentatif de $\varphi$ est celui de $f$ répété (faire le schéma).
2. La 1-périodicité est immédiate.

   Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Avec $\delta > 0$ t.q $]a-\delta, a+\delta[ \cap \mathbb{Z} = \varnothing$ utiliser le caractère local de la dérivabilité.
3. Déterminer les limites à droite et à gauche en tout point entier.
4. Déterminer les dérivées à droite et à gauche en tout point entier.

**Indication 28** · Énoncé p. 11 (Une histoire de tangente)
Commencer par faire le schéma. Interpréter comme tangente/corde passant par $(a, f(a))$.

Introduire la fonction auxiliaire $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ prolongée par continuité en $a$ et appliquer le théorème de Rolle.

**Indication 29** · Énoncé p. 12 (Encore une histoire de tangente)
De même faire un schéma en interprétant comme la corde passant par $(d,0)$ et $(c,f(c))$.

**Indication 30** · Énoncé p. 12 (À la Cesàro)
Procéder sans surprise à la Cesàro:

- ▷ se ramener à $\ell = 0$
- ▷ fixer $\varepsilon > 0$, déterminer un $A > 0$ t.q $\forall x \geq A, |f'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
- ▷ écrire pour $x > A$,

$$|\frac{f(x)}{x}| \leq |\frac{f(x)-f(A)}{x-A}| + |\frac{f(A)}{x-A}|$$

- ▷ traiter le premier terme par IAF,
- ▷ pour le second prendre $x$ assez grand

La réciproque est fausse, construire un contre-exemple.

**Indication 31** · Énoncé p. 12 (À la Cesàro infini)
Cf exercice 30.

**Indication 32** · Énoncé p. 13 (Limites des moyennes)

1. Fonctions usuelles.
2. Effectuer un DL1 en 0 en partant de l'intérieur, après avoir écrit pour $t$ non nul, $m(t) = \exp\Big(\frac{1}{t}\ln\Big(\frac{e^{\ln(a)t}+e^{\ln(b)t}}{2}\Big)\Big)$. Le prolongement par continuité en 0 vaut $\sqrt{ab}$.
3. Étudier la monotonie sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. Conclure par continuité.
4. Effectuer une limite de la dérivée ou un développement limité en 0. Dans les deux cas les DL2 suivants peuvent être utiles: $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o_{u\to 0}(u^2)$ et $\ln(v) = v - \frac{v^2}{2} + o_{v\to 0}(v)$.
5. Factoriser par le terme prédominant. On obtient le minimum en $-\infty$ et le maximum en $+\infty$.

On remarquera que quitte à factoriser par $a$ on peut toujours se ramener à $a = 1$ (mais cela n'est pas nécessaire).

**Indication 33** · Énoncé p. 13 (Pas besoin de dériver une composée)

1. Justifier la dérivabilité et composer les DL1s, ou bien faire une récurrence.

**Indication 34** · Énoncé p. 14 (Développements en l'infini)
Dans chaque cas, constater que lorsque $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ et utiliser un DL1. Pour s'y ramener:

1. Factoriser par $x$.
2. Factoriser par $x$.
3. Que dire de $\arctan(x) + \arctan\big(\frac{1}{x}\big)$ pour $x > 0$ ?

**Indication 35** · Énoncé p. 14 (L'exponentielle n'est vraiment pas un polynôme)
Encore une fois utiliser Rolle, en remarquant que $x \mapsto e^x - P(x)$ dérivé $\deg(P)$ fois est strictement positive.

Solution p. 36

**Indication 36** · Énoncé p. 14 (Dérivabilité du maximum)
▷ Si $f(a) > g(a)$ alors au voisinage de $a$, $\max(f,g) = f$. De même si $f(a) < g(a)$.

Ou bien utiliser $\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $f-g$ ne s'annule pas au voisinage de $a$.
▷ Si $f(a) = g(a)$, déterminer selon la comparaison de $f'(a)$ et $g'(a)$ les dérivées à droite et à gauche en $a$. Faire évidemment un schéma.

**Indication 37** · Énoncé p. 14 (De la force à l'énergie)
Remarquer que $f^2$ est positive et décroissante.

Par conséquent si $f^2(t) = 0$ alors pour tout $s > t$, $f^2(s) = 0$.

Prendre l'infimum de ces temps.

**Indication 38** · Énoncé p. 15 (Un peu de factorisation de paires)
Le point non immédiat à démontrer est que $g : x \mapsto f(\sqrt{x})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ jusqu'en 0.

Remarquer que comme $f$ est paire $f'(0) = 0$. Utiliser ensuite le caractère $\mathcal{C}^2$ de $f$.

**Indication 39** · Énoncé p. 15 (Conjugaison par une exponentielle)
Poser la fonction auxiliaire $\varphi : t \mapsto f(t)e^{\lambda t}$ et appliquer Rolle.

**Indication 40** · Énoncé p. 15 (Limite monotone combiné avec limite de la dérivée)
Soit $a \in I$.

Appliquer le th. de limite monotone sur $f'$ à gauche et à droite, puis le th. de limite de la dérivée à gauche et à droite.

Conclure par l'existence (et donc unicité) de $f'(a)$.

**Indication 41** · Énoncé p. 15 (Idempotents dérivables)
**1.** TVI
**2.** Dans ce cas $f$ est constante.
**3.** On a donc pour tout $x$, $f(x) \geq \alpha$ d'où pour tout $x < \alpha$, $\frac{f(x)-\alpha}{x-\alpha} \geq 0$.
**4.** Montrer que $f_{|J} = \mathrm{Id}_J$ et conclure par caractère local (à droite) de la dérivée (à droite).
**5.** Faire de même pour le sup. Conclure que $J = I$ puis que $f = \mathrm{Id}_I$.

**Indication 42** · Énoncé p. 16 (Reste d'interpolation)
**1.** Il s'agit d'une interpolation de $f$ par une fonction polynomiale en les $x_k$.
**2.** Poser comme fonction auxiliaire $t \mapsto R(t) - \frac{R(x)}{\prod(x-x_k)} \prod(t-x_k)$ et appliquer une version de Rolle.
**3.** Utiliser le TBA sur $f^{(n)}$.
**4.** Question pouvant être piège: a priori on ne peut pas conclure à la convergence, à cause des dépendances en $n$ des constantes.

**Indication 43** · Énoncé p. 16 (Juste un peu plus que la stricte croissante)

1. L'injectivité est immédiate. Pour la surjectivité déterminer les limites en $\pm\infty$ et utiliser le TVI.
2. Regarder une fonction usuelle, par exemple exp ou arctan.

**Indication 44** · Énoncé p. 16 (Cas d'Égalité dans l'Inégalité des Accroissements Finis)
Introduire l'écart à la corde (la même fonction auxiliaire que dans la démonstration du TEAF).

Montrer que cet écart est décroissant et donc constant en l'évaluant en $a$ et $b$.

**Indication 45** · Énoncé p. 17 (Fonctions absolument monotones)

1. Par exemple exp, un polynôme, ou encore $x \mapsto (1-x)^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$ sur $[0,1[$.
2. Immédiat par calcul.
3. Par récurrence forte.
4. Déterminer par récurrence une expression de $\arcsin^{(n)}$ sous la forme $x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ avec une récurrence précise sur $P_n$.

   Alternativement démontrer que $\ln \circ (\arcsin')$ est absolument monotone.

**Indication 46** · Énoncé p. 17 (Contre-exemple en vrac)
La fonction est non continue, donc non dérivable sur $\mathbb{R}^*$. En 0 la fonction est dérivable de dérivée nulle (pourquoi ?).

S'inspirer du cas précédent, par exemple $x \mapsto \prod (x - x_k)^2 \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

**Indication 47** · Énoncé p. 17 (Dérivée symétrique)

1. Montrer que si $f$ est dérivable en $a$, $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(a)$.
2. Que dire de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ?

**Indication 48** · Énoncé p. 17 (Petit produit croisé)
Faire un DL1 sans se poser de questions.

**Indication 49** · Énoncé p. 18 (Encore des Rolleries)
Comme pour l'exercice 14, faire une récurrence (et un schéma).

**Indication 50** · Énoncé p. 18 (Dérivabilité par limites de rationnels)
Remarquer tout d'abord l'importance de l'hypothèse de continuité de $f$.

Ensuite, on peut au pire repasser en $\varepsilon - \delta$.

**Indication 51** · Énoncé p. 18 (Moitiés, limites, et Cesàro)
Commencer par un schéma.

- ▷ Pour le sens direct remarquer que $f(2h) - f(h) = (f(2h) - f(0)) - (f(h) - f(0))$.
- ▷ Pour le sens réciproque, on peut par exemple (mais ce n'est pas la seule méthode) remarquer que pour tout $n$, par télescopage

$$\frac{f(h)-f\left(\frac{h}{2^n}\right)}{h}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{k+1}}\frac{f\left(\frac{h}{2^k}\right)-f\left(\frac{h}{2^{k+1}}\right)}{\frac{h}{2^{k+1}}}$$

et faire une preuve *« à la Cesàro »*.

**Indication 52** · Énoncé p. 18 (Condition nécessaire de surjectivité)
Faire un schéma.

Écrire un TEAF.

1. Dans le premier cas entre des antécédents de 0 et 1.
2. Dans le second entre 0 et 1.

**Indication 53** · Énoncé p. 19 (Pour s'entraîner au raisonnement)
Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas.

Alors $f$ est croissante donc, comme $f(a)=f(b)$, constante.

En déduire que $f'(a)=0$.

**Indication 54** · Énoncé p. 19 (Toujours la même chose)
Comme d'habitude se ramener à un segment, un peu plus grand que la période pour avoir de la marge, ou bien montrer que $f'$ est bornée car périodique et continue.

**Indication 55** · Énoncé p. 19 (Encore des équations fonctionnelles)

1. Constater que $\frac{g\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2^n}$ est constante, en déduire que $g$ est linéaire par la dérivabilité en 0.
2. Constater que la tangente hyperbolique est solution.

   Montrer que pour tout $x$, $f(x)\in[-1,1]$. Montrer que si $f$ vaut 1 ou $-1$ en un point alors $f$ est constante.

   Poser sinon $g=\tanh^{-1}\circ f$.
3. Toute fonction de la forme $\tanh\circ g$ avec $g$ vérifiant la première équation fonctionnelle convient. Il reste à trouver un tel $g$ non dérivable en 0.

**Indication 56** · Énoncé p. 19 (MultiTEAF)
Étant donnée une subdivision $x_0<\cdots<x_n$ de $[a,b]$, on peut appliquer le TEAF à chaque intervalle $[x_k,x_{k+1}]$ pour obtenir l'existence de $\xi_0<\cdots<\xi_{n-1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f'(\xi_k)=\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1})-f(x_k))$$

et prendre ensuite une subdivision régulière.

**Indication 57** · Énoncé p. 20 (Théorème d'Euler unidimensionnel)
Remarquer que la condition (1) est équivalente au caractère constant de $t\mapsto t^{-\alpha}f(tx)$.

**Indication 58** · Énoncé p. 20 (Quelques suites se comportent bien)

1. Plein d'exemples, par exemple avec des oscillations, $x\mapsto\cos(x)$, $x\mapsto\cos(x^2)$, etc.

**2.** Il faut prendre comme dérivée une fonction tendant vers 0 mais « pas trop rapidement » (cf notion d'intégrabilité). Par exemple avec $f : x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est bien choisi (ou un ln).

**3.** Avec $M$ une borne de $f$ on en déduit par le TEAF que pour tous $a_n$ et $b_n$ il existe $u_n \in [a_n, b_n]$ tel que $|f'(u_n)| = |\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}| \leq 2M\frac{1}{|b_n-a_n|}$. Reste maintenant à choisir $a_n$ et $b_n$ tels que, par encadrements, $u_n \to +\infty$ et $\frac{1}{|b_n-a_n|} \to 0$.

**Indication 59** · Énoncé p. 20 (Cas particulier de composition)

**1.** Pour tout $x$, $g_n(x) = xg_{n-1}(x)$. Dériver par Leibniz.

**2.** Par exemple par récurrence.

**3.** Pour tout $x$, $g_1(x) = \frac{1}{x^{n-1}}g_n(x)$.

**Indication 60** · Énoncé p. 21 (Dans ce chapitre c'est facile)

Appliquer le TEAF à $at^4 + bt^3 + ct^2 + dt$.

# Solutions

**Solution pour l'exercice 5** · Énoncé p. 4 · Indication p. 22 (Variantes de Rolle)

**1.** Posons $M = f(0) - 1$.

Alors de par les limites, il existe $A_+$ et $A_-$ tels que

$$\forall x \leq A_-, f(x) \leq M$$

$$\forall x \geq A_+, f(x) \leq M.$$

Comme $f(0) > M$ on a $A_- \leq 0 \leq A_+$.

Sur le **segment** $[A_-, A_+]$ la fonction $f$ est **continue** donc est bornée et atteint ses bornes.

Soit $c \in [A_-, A_+]$ tel que

$$f(c) = \max_{x \in [A_-, A_+]} f(x).$$

Comme $f(c) \geq f(0) > M$ on a de plus

$$\forall x \notin [A_-, A_+], f(c) \geq f(x).$$

Par conséquent

$$f(c) = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

i.e $f$ admet un maximum global (donc en particulier local) en $c$.

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et que $f$ dérivable en $c$ on en déduit

$$\boxed{f'(c) = 0}.$$

*En fait la deuxième partie de la preuve est inutile (le côté global du maximum), il est néanmoins utile de savoir montrer que $f$ admet un maximum global, d'où sa présence dans la correction.*

**2.** Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ell$ alors la fonction est constante et sa dérivée est nulle.

Sinon, soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x_0) \neq \ell.$$

Soit $\varepsilon = \frac{|f(x_0) - \ell|}{2} > 0$.

Par les limites de $f$ il existe $A_-$ et $A_+$ tels que

$$\forall x \leq A_-, |f(x) - \ell\ | \leq \varepsilon$$

$$\forall x \geq A_+, |f(x) - \ell\ | \leq \varepsilon$$

Et en particulier $A_- < x_0 < A_+$ Comme $f$ est **continue** sur le **segment** $[A_-, A_+]$ alors, par le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes sur $[A_-, A_+]$.

Si $f(x_0) > \ell$, avec $c$ tel que $f(c) = \max_{[A_-, A_+]} f$ on a en particulier

$$f(c) \geq f(x_0) > \ell + \varepsilon$$

et donc pour tout $x \notin [A_+, A_-]$, $f(x) \leq \ell + \varepsilon < f(c)$.

Par conséquent $f$ admet un maximum global en $c$.

Donc comme $\mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $f$ dérivable en $c$on en déduit

$$\boxed{f'(c) = 0}.$$

De même si $f(x_0) < \ell$, on obtient un minimum global.

*En fait la deuxième partie de la preuve est inutile (le côté global de l'extremum), il est néanmoins utile de savoir montrer que $f$ admet un extremum global, d'où sa présence dans la correction.* [Faire un schéma]

**Solution pour l'exercice 6** · Énoncé p. 4 · Indication p. 22 (Variante du TEAF)
Posons

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - \alpha x \end{array}.$$

Alors $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

donc d'après l'exercice 5 $\boxed{\text{il existe } c \in \mathbb{R} \text{ tel que } f'(c) = \alpha}$.

**Solution pour l'exercice 13** · Énoncé p. 7 · Indication p. 23 (Formule de Taylor-Lagrange)

**1.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

Comme $f$ est dérivable sur $[0, x]$ par le formule des **accroissements finis** $\boxed{\text{il existe } \xi \in [0, x]}$ tel que

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0)$$

c'est à dire

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(\xi)x}.$$

**2.** Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et posons

$$\boxed{R_1(x) = f(x) - (f(0) + xf(0))}.$$

L'objectif est de montrer qu'il existe $\xi \in [0, x]$ tel que

$$R_1(x) = \frac{x^2}{2} f''(\xi).$$

Posons la fonction auxiliaire

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \xi &\mapsto f(\xi) + (x - \xi)f'(\xi) + \frac{R_1(x)}{x^2}(x - \xi)^2. \end{aligned}$$

Alors

$$\varphi_1(0) = f(0) + f'(0)x + R_1(x) = f(x)$$
$$\varphi_1(x) = f(x).$$

Par le théorème de Rolle $\boxed{\text{il existe donc } \xi \in ]0,x[}$ tel que

$$\varphi_1'(\xi) = 0.$$

De plus $\varphi_1$ est dérivable sur $[0,x]$ de dérivée,

$$\begin{aligned}\forall \xi \in [0,x], \varphi_1'(\xi) &= f'(\xi) - f'(\xi) + (x-\xi)f''(\xi) - 2\frac{R_1(x)}{x^2}(x-\xi)\\ &= (x-\xi)\left(f''(\xi) - 2\frac{R_1(x)}{x^2}\right).\end{aligned}$$

et donc si $\varphi_1'(\xi) = 0$, $\xi \neq x$, on a

$$\boxed{R_1(x) = \tfrac{x^2}{2}f''(\xi)}$$

ce qui est bien le résultat recherché.

**3.** Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et posons

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k}.$$

L'objectif est de montrer qu'il existe $\xi \in [0,x]$ tel que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Posons la fonction auxiliaire

$$\begin{aligned}\varphi_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ \xi &\mapsto \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-\xi)^k}{k!}f^{(k)}(\xi) + \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}(x-\xi)^{n+1}.\end{aligned}$$

Alors

$$\varphi_n(0) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x) = f(x)$$
$$\varphi_n(x) = f(x).$$

Par le théorème de Rolle $\boxed{\text{il existe donc } \xi \in ]0,x[}$ tel que

$$\varphi_n'(\xi) = 0.$$

De plus $\varphi_n$ est dérivables sur $[0,x]$ de dérivée,$\forall \xi \in [0,x]$,

$$\begin{aligned}\varphi_n'(\xi) &= \sum_{k=0}^{n}\left(-k\frac{(x-\xi)^{k-1}}{k!}f^{(k)}(\xi)+\frac{(x-\xi)^k}{k!}f^{(k+1)}(\xi)\right)-(n+1)\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}(x-\xi)^n\\ &= -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(\xi)\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-\xi)^k}{k!}f^{(k+1)}(\xi)+\cdots\\ &\cdots+\frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}(x-\xi)^n\\ &= 0+(n+1)(x-\xi)^n\left(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}-\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

et donc si $\varphi_n'(\xi)=0$, $\xi\neq x$, on a

$$\boxed{R_n(x)=\tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)}$$

ce qui est bien le résultat recherché.

**Solution pour l'exercice 18** · Énoncé p. 8 · Indication p. 24 (Une inégalité de Landau - Kolmogorov)

**1.** Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}$.

Par le théorème de Taylor-Lagrange (exercice 13) appliqué à $f$ au point $x$ il existe $\xi$ entre $x$ et $x+h$ tel que

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

Donc

$$|f(x+h)-(f(x)+hf'(x))\,|=|\frac{f''(\xi)}{2}h^2|$$

et comme

$$|f''(\xi)|\leq M_2$$

on en déduit

$$\boxed{|f(x+h)-(f(x)+hf'(x))\,|\leq M_2\tfrac{h^2}{2}}.$$

**2.** Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h>0$.

D'après la question précédente on a

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= |f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}|\\ &\leq |f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}|+|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}|\\ &\leq \frac{M_2h^2}{2h}+\frac{|f(x+h)|+|f(x)|}{h}\\ &\leq h\frac{M_2}{2}+\frac{1}{h}2M_0.\end{aligned}$$

et donc on bien

$$\boxed{|f'(x)| \leq h\frac{M_2}{2} + \frac{1}{h}2M_0}.$$

**3.** Constatons tout d'abord que si $M_2 = 0$ alors $f$ est affine, donc comme elle est bornée elle est constante et alors l'inégalité est vraie.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

L'inégalité précédente est vraie pour tout $h > 0$, elle est en particulier vraie pour $h = \sqrt{2\frac{M_0}{M_2}}$.

Remarque: on peut obtenir ce $h$ optimal en étudiant la fonction $h \mapsto h\frac{M_2}{2} + \frac{1}{h}2M_0$.

On a donc

$$|f'(x)| \leq 2\frac{M_0}{M_2}\frac{M_2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\frac{M_0}{M_2}}}2M_0 = 2\sqrt{M_0M_2}.$$

Et comme cela est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien par passage au supremum

$$\boxed{M_1 \leq 2\sqrt{M_0M_2}}.$$

**Solution pour l'exercice 22** · Énoncé p. 9 · Indication p. 24 (Une variante de la règle de l'Hopital)
Posons la fonction

$$\begin{aligned}\varphi : I &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x).\end{aligned}$$

Alors $\varphi$ est dérivable sur $I$ comme combinaisons linéaire de fonctions dérivables.

De plus

$$\varphi(a) = (f(b)-f(a))g(a) - (g(b)-g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$\varphi(b) = (f(b)-f(a))g(b) - (g(b)-g(a))f(b) = -g(b)f(a) + f(b)g(a)$$

donc

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Par le **théorème de Rolle** $\boxed{\text{il existe donc } c \in ]a,b[}$ tel que

$$\varphi'(c) = 0$$

c'est à dire, par l'expression de $\varphi$,

$$(f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = 0$$

ce qui revient à

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}.$$

**Solution pour l'exercice 35** · Énoncé p. 14 · Indication p. 26 (L'exponentielle n'est vraiment pas un polynôme)
On procède par récurrence sur $d$.

Pour $d \in \mathbb{N}$ soit

$$\mathcal{Q}_d : \forall P \text{ de degré } d, |\{x \in \mathbb{R} \mid e^x = P(x)\}| \leq d+1.$$

**Initialisation**

Soit $P$ de degré 0 c'est à dire $P$ un polynôme constant.

Alors avec $f : x \mapsto e^x - P(x)$ on a $f$ dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x > 0.$$

Donc $f$ est strictement croissante. En particulier elle est injective et l'équation

$$f(x) = 0$$

admet au plus une solution.

**Hérédité** Soit $d \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{Q}_d$ vraie.

Soit $P$ un polynôme de degré $d+1$ et soit

$$f : x \mapsto e^x - P(x).$$

Notons $m$ le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ ces solutions.

Alors comme $f$ est dérivable et que

$$\forall k \in [\![1, m-1]\!], f(x_k) = 0 = f(x_{k+1})$$

par le théorème de Rolle,

$$\forall k \in [\![1, m-1]\!], \exists y_k \in ]x_k, x_{k+1}[, f'(y_k) = 0.$$

On a donc $y_1 < y_2 < \cdots < y_{m-1}$ qui sont solutions de

$$f'(x) = 0$$

, équation qui admet donc au moins $m-1$ solutions.

[Faire un schéma]

Or

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - \underbrace{P'(x)}_{\text{polynôme de degré } d}$$

et donc par l'hypothèse de récurrence $f'(x) = 0$ admet au plus $d+1$ solutions.

Donc $m - 1 \leq d + 1$ c'est à dire

$$m \leq (d+1) + 1$$

et on a donc bien montré $\mathcal{Q}_{d+1}$.

**Conclusion** On a donc montré $\mathcal{Q}_0$ et que $\forall d \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_d \Rightarrow \mathcal{Q}_{d+1}$. Donc par récurrence pour tout $d \in \mathbb{N}$ la propriété est vraie.