Continuité

Énoncés 2
Utilisation de la continuité 2
Se ramener à un segment 4
Un peu de calcul de limites 5
Points fixes et Cie 5
Un peu d'étude de régularité 8
Un peu de topologie 12
Équations fonctionnelles et continuité 14
Contre-exemples 16
Monotonie et continuité 21
Autour de l'uniforme continuité 23
Utilisation de la continuité II 26
Vrac 27
Indications 29
Solutions 41

Énoncés

Dans tout le TD, sauf mention du contraire, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Utilisation de la continuité

Exercice 1 (◔★♣ Densité et continuité)
Soit $A \subset I$ une partie **dense** de I, et soient $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Montrer que

$$f = g \Leftrightarrow f_{|A} = g_{|A}.$$

Indication p. 29

Exercice 2 (◔★♣ Polynômes de degré impair)
Montrer que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Indication p. 29

Exercice 3 (◔★ Une utilisation du TVI)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Montrer que $|f|$ est constante **ssi** f est constante.

Indication p. 29

Exercice 4 (◔★ Théorème de Brouwer 1D)
Soit K un **segment** de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(K, K)$.

Montrer que f admet un point fixe.

Indication p. 29

Exercice 5 (◑☆ Théorème de Borsuk-Ulam 1D)
Soit $T > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction T-périodique.

Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = f(x)$.

Indication p. 29

Exercice 6 (◔★ Continuité et signe)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Montrer que **si** $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |\ell|$ **alors** $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\ell$.

Que dire si on ne suppose plus que f est continue ?

Indication p. 29

Exercice 7 (◔★ Il y a de la marge)
Soit K un segment de $\mathbb{R}$.

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$.

On suppose que

$$\forall x \in K, f(x) < g(x).$$

1. Montrer que
$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in K, f(x) \leq g(x) - \varepsilon.$$
2. On suppose que f est positive. Montrer que
$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in K, 0 \leq f(x) \leq (1-\varepsilon) g(x).$$
3. Les résultats précédents sont ils toujours valides si on remplace K par un intervalle I de $\mathbb{R}$?

Indication p. 29

Exercice 8 (◔☆ Les intervalles sont convexes)
Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, ..., x_n) \in I^n$, $(\rho_1, ..., \rho_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

Montrer qu'il existe $z \in I$ tel que

$$\frac{\sum_{k=1}^n \rho_k f(x_k)}{\sum_{k=1}^n \rho_k} = f(z).$$

Indication p. 29

Exercice 9 (◕☆ Différences de fonctions périodiques)
Soient f et g deux fonctions périodiques et continues définies sur $\mathbb{R}$.

Montrer que **si** $f(x) - g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ **alors** $f = g$.

Indication p. 29 · Solution p. 41

Exercice 10 (◉☆ Lemme de Croft: cas général)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Indication p. 30

Se ramener à un segment

Exercice 11 (◑★ Limites finies en l'infini)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admettant des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$.

1. Faire un schéma.
2. Montrer que f est bornée.
3. La fonction f atteint-elle ses bornes ?
4. Montrer que f est uniformément continue.

Indication p. 30

Exercice 12 (◑★ Même limites en l'infini)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tel que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell.$$

1. Faire des schémas.
2. Montrer que f admet un maximum ou f admet un minimum.
3. Montrer que f n'est pas injective.

Indication p. 30

Exercice 13 (◑★ Fonction périodique)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.

1. Montrer que **si** f admet une limite en $+\infty$ **alors** f est constante.
2. Montrer que **si** f est continue **alors** f est bornée et atteint ses bornes.
3. Montrer que **si** f est continue **alors** f est uniformément continue.

Indication p. 30

Un peu de calcul de limites

Exercice 14 (◔☆ Écriture et résolution d'équation)
Soit $f : I \to]0, +\infty[$ et $a \in \overline{I}$

On suppose que $f(x) + f(x)^{-1} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 2$. Montrer que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.

Indication p. 31

Exercice 15 (◑★ À la Cesàro)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que $f(x+1) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et on souhaite montrer que $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1. Expliquer comment se ramener au cas $\ell = 0$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que
$$\forall x \geq A, \left| \frac{f(x) - f(x - \lfloor x - A \rfloor)}{x} \right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$
3. Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 0$. Montrer qu'il existe $B \geq A$ tel que
$$\forall x \geq B, |\frac{f(x - \lfloor x - A \rfloor)}{x}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
4. Conclure.

Indication p. 31

Exercice 16 (◑★ Continuité d'une fonction implicite)
1. Montrer qu'il existe une et unique fonction $f : [0, 2] \to [0, 1]$ telle que
$$\forall x \in [0, 2], (f(x))^5 + f(x) = x.$$
2. Montrer que la fonction f précédente est continue.

Indication p. 31

Points fixes et Cie

Exercice 17 (◔★ Points fixes)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $[a, b] \subset I$ un segment de $\mathbb{R}$.

1. On suppose $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$
2. On suppose $[a, b] \subset f([a, b])$. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$.

Indication p. 31

Exercice 18 (◔☆ Encore des points fixes)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On suppose que $f(x) = o_{x\to\pm\infty}(x)$. Montrer que f admet un point fixe.
2. On suppose que f est décroissante. Montrer que f admet un unique un point fixe.

Indication p. 31

Exercice 19 (◑★ Picard 1D)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction contractante, c'est à dire k-lipschitzienne pour un $k \in [0, 1[$.

1. Montrer que f admet un unique point fixe.
2. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ce point fixe.

Indication p. 31

Exercice 20 (◑☆ Point fixe de l'itérée seconde)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On suppose que $f \circ f$ admet un point fixe.

Montrer que f admet un point fixe.

Indication p. 31

Exercice 21 (◑☆ Fonctions coïncidant en un point)
Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f, g \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

On dit que f et g *coïncident en un point* ssi il existe $x \in I$ tel que $f(x) = g(x)$.

1. Donner un exemple de deux fonctions coïncidant en un point.

   Donner un exemple de deux fonctions qui ne coïncident en aucun en un point.
2. On suppose que $f([a, b]) \subset g([a, b])$. Montrer que f et g coïncident en un point.
3. On suppose que $\sup(f([a, b])) = \sup(g([a, b]))$. Montrer que f et g coïncident en un point.

Indication p. 32

Exercice 22 (◑★ Fonctions et points fixes itérés)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0(I, I)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note dans cet exercice $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

On suppose que

$$\forall x \in I, \exists n \in \mathbb{N}^*, f^n(x) = x.$$

On cherche à montrer que

$$\forall x \in I, f^2(x) = x.$$

1. Montrer que f est bijective.
2. En déduire que f est strictement monotone.
3. On suppose que f est strictement croissante, montrer par l'absurde que $f = \mathrm{Id}_I$.
4. On suppose que f est strictement décroissante, montrer que $f^2 = \mathrm{Id}_I$.

Indication p. 32

Exercice 23 (◕☆ Commutation et fonctions commutant en un point)
Soit $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f, g \in \mathcal{C}^0(I, I)$.

On suppose que $f \circ g = g \circ f$.

On cherche à montrer que f et g coïncident en un point.

On suppose par l'absurde que f et g ne coïncident en aucun point.

1. Expliquer pourquoi on peut supposer sans perte de généralité que $f > g$.
2. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k(x) \geq g^k(x) + k\eta.$$
3. Conclure.

Indication p. 32

Exercice 24 (◑☆ Proto-Sarkovskii)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Dans cet exercice on notera f^n l'itérée n-ième de f c'est à dire $\underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

1. Soient I et J deux segments de $\mathbb{R}$ tels que

$$J \subset f(I).$$

Montrer qu'il existe un segment $\tilde{I} \subset I$ tel que

$$J = f(\tilde{I}).$$

2. Soient I et J deux segments de $\mathbb{R}$ tels que

$$J \subset f(I)$$
$$I \subset f(J).$$

Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f^2(x) = x$ et $f(x) \neq x$.

3. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$f^3(x_0) < x_0 < f(x_0) < f^2(x_0) < f^4(x_0).$$

Montrer que f admet un point fixe et que f^2 admet un point fixe qui n'est pas un point fixe de f.

Indication p. 32

Un peu d'étude de régularité

Exercice 25 (◔★♠ Maximum de fonctions)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, ..., f_n$ des fonctions de I vers $\mathbb{R}$.

On définit le maximum de ces fonctions par

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \max(f_1(x), ..., f_n(x)) \end{aligned}$$

(parfois noté $F = \max(f_1, ..., f_n)$).

1. Montrer que **si** pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est positive **alors** F est positive.

2. Montrer que **si** pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est croissante **alors** F est croissante.

3. Montrer que **si** pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est continue **alors** F est continue.

4. Montrer **si** pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est uniformément continue **alors** F est uniformément continue.

5. Montrer **si** pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est lipschitzienne **alors** F est lipschitzienne.

Indication p. 32

Exercice 26 (◔★♠ Sup de fonctions)
Soit Λ un ensemble d'indices non vide et $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un ensemble de fonctions de I vers $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, f_λ est majorée par M.

On définit le supremum de ces fonctions par

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sup_{\lambda\in\Lambda}(f_\lambda(x)) \end{aligned}$$

(parfois noté $F = \sup_{\lambda\in\Lambda}(f_\lambda)$).

1. Commenter la bonne définition de F.
2. Montrer que **si** pour tout $\lambda \in \Lambda$, f_λ est positive **alors** F est positive.
3. Montrer que **si** pour tout $\lambda \in \Lambda$, f_λ est croissante **alors** F est croissante.
4. Donner un exemple tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, f_λ est lipschitzienne et F est non continue.
5. Soit $k > 0$, montrer que **si** pour tout $\lambda \in \Lambda$, f est k-lipschitzienne **alors** F est k-lipschitzienne.

Indication p. 32

Exercice 27 (◔★ Introduction aux fonctions hölderiennes)
Soit $\alpha \in]0, 1]$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est α-hölderienne ssi

$$\exists C \geq 0, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq C\ |x - y|^\alpha.$$

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est hölderienne ssi il existe $\alpha \in]0, 1]$ tel que f est α-hölderienne.

1. Donner un exemple de fonction hölderienne non lipschitzienne.
2. Montrer que toute fonction hölderienne est uniformément continue.
3. Montrer que pour $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, le prolongement par continuité en 0 de $\frac{1}{\ln(x)}$ est uniformément continue et n'est pas hölderienne.

Indication p. 33

Exercice 28 (◔★ Stabilité par combinaison linéaire)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble des fonctions bornées sur I est un sev de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions continues sur I est un sev de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'ensemble des fonctions uniformément continues sur I est un sev de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
4. Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitzienne sur I est un sev de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
5. Montrer que pour tout $\alpha \in [0,1[$ l'ensemble des fonctions α-hölderienne (défini à l'exercice 27) est un sev de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
6. On suppose I borné. Montrer que l'ensemble des fonctions hölderiennes est un sev de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

Indication p. 33

Exercice 29 (◔★ Produits et régularité)
Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

1. L'ensemble des fonctions continues sur I est-il stable par produit ?
2. L'ensemble des fonctions uniformément continues sur I est-il stable par produit ?
3. L'ensemble des fonctions lipschitziennes sur I est-il stable par produit ?

Indication p. 33

Exercice 30 (◔★ Fonctions lipschitziennes bornées)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que I est borné. Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est bornée.
2. Dans le cas où I est non-borné, donner un exemple de fonction lipschitzienne non-bornée.
3. On note $\mathrm{Lip}_b(I)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes et bornées définies sur I, c'est à dire

$$\mathrm{Lip}_b(I) = \{\exists k>0, \forall (x,y)\in I^2, |f(x)-f(y)| \leq k\,|x-y| \text{ et } \exists M\in\mathbb{R}, \forall x\in I, |f(x)|\leq M\}.$$

Montrer que $(\mathrm{Lip}_b(I),+,\times)$ est un anneau.

Indication p. 33

Exercice 31 (◔★ Fonctions localement constantes)
Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est localement constante (sur I) ssi elle est constante au voisinage de tout point c'est à dire

$$\forall x \in I, \exists \delta > 0, \forall (y_1, y_2) \in [x-\delta, x+\delta], f(y_1) = f(y_2).$$

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall a \in I \exists \delta > 0, \forall \epsilon > 0, \forall x \in I, |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon.$$

   Montrer que f est localement constante.
2. Montrer que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ une fonction est localement constante ssi elle est constante.

Indication p. 33

Exercice 32 (◔★ Composée de bornée et continue)
Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que $b \circ c$ et $c \circ b$ sont bornées.

Donner un exemple où $b \circ c$ et $c \circ b$ non-continues.

Indication p. 33

Exercice 33 (◔★ Composée et uniforme continuité/lipschitzité)
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$.
1. Montrer que **si** f et g sont uniformément continues **alors** $g \circ f$ est uniformément continue.
2. Montrer que **si** f et g sont lipschitziennes **alors** $g \circ f$ est lipschitzienne.

Indication p. 33

Exercice 34 (◑★ Attention aux epsilon et delta)
Soit $I \subset \mathbb{R}$.

On dit (dans cet exercice) qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est `eunitnoc` en $a \in I$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x-a| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \delta.$$

1. Donner un exemple de fonction `eunitnoc` en un point et non continue en ce point.
2. Montrer qu'une fonction est `eunitnoc` en un point ssi pour tout $R > 0$, $f_{|I \cap [-R,R]}$ est bornée.

Indication p. 34

Un peu de topologie

Exercice 35 (◔★ Distance à une partie)
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de A non vide. On définit la fonction distance à A, notée d_A par

$$\begin{aligned} d_A : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \inf_{a\in A}(|x-a|). \end{aligned}$$

1. Commenter la bonne définition de d_A.
2. Montrer que d_A est continue.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d_A(x) = 0$ ssi $x \in \overline{A}$.

Indication p. 34

Exercice 36 (◔★♠ Connexité des intervalles)
Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^0(I, \{0,1\})$.

Montrer que f est constante.

Indication p. 34

Exercice 37 (◔★ Adhérence de l'adhérence)
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$.

Montrer que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Indication p. 34

Exercice 38 (◔★ Zéros d'une fonction continue)
On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}$ est *fermée* ssi elle est égale à son adhérence i.e $\overline{F} = F$ (cf exercice 40)

1. Montrer que l'ensemble des zéros d'une fonction continue est fermé.
2. Montrer que tout fermé est l'ensemble des zéros d'une fonction continue.

Indication p. 34

Exercice 39 (◕★ Parties homéomorphes)
Deux parties A et B de $\mathbb{R}$ sont dites *homéomorphes* ssi il existe une bijection continue entre A et B de réciproque continue (une telle bijection est appelée homéomorphisme).

1. Montrer que la relation «être homéomorphe à» est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est homéomorphe à $[0,1]$ ou $[0,1[$ ou $]0,1[$.
3. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ne sont pas homéomorphes.
4. Montrer qu'il existe une surjection continue de $]0,1[$ sur $[0,1]$ mais pas de surjection continue de $[0,1]$ sur $]0,1[$.

Indication p. 34

Exercice 40 (◑★ Ouverts et fermés)

▷ Une partie $U \subset \mathbb{R}$ est dite *ouverte* ssi elle contient un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire

$$\forall x \in U, \exists \delta > 0, [x-\delta, x+\delta] \subset U.$$

▷ Une partie $F \subset \mathbb{R}$ est dite *fermée* ssi elle est égale à son adhérence, c'est à dire

$$\overline{F} = F.$$

1. Soit F une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que F est fermée ssi toute suite d'éléments de F qui converge, converge vers un élément de F.
2. Montrer qu'une union d'ouverts est ouverte, qu'une intersection de fermés est fermée.
3. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est ouverte, qu'une union finie de fermés est fermée.
4. Montrer qu'une partie est fermée ssi son complémentaire est ouvert.
5. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   ▷ Montrer que pour toute partie F fermée, $f^{-1}(F)$ est fermée.
   ▷ Montrer que pour tout partie U ouverte, $f^{-1}(U)$ est ouverte.
6. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que pour toute partie U ouverte de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ est ouverte. Montrer que f est continue.

Exercice 41 (◑★ Lemme d'Urysohn 1D)

1. Soient $F_1 = [a_1, b_1]$ et $F_2 = [a_2, b_2]$ deux intervalles fermés disjoints. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f_{|F_1} = 0$ (fonction nulle) et $f_{|F_2} = 1$ (fonction constante 1).
2. Soient F_1 et F_2 deux fermés (cf 40) de $\mathbb{R}$ disjoints (non vides). Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f_{|F_1} = 0$ et $f_{|F_2} = 1$. (On pourra utiliser l'exercice 35)

Indication p. 34

Équations fonctionnelles et continuité

Exercice 42 (◑★♠ Équation de Cauchy)
Soit f un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ c'est à dire $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)+f(y).$$

On pose $\alpha=f(1)$.

1. Montrer que
$$\forall r\in\mathbb{Q}, f(r)=\alpha r.$$
2. On suppose que f est monotone, montrer que $f=\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
3. On suppose que f est continue, montrer que $f=\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
4. On suppose qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que f continue en a, montrer que $f=\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
5. On suppose qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que f est bornée au voisinage de a, montrer que $f=\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
6. On admet que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$ admet une base. Montrer qu'il existe une telle fonction telle que $f\neq\alpha\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Indication p. 34

Exercice 43 (◔☆ Équation de Cauchy bis)
On admet le résultat de l'exercice 42.

1. Déterminer l'ensemble des fonctions $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)f(y).$$
2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ vérifiant
$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy)=f(x)+f(y).$$
3. Déterminer l'ensemble des fonctions $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ vérifiant
$$\forall (x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2, f(xy)=f(x)f(y).$$

Indication p. 35

Exercice 44 (◔★ Une fonction constante)
Soit $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ continue en 0 telle que

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(2x).$$

Montrer que f est constante.

Indication p. 35

Exercice 45 (◔☆ Une fonction nulle)
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(2x) = 0.$$

Montrer que f est nulle.

Indication p. 35

Exercice 46 (◔☆ Encore fonction constante)
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue en 0 et en 1 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x^2).$$

Montrer que f est constante.

Indication p. 35

Exercice 47 (◑★ Égalité sur les dyadiques)
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Indication p. 35

Exercice 48 (◔★ Des suites arithmético-géométriques)
Soient a et b deux réels tels que $|a| \neq 1$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(ax + b) = f(x).$$

1. On suppose que $|a| < 1$. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ converge vers un réel indépendant de x.
2. On suppose que $|a| < 1$. Montrer que f est constante.
3. On suppose $|a| > 1$. Montrer que f est constante.

Indication p. 35

Exercice 49 (◑☆ Pas de solution)
Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \circ f = -\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Indication p. 36

Exercice 50 (◔☆ Encore une suite récurrente)
Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in [0,1], f(\sin(x)) = f(x).$$

Indication p. 36

Exercice 51 (◑☆ Par exemple télescopage)
Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) - f(x) = x.$$

Indication p. 36

Exercice 52 (◑★ Le carré et le parallélogramme)
Déterminer tous les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y).$$

Indication p. 36

Contre-exemples

Exercice 53 (◔★ Juste la racine)
Soit

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto \sqrt{x}. \end{aligned}$$

1. Démontrer en 5 lettres que f (+ vérification d'hypothèses) est uniformément continue.
2. Démontrer que f est uniformément continue sans utiliser le théorème précédent (on pourra remarquer que pour $(x,y) \in [0,1]^2$ t.q $x \leq y$ on a $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$).
3. Montrer que f n'est pas lipschitzienne.

Indication p. 36

Exercice 54 (◔★ Propriété des valeurs intermédiaires)
On dit qu'une fonction vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si l'image de tout intervalle est un intervalle.

1. Expliquer en trois lettres pourquoi toute fonction continue vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.
2. Donner un exemple de fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et non-continue.

Indication p. 36

Exercice 55 (◔★ Bijection non continue)
Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est bijective et n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Indication p. 36

Exercice 56 (◑★ Pas d'interversion de limites)
On définit la fonction f par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Déterminer si les limites suivantes existent, et le cas échéant les calculer.
$$\lim_{h\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right), \lim_{x\to 0}\left(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right).$$
2. Commenter.

Indication p. 36

Exercice 57 (◑★ Pas vraiment des contre-exemples)
Étudier l'ensemble des points de continuité des fonctions suivantes

1.
$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2.$$

2.
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \lfloor x \rfloor \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3.
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4.
$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \lfloor x \rfloor \cos(2\pi x).$$

Indication p. 36

Exercice 58 (◔★ Les oscillations à l'infini)
Montrer que

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \cos(x^2)$$

est continue, est bornée et atteint ses bornes, et n'est pas uniformément continue.

Indication p. 37

Exercice 59 (◔★ (Dis)-continuité à la demande, cas fini)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_n$ des réels.

1. Donner un exemple de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de continuité est $\mathbb{R} \setminus \{x_1, ..., x_n\}$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $f\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est continue en a ssi $f(a) = 0$.
3. Donner un exemple de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de continuité est $\{x_1, ..., x_n\}$.

Indication p. 37

Exercice 60 (◔★ Attention aux ensemble des équations fonctionnelles)
Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(2\pi \log_2(x)) \end{aligned}$$

est continue et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(2x) = f(x).$$

Commenter vis à vis de l'exercice 44.

Indication p. 37

Exercice 61 (◑★ Fonction de Thomae)
On définit une fonction $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ , } (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \text{ , } p \wedge q = 1. \end{cases}$$

1. Commenter la bonne définition de la fonction.
2. Montrer que T est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

Indication p. 37

Exercice 62 (◕★ Escalier de Cantor)
On note $\mathcal{E} = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1]) \mid f(0)=0, f(1)=1\right\}$ (ce n'est pas un ev).

On définit $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par, pour tout $f \in \mathcal{E}$

$$T(f) : [0,1] \to [0,1]$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}f(3x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f\left(3\left(x - \frac{2}{3}\right)\right) & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

1. Vérifier que T est bien définie et pour une fonction $f \in \mathcal{E}$ représenter graphiquement la fonction $T(f)$.

On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ par la récurrence
- ▷ $f_0 = \mathrm{Id}_{[0,1]}$
- ▷ $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} = T(f_n)$

1. (□) Représenter graphiquement f_n pour plusieurs valeurs de n.
2. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la suite de réels $(f_n(x))_{n\in N}$ converge.

   On note alors
   $$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$
3. Représenter graphiquement f.
4. Montrer que f est continue.

On pourrait montrer que pour «presque tout» (à définir) point la fonction f est constante au voisinage de ce point (donc dérivable et de dérivée nulle) mais f n'est pas constante.

Exercice 63 (◔★ Un contre-exemple aux cordes universelles)
Commencer par lire l'énoncé de l'exercice 80.

Soit $\delta \in [0,1] \setminus \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

On définit une fonction $f_\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \left(\sin\left(\frac{\pi}{\delta}x\right)\right)^2 - \left(\sin\left(\frac{\pi}{\delta}\right)\right)^2 x$$

Montrer que $f_\delta \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $f_\delta(0) = f_\delta(1)$ et
$$\neg(\exists x \in [0, 1-\delta], f_\delta(x+\delta) = f_\delta(x)).$$

Indication p. 37

Exercice 64 (◔★ Plein de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$!)
Représenter graphiquement et étudier les éventuelles limites en 0 des fonctions suivantes.

1. $$f_1 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. $$f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

3. $$f_3 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

4. $$f_4 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

5. $$f_5 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Pour chacune des fonctions proposer une intuition fausse dont elle est un contre-exemple.

Indication p. 37

Monotonie et continuité

Exercice 65 (◔★ Caractérisation séquentielle et fonctions croissantes)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ croissante, soit $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Montrer que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x<a}}{\longrightarrow} \ell$ **ssi** il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < a$ et $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Indication p. 38

Exercice 66 (◔★ Plus petite fonction croissante plus grande, version continue)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction majorée.

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}(x) = \sup_{t \leq x}(f(t)).$$

1. Commenter la bonne définition de $\tilde{f}$.
2. Montrer que $\tilde{f}$ est croissante et que $\tilde{f} \geq f$.
3. Montrer que $\tilde{f}$ est continue.

Indication p. 38

Exercice 67 (◔★ Monotonie sur une partie dense)
Soit D une partie dense de $\mathbb{R}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

On suppose que $f_{|D}$ est croissante. Montrer que f est croissante.

Indication p. 38

Exercice 68 (◑★ Un peu de monotonie remplace parfois la continuité)
Soit D une partie dense de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que tout point de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite croissante (resp. décroissante) d'éléments de D.
2. Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que f croissante et g continue.

   On suppose $f_{|D} = g_{|D}$.

   Montrer que $f = g$.

Indication p. 38

Exercice 69 (◕☆ Ceci n'est pas le lemme de Croft)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x > 0$, $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Montrer que f est croissante.

Indication p. 38

Exercice 70 (◑★ Monotonie locale)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ localement croissante à droite c'est à dire vérifiant

$$\forall x \in I, \exists \delta > 0, f_{|I \cap [x, x+\delta]} \text{ est croissante.}$$

Montrer que f est croissante.

Indication p. 38

Exercice 71 (◔☆ Monotonies encadrantes)
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

On suppose que $x \mapsto f(x)$ est décroissante et $x \mapsto xf(x)$ est croissante. Montrer que f est continue.

Indication p. 38

Exercice 72 (◔★ Ensemble de discontinuité d'une fonction monotone)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

On note

$$D = \{a \in \mathbb{R} \mid f \text{ n'est pas continue } a\}.$$

Montrer que D est (au plus) dénombrable, c'est à dire fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Indication p. 38

Autour de l'uniforme continuité

Exercice 73 (◑★♠ Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Montrer que f est uniformément continue sur I **ssi**

$$\forall \left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) \in (I^{\mathbb{N}})^2, |x_n - y_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication p. 39

Exercice 74 (◕★ Uniforme continuité et prolongement)
Soit $]a,b] \subset \mathbb{R}$.

Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ uniformément continue.

Montrer que f est prolongeable par continuité en a.

Indication p. 39

Exercice 75 (◑★ Taille des uniformément continues)
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ uniformément continue.

Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq Ax + B$.

Donner un contre-exemple à la réciproque.

Indication p. 39

Exercice 76 (◕★ Lemme de Croft: cas uniformément continu)
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uniformément continue.

On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(nx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Indication p. 39

Exercice 77 (◔★ Sommes de Riemann alternées)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$.

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$$

Indication p. 39 · Solution p. 41

Exercice 78 (◕☆ Uniforme continuité et limite en l'infini)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue.

1. On suppose que

$$f(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Montrer que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

2. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que

$$\forall t \in [0,1[, f(t+n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Montrer que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Indication p. 39

Exercice 79 (◔☆ Uniforme continuité et réciproque)
Donner un exemple de deux intervalles I, J de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ uniformément continue et bijective, tels que f^{-1} n'est pas uniformément continue.

Indication p. 39

Utilisation de la continuité II

Exercice 80 (◔★ Des cordes horizontales)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$\begin{aligned}\varphi_n : \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\end{aligned}$$

1. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_n\left(\frac{k}{n}\right).$$

2. En déduire qu'il existe $x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ tel que

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right) = f(x).$$

Indication p. 39

Exercice 81 (◔☆ L'exercice du cross)
Soit $[a,b] \subset I$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.

On suppose que

$$\int_a^b g_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ tel que

$$\beta - \alpha = \frac{b-a}{n}$$

et

$$\int_\alpha^\beta g_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta g_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 40

Exercice 82 (◑★ Maximum d'une subdivision)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$M_n = \max_{k\in[\![0,n-1]\!]} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Indication p. 40

Vrac

Exercice 83 (◔★ Ouvert ou fermé ?)
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Montrer que

$$\sup_{t\in[a,b]} (f(t)) = \sup_{(t\in]} a,b[)(f(t)).$$

Indication p. 40

Exercice 84 (◑☆ Propriété des valeurs intermédiaires bis)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

On suppose que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et est injective.

Montrer que f est continue.

Indication p. 40

Exercice 85 (◔☆ Fonction écartante)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \geq \alpha\ |x-y|.$$

Montrer que f est bijective.

Indication p. 40

Exercice 86 (◑☆ Nombre d'antécédents)
Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ admet exactement deux éléments.

Donner un exemple de telle fonction non continue.

Indication p. 40

Exercice 87 (◑★ Limite ou pas limite ?)
Soit

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}. \end{aligned}$$

Déterminer si $f(x)$ admet une limite quand $x \to +\infty$, et le cas échéant calculer cette limite.

Indication p. 40

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Densité et continuité)
Étant donné un point $x \in I$, prendre une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers x et passer à la limite l'égalité des images.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Polynômes de degré impair)
Déterminer les limites en $\pm\infty$ puis TVI.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Une utilisation du TVI)
Le cas nul est immédiat.

Si la constante est $c \neq 0$ et qu'il existe (x_-, x_+) tels que $f(x_-) = -c$ et $f(x_+) = c$, utiliser le TVI pour aboutir à une contradiction.

Indication 4 · Énoncé p. 2 (Théorème de Brouwer 1D)
Avec $K = [a, b]$ on cherche à montrer que $x \mapsto f(x) - x$ s'annule. Étudier la continuité, la valeur en a et la valeur en b (et faire un schéma).

Indication 5 · Énoncé p. 2 (Théorème de Borsuk-Ulam 1D)
Plusieurs méthodes possibles.

- Considérer $\int_0^T \big(f\big(x + \frac{T}{2}\big) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$.
- Regarder les exercices de cordes, par exemple 80.

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Continuité et signe)
S'inspirer de l'exercice 3.

Indication 7 · Énoncé p. 3 (Il y a de la marge)
Se ramener à $g - f > 0$. Par le th. des bornes atteintes si une fonction continue est strictement positive sur un segment alors elle est « loin de 0 ».

Indication 8 · Énoncé p. 3 (Les intervalles sont convexes)
Comme $f(I)$ est un intervalle (pourquoi ?) on a $\frac{\sum_{k=1}^n \rho_k f(x_k)}{\sum_{k=1}^n \rho_k} \in f(I)$ (pourquoi ?).

Indication 9 · Énoncé p. 3 (Différences de fonctions périodiques)
Commencer par traiter le cas où les deux fonctions admettent une période commune.

Dans les autres cas soient T_f et T_g des périodes. On a alors (sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$) $\mathbb{Z}T_f + \mathbb{Z}T_g$ dense dans $\mathbb{R}$.

On écrit alors pour x fixé $|f(x) - g(x)| \leq |f\big(x + nT_f\big) - g\big(x + nT_f\big)| + |g\big(x + nT_f\big) - g\big(x + mT_g\big)|$. À $\varepsilon > 0$ fixé on peut choisir n et m tels que le premier terme est $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ par limite et le second est $\leq \frac{\varepsilon}{2}$ par uniforme continuité et comme $nT_f - mT_g$ peut être arbitrairement près de 0.

Solution p. 41

Indication 10 · Énoncé p. 4 (Lemme de Croft: cas général)
Une option est de

- ▷ Commencer par regarder le **théorème de Baire** dans les TDs précédents.
- ▷ Pour $\varepsilon > 0$ fixé, considérer pour tout $n \in \mathbb{N}$ les

$$F_{N,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}_+, \forall k \geq N, |f(kx)| \leq \varepsilon\}.$$

- ▷ Il s'agit de fermés d'union $\mathbb{R}_+^*$, par Baire au moins un est d'intérieur non vide c'est à dire il existe N_0 et $]\alpha, \beta[$ non vide tels que $]\alpha, \beta[\subset F_{N_0,\varepsilon}$.
- ▷ Montrer que

$$\bigcup_{k \geq N}]k\alpha, k\beta[$$

contient un segment de la forme $]A, +\infty[$.

- ▷ Conclure.

Il est aussi possible de faire sans le théorème de Baire, mais il est conseillé de regarder la preuve de ce dernier pour s'en inspirer.

Indication 11 · Énoncé p. 4 (Limites finies en l'infini)

1. Le schéma est essentiel !
2. Par les convergences en $\pm\infty$, il existe A_- et A_+ tels que f borné sur $]-\infty, A_-]$ et f borné sur $[A_+, +\infty[$. Il reste à montrer que f (continue) est bornée sur $[A_-, A_+]$ (un segment).
3. Non (trouver un contre-exemple).
4. Soit $\varepsilon > 0$. Commencer par montrer qu'il existe A_- et A_+ tels que pour tout $(x, y) \in]-\infty, A_-]$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ (et idem dans $[A_+, +\infty[$). Il reste à montrer que f (continue) est uniformément continue sur $[A_- - 1, A_+ + 1]$ (un segment). Vérifier que tous les cas sont bien pris en compte (quitte à prendre $\delta \in]0, 1]$).

Alternativement, prolonger par continuité $f \circ \tan$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Indication 12 · Énoncé p. 4 (Même limites en l'infini)

1. Le schéma est essentiel !
2. Traiter le cas f constante. Ensuite avec $f(x_0) \neq \ell$ effectuer une disjonction de cas selon $f(x_0) > \ell$ ou $f(x_0) < \ell$. Dans le premier, cas il existe A_- et A_+ tels que f strictement inférieur à $f(x_0)$ sur $]-\infty, A_-]$ et f borné sur $[A_+, +\infty[$. Montrer que f (continue) admet un maximum sur $[A_-, A_+]$ (segment). Vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum global.
3. Avec y compris strictement entre un extrema et ℓ, montrer que $y = f(x)$ admet au moins deux solutions distinctes (l'une à droite de l'extrema et l'autre à gauche).

Indication 13 · Énoncé p. 4 (Fonction périodique)

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x + nT)$.
2. Se ramener à un segment par périodicité.
3. Se ramener à un segment par périodicité, ne pas oublier de le prendre un peu plus grand qu'une période pour avoir de la marge.

Indication 14 · Énoncé p. 5 (Écriture et résolution d'équation)
Avec $g(x) = f(x) + f(x)^{-1}$ exprimer f en fonction de g (trinôme du second degré) et conclure par opérations sur les limites.

Indication 15 · Énoncé p. 5 (À la Cesàro)
Suivre les étapes, et si nécessaire revoir la preuve de Cesàro.

1. Considérer $x \mapsto f(x) - \ell$.
2. Il existe A tel que pour tout $x \geq A$, $|f(x+1) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Utiliser un télescopage pour exprimer $f(x) - f(x - \lfloor x - A \rfloor)$ comme une somme de termes tous plus petits (en va) que $\frac{\varepsilon}{2}$.
3. Remarquer que $x - \lfloor x - A \rfloor$ est majoré par $A + 1$ et que donc $f(x - \lfloor x - A \rfloor)$ peut se majorer indépendamment de x (bornes atteintes).
4. Faire le découpage habituel en $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Indication 16 · Énoncé p. 5 (Continuité d'une fonction implicite)
Pour l'existence et l'unicité, fixer x et étudier la fonction $t \mapsto t^5 + t - x$.

De nombreuses méthodes pour la monotonie: écrire un encadrement explicite par le tab var, étudier la monotonie par le tab var, utiliser une caractérisation séquentielle.

Ou bien tout simplement constater que cela revient à montrer que $g : [0,1] \to [0,2]$, $t \mapsto t^5 + t$ est bijective continue sur un intervalle et que par conséquent g^{-1} est continue.

Indication 17 · Énoncé p. 5 (Points fixes)

1. Faire un schéma. Étudier $x \mapsto f(x) - x$ (changement de signe entre a et b cf 5).
2. Faire un schéma. Étudier $x \mapsto f(x) - x$ (avec $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$ changement de signe entre α et β)

Indication 18 · Énoncé p. 6 (Encore des points fixes)
Étudier $x \mapsto f(x) - x$: continuité, (stricte) monotonie et limites en l'infini.

Indication 19 · Énoncé p. 6 (Picard 1D)

1. L'unicité est immédiate.

   Pour l'existence, on peut par exemple considérer les limites de $f(x) - x$ quand $x \to \pm\infty$.

   Alternativement on peut fixer u_0 et considérer la suite définie par $u_0 = u_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On peut alors montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est « de Cauchy ».
2. Pour montrer que la suite converge vers le point fixe, le point important est de montrer qu'elle converge. Par exemple utiliser BW.

Indication 20 · Énoncé p. 6 (Point fixe de l'itérée seconde)
Par contraposée. Si f n'a pas de point fixe alors $f - \mathrm{Id}$ est de signe strictement constant. Par exemple si pour tout x, $f(x) > x$ on en déduit que pour tout x, $f(f(x)) > f(x) > x$.

De manière similaire avec c un point fixe remarquer que $f(f(c)) - f(c)$ et $f(c) - c$ sont de signes opposés.

Indication 21 · Énoncé p. 6 (Fonctions coïncidant en un point)

1. Faire un schéma.
2. S'inspirer de l'exercice 17 (étudier $g - f$).
3. Les sups sont atteints (pourquoi ?). Avec α et β les points où f et g atteignent leurs sups, étudier $g - f$ sur $[\alpha, \beta]$.

Indication 22 · Énoncé p. 7 (Fonctions et points fixes itérés)

1. Pour la surjectivité, on a pour tout x avec un n_x adapté $f(f^{n_x-1}(x))$. Pour l'injectivité étant donnés x et y tq $f(x) = f(y)$ et n_x, n_y adaptés, comparer $f^{n_x n_y}(x)$ et $f^{n_x n_y}(y)$.
2. Continue et bijective sur un intervalle.
3. Si il existe x tel que $f(x) > x$, comparer pour tout n, $f^n(x)$ et x.
4. Que dire de $-f$?

Indication 23 · Énoncé p. 7 (Commutation et fonctions commutant en un point)

1. La fonction $f - g$ ne s'annule jamais et est continue.
2. Procéder par récurrence. L'initialisation l'exercice classique 7. Pour l'hérédité écrire sans surprise f^{k+1} à l'aide de f^k et f.
3. Choisir un x quelconque et faire $k \to +\infty$.

Indication 24 · Énoncé p. 8 (Proto-Sarkovskii)

1. Prendre des sup et inf d'images réciproques des bornes.
2. Remarquer que $I \subset f^2(I)$.
3. Que dire de $[f^3(x_0), x_0]$ et $[f(x_0), f^2(x_0)]$?

Indication 25 · Énoncé p. 8 (Maximum de fonctions)

Pour tous les points remarquer qu'il suffit de traiter le cas $n = 2$ puis d'effectuer une récurrence !

1. Immédiat.
2. Prendre $x \leq y$. Écrire les inégalités entre $f_1(x) \leq f_1(y) \leq F(y)$, de même pour f_2 et conclure.
3. Montrer que de manière générale lorsque $x \to a$, si $f_1(x) \to \ell_1$ et $f_2(x) \to \ell_2$ alors $\max(f_1(x), f_2(x)) \to \max(\ell_1, \ell_2)$ (classique). Pour cela traiter $\ell_1 = \ell_2$ puis se ramener au cas $\ell_1 > \ell_2$ puis utiliser passer d'inégalités strictes sur les limites à des inégalités au voisinage pour montrer qu'au voisinage de a, $\max(f_1(x), f_2(x)) = f_1(x)$. Alternativement $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ et opérations sur les limites.
4. Une preuve avec des ε et δ n'est pas aisée. Utiliser plutôt $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$.
5. Encore une fois $\max(a, b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$ fait des merveilles. Sinon écrire $f_1(x) \leq f_1(y) + k_1 \, |x - y| \leq F(y) + k|x - y|$, de même pour f_2 et conclure après avoir fait l'autre signe.

Indication 26 · Énoncé p. 9 (Sup de fonctions)

1. Majoré non vide.
2. Passer au sup.
3. Soit $x \leq y$. Montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $f_\lambda(x) \leq f_\lambda(y) \leq F(y)$ puis passer au sup.
4. Par exemple (mais il y en a plein d'autres) $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, 1]$, ou des fonctions affines par morceau dont le sup est un créneau discontinu.

5. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, pour tous (x, y), $f_\lambda(x) \leq f_\lambda(y) + k|x-y| \leq F(y) + k|x-y|$. Passer au sup puis conclure après avoir fait l'autre sens.

Indication 27 · Énoncé p. 9 (Introduction aux fonctions hölderiennes)

1. Que dire par exemple de la racine en 0.

2. Déterminer une expression explicite de δ en fonction de ε (comme pour les fonctions lipschitzienne).

3. Fixer α et utiliser les croissances comparées en 0.

Indication 28 · Énoncé p. 10 (Stabilité par combinaison linéaire)
Pour le cas borné: inégalité triangulaire.

Pour les autres cas: encore l'inégalité triangulaire !

$$|(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(y)| \leq |\lambda|\ |f(x) - f(y)| + |\mu|\ |g(x) - g(y)|.$$

Indication 29 · Énoncé p. 10 (Produits et régularité)
Oui. Pour $I = \mathbb{R}$, non et non (prendre $x \mapsto x$). (Pour I borné regarder l'exercice 30)

Indication 30 · Énoncé p. 10 (Fonctions lipschitziennes bornées)

1. On fixe a, alors pour tout x, on a $|f(x)| \leq |f(a)| + k|x-a|$.

2. L'identité est 1-lipschitzienne.

3. C'est un sous-anneau des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Pour le produit remarquer que pour tous x et y

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x)|\ |g(x) - g(y)| + |g(y)|\ |f(x) - f(y)|$$

puis utiliser que f et g sont bornées et lipschitziennes.

Indication 31 · Énoncé p. 11 (Fonctions localement constantes)

1. Que dire de $y \in \mathbb{R}$ tq $\forall \varepsilon > 0, |y| \leq \varepsilon$?

2. Pour le sens non immédiat: Fixer $x_0 \in I$ et poser $J = \{x \in I \mid f(x) = f(x_0)\}$. Montrer que si $x \in J$ alors il existe $\delta > 0$ tel que $[x - \delta, x + \delta] \subset J$. Pour conclure que $J = I$ regarder par exemple $\sup\{t \in I, [x_0, t] \subset J\}$ et montrer qu'il s'agit de $\sup(I)$.

Indication 32 · Énoncé p. 11 (Composée de bornée et continue)
Le caractère borné de $b \circ c$ est issu de celui de c. On a $b(\mathbb{R})$ est inclus dans un segment K et $c_{|K}$ est bornée car continue sur un segment.

Prendre par exemple $c = \mathrm{Id}_R$ et b non continue.

Indication 33 · Énoncé p. 11 (Composée et uniforme continuité/lipschitzité)

1. Adapter la preuve de la composée de limite: fixer $\varepsilon > 0$, puis un $\delta > 0$ correspondant à ε pour g, puis un $\eta > 0$ correspondant à δ pour f.

2. Écrire $|g(f(x)) - g(f(y))| \leq k_g\ |f(x) - f(y)| \leq k_f\ |x - y|$.

Indication 34 · Énoncé p. 11 (Attention aux epsilon et delta)
Pour le premier point lire d'abord le second.

Pour le second point: dans le sens réciproque à $\varepsilon > 0$ fixé, avec R tel que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subset [-R, R]$ puis M bornant $f_{I\cap[-R,R]}$, prendre $\delta = 2M$. Dans le sens direct à R fixé, avec ε tel que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \supset [-R, R]$ et δ correspond, prendre $M = |f(a)| + \delta$.

Indication 35 · Énoncé p. 12 (Distance à une partie)

1. Partie minorée par 0 non vide.
2. Montrer que d_A est 1-lipschitzienne, pour cela écrire pour tout $a \in A$, $d_A(x) \leq |x-a| \leq |y-a| + |x-y|$ puis passer à l'inf sur y (cf exercice 26).
3. Utiliser par exemple la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$ ($x \in \overline{A}$ ssi il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ t.q $u_n \to a$) et celle de l'inf.

Indication 36 · Énoncé p. 12 (Connexité des intervalles)
Si f n'est pas constante, TVI.

Indication 37 · Énoncé p. 12 (Adhérence de l'adhérence)
Utiliser au choix la définition ou la caractérisation séquentielle.

Indication 38 · Énoncé p. 12 (Zéros d'une fonction continue)

1. Utiliser par exemple la caractérisation séquentielle de $\overline{F}$.
2. Regarder l'exercice 35.

Indication 39 · Énoncé p. 13 (Parties homéomorphes)

1. L'identité est un homéomorphisme la composée d'homéos est un homéo et la réciproque d'un homéomorphisme est un homéomorphisme.
2. Pour les intervalles bornés, prendre des fonctions affines. Pour l'infini regarder par exemple arctan et tan.
3. Si par l'absurde f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ utiliser le TVI pour atteindre 0.
4. Faire un schéma. Th. des bornes atteintes.

Indication 41 · Énoncé p. 13 (Lemme d'Urysohn 1D)
Pour F fermé on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d_F(x) = 0$ ssi $x \in F$.

Remarquer que:

$$\begin{cases} \frac{\delta}{\delta+0} = 1 \\ \frac{0}{0+\delta} = 0. \end{cases}$$

Indication 42 · Énoncé p. 14 (Équation de Cauchy)

1. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$. Comme $0 = n + (-n)$ on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = \alpha n$. Puis pour $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ écrire $f(p) = f\left(q\frac{p}{q}\right) = qf\left(\frac{p}{q}\right)$.
2. Regarder par exemple l'exercice 67
3. Regarder par exemple l'exercice 1.

4. À l'aide de translations montrer que si f est continue en a alors f est continue en tout point. Plus précisément, pour tout b, on a $f(x) = f(x + (a - b)) + f(b - a)$ d'où la continuité en b.
5. Commencer par montrer de même que f est bornée au voisinage de tout point, et en particulier au voisinage de 0. Montrer alors que f est continue. Plus précisément avec a et M tel que f bornée par M sur $[-a, a]$ montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ avec N tel que $\frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{M}$, si $|x| \leq \frac{a}{N}$ alors $|f(x)| \leq \varepsilon$.
6. Prendre n'importe quelle fonction $\mathbb{Q}$-linéaire, définie par exemple par l'image d'une base.

Indication 43 · Énoncé p. 14 (Équation de Cauchy bis)
1. Montrer que f positive $(f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}))$ puis que si f s'annule en un point alors f est nulle. Considérer ensuite $\ln \circ f$. On obtient les $x \mapsto e^{\alpha x}$ et 0.
2. Considérer $f \circ \exp$. On obtient les $x \mapsto \alpha \ln(x)$.
3. S'inspirer des deux précédents. On obtient 0 et les $x \mapsto x^{\alpha}$.

Indication 44 · Énoncé p. 14 (Une fonction constante)
Par récurrence pour tout x, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(\frac{x}{2^n})$. À x fixé faire tendre $n \to +\infty$ et obtenir par continuité $f(x) = f(0)$.

Indication 45 · Énoncé p. 15 (Une fonction nulle)
Par récurrence pour tout x, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = (-1)^n f(\frac{x}{2^n})$. À x fixé faire tendre $n \to +\infty$, et constater la seule possibilité est $f(x) = f(0) = 0$.

Indication 46 · Énoncé p. 15 (Encore fonction constante)
S'inspirer de l'exercice 44.

Plus précisément pour x, pour tout n, $f(x) = f(x^{2^n})$ et $f(x) = f(x^{2^{-n}})$. Pour $|x| < 1$ faire $n \to +\infty$ dans le premier et utiliser la continuité en 0 pour obtenir $f(0)$, et pour $|x| > 1$ faire $n \to +\infty$ dans le second et utiliser la continuité en 1 pour obtenir $f(1)$. Il reste ensuite à montrer que les deux valeurs sont égales, pour cela utiliser la continuité en 1.

Indication 47 · Énoncé p. 15 (Égalité sur les dyadiques)
Commencer à faire un schéma pour se confondre qu'il s'agit des fonctions affines.

On pourra remarquer que l'ensemble des dyadiques (équivalent des décimaux mais en base 2) $D = \{\frac{p}{2^n}, (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Montrer alors que f et $x \mapsto (f(1) - f(0))x + f(0)$ sont continues et coïncident sur une partie dense.

Indication 48 · Énoncé p. 15 (Des suites arithmético-géométriques)
1. Suite arithmético-géométrique donc tout est explicite !
2. Avec x fixé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite précédente, montrer que pour tout n, $f(u_n) = x$. Faire $n \to +\infty$ et utiliser la continuité.
3. Se ramener au cas $|a| < 1$ en remarquant que si $y = ax + b$ on a $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$.

Indication 49 · Énoncé p. 15 (Pas de solution)
Au pire regarder l'exercice 22. Que dire de f^4 ici ?

Indication 50 · Énoncé p. 16 (Encore une suite récurrente)
Soit $x \in [0,1]$.

Constater qu'avec $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = \sin(u_n(x))$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(u_n(x))$.

Indication 51 · Énoncé p. 16 (Par exemple télescopage)
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) - f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{2^{k+1}}.$$

Indication 52 · Énoncé p. 16 (Le carré et le parallélogramme)
S'inspirer de l'exercice 42.

Remarquer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$f((n+1)x) + f((n-1)x) = 2f(nx) + 2f(x)$$

et en déduire que par récurrence double, $f(nx) = n^2 f(x)$.

Indication 53 · Énoncé p. 16 (Juste la racine)
1. Commence par «H» et termine par «eine».
2. Faire le calcul explicite.
3. Regarder en 0.

Indication 54 · Énoncé p. 17 (Propriété des valeurs intermédiaires)
1. Commence par T comme Théorème et termine par VI comme Valeurs Intermédiaires.
2. Partir par exemple $x \mapsto \sin\big(\frac{1}{x}\big)$. Il reste à montrer que l'image de tout intervalle est un intervalle. Pour un segment $[a,b]$ distinguer selon la présence de 0 ou non.

Indication 55 · Énoncé p. 17 (Bijection non continue)
Pour la bijectivité exhiber par exemple une bijection réciproque. Pour la non continuité, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ et $1 \neq 0$.

Indication 56 · Énoncé p. 17 (Pas d'interversion de limites)
Les calculs sont explicites. Pour le premier remarquer on obtient 0 tandis que le second (commencer par un calcul de dérivée) n'admet pas de limite.

On ne peut donc **PAS INTERVERSER LES LIMITES**.

Indication 57 · Énoncé p. 18 (Pas vraiment des contre-exemples)
Faire les calculs. En dehors des points où la partie entière à un saut tout se passe a priori bien.

Pour ces points ($\mathbb{Z}$ pour $x \mapsto \lfloor x \rfloor$) au pire faire une étude de limite à gauche et à droite (car la partie entière est constante localement à gauche et à droite).

Indication 58 · Énoncé p. 18 (Les oscillations à l'infini)
On remarquera (cf cours démo de Heine) qu'une méthode pour nier l'uniforme continuité est d'utiliser la contraposée de la caractérisation séquentielle (exercice 73).

Indication 59 · Énoncé p. 18 ((Dis)-continuité à la demande, cas fini)

1. Prendre une fonction continue (par exemple 0) et changer la valeur en $x_0, ..., x_n$.
2. Par exemple par caractérisation séquentielle. Ou des opérations.
3. Prendre une fonction (par exemple polynomiale) qui ne s'annule qu'en les $x_0, ..., x_n$ et utiliser la question précédente.

Indication 60 · Énoncé p. 19 (Attention aux ensemble des équations fonctionnelles)
Fonctions usuelles et opérations. On rappelle que pour tout $x \neq 0$, $\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$ et donc $\log_2(2x) = 1 + \log_2(x)$.

Remarquer que dans l'exercice 44 la fonction doit être définie en 0. Est-on prolongeable par continuité en 0 ici ? (Faire un schéma)

Indication 61 · Énoncé p. 19 (Fonction de Thomae)
La bonne définition est issue de l'unicité de la représentation comme fraction irréductible de tout rationnel.

Pour étudier la continuité montrer que:

- ▷ Tout rationnel est limite d'une suite d'irrationnels.
- ▷ Si une suite de rationnel $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un irrationnel alors en particulier $q_n \to +\infty$. (Par exemple par l'absurde).

Indication 63 · Énoncé p. 20 (Un contre-exemple aux cordes universelles)
Fonction usuelle et calcul.

Si il existe un tel x développer et obtenir $\sin\left(\frac{\pi}{\delta}\right) = 0$ d'où il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q $\delta = \frac{1}{n}$.

Indication 64 · Énoncé p. 21 (Plein de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$!)
Il y a (malheureusement) non unicité des intuitions fausses. Par exemple, toutes les fonctions proposées vérifient la propriété des valeurs intermédiaires mais ne sont pas toutes continues (exercice 54). On remarque aussi que

1. f_1 est bornée au voisinage de 0 mais n'admet pas de limite finie en 0.
2. f_2 est continue en 0 mais n'est pas de signe constant au voisinage de 0.
3. f_3 est non bornée au voisinage de 0 mais n'a pas de limite infinie (à gauche ou à droite) en 0.
4. f_4 est continue sur $\mathbb{R}^*$, bornée mais n'atteint pas ses bornes.
5. f_5 est prolongeable par continuité en 0 et ce prolongement est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas continue.

Indication 65 · Énoncé p. 21 (Caractérisation séquentielle et fonctions croissantes)
La limite existe par limite monotone. Pour obtenir la valeur de la limite juste utiliser la composition de limite (cas fonction et suite).

Indication 66 · Énoncé p. 22 (Plus petite fonction croissante plus grande, version continue)
Les deux premiers points ont déjà été traités dans un TD précédent (pour la croissance remarquer que si $x \leq y$ alors $f(]-\infty, x]) \subset f(]-\infty, y])$ et pour l'inégalité que $x \in]-\infty, x]$)

Indication 67 · Énoncé p. 22 (Monotonie sur une partie dense)
Par exemple par caractérisation séquentielle, étant donné $x < y$ construire des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^n$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. Constater qu'APCR $x_n < y_n$. Composer par f en utilisant la monotonie et passer à la limite par continuité.

Indication 68 · Énoncé p. 22 (Un peu de monotonie remplace parfois la continuité)

1. Reprendre la démonstration de la caractérisation séquentielle de la densité et dans la construction de la suite rajouter comme contrainte que pour tout n, $u_{n+1} < u_n < x$ (et vérifier que cela reste possible de construire une telle suite).
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, prendre deux suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D^{\mathbb{N}}$ l'une croissante et l'autre décroissante tendant vers x. On a $g(y_n) \to g(x)$ et $g(z_n) \to g(x)$ par continuité de g. Il suffit alors d'utiliser seulement $y_n < x < z_n$ et la monotonie de f pour obtenir $f(y_n) \leq f(x) \leq f(z_n)$ et conclure par un théorème d'encadrement.

Indication 69 · Énoncé p. 22 (Ceci n'est pas le lemme de Croft)
Soient $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ et $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ deux rationnels tels que $r_1 \leq r_2$.

Constater que $f\left(p_1 q_2 \frac{1}{q_1 q_2}\right) \leq f\left(p_2 q_1 \frac{1}{q_1 q_2}\right)$.

Conclure par continuité.

Indication 70 · Énoncé p. 23 (Monotonie locale)
Faire par exemple par méthode de prolongement.

C'est à dire considérer pour $a \in I$, l'ensemble des $x > a$ tels que $f_{|[a,x]}$ est croissante. Que dire de son supremum ?

Indication 71 · Énoncé p. 23 (Monotonies encadrantes)
Remarquer que si $0 < x < a$ alors

$$f(a) \leq f(x) \leq \frac{a}{x} f(a).$$

Indication 72 · Énoncé p. 23 (Ensemble de discontinuité d'une fonction monotone)
Remarquer qu'en tout point de discontinuité il y a un « saut » (pourquoi ?) et que dans ce saut on peut choisir un rationnel (pourquoi ?). On obtient alors une injection de $\mathbb{Q}$ dans D (pourquoi ?). Cela assure la (au plus) dénombrabilité de D (admis pour l'instant si nécessaire).

Indication 73 · Énoncé p. 23 (Caractérisation séquentielle de l'uniforme continuité)
S'inspirer de la caractérisation séquentielle de la continuité. Plus précisément:

- ▹ Pour le sens direct: fixer deux suites; soit $\varepsilon > 0$, prendre $\delta > 0$ correspondant dans la définition de l'uniforme continuité. Alors, APCR $|u_n - v_n| \leq \delta$, d'où $|f(x_n) - f(y_n)| \leq \varepsilon$.
- ▹ Pour le sens réciproque: procéder par contraposée. Si f n'est pas uniformément continue nier l'uniforme continuité. Avec un tel $\varepsilon > 0$ fixé, construire deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout n, $|u_n - v_n| \leq \frac{1}{n+1}$ et $|f(u_n) - f(v_n)| > \varepsilon$.

Indication 74 · Énoncé p. 24 (Uniforme continuité et prolongement)
Commencer par montrer que f est bornée au voisinage de a. Utiliser par exemple la caractérisation séquentielle de la limite. Montrer l'unicité de la valeur d'adhérence par uniforme continuité. Conclure par BW.

Indication 75 · Énoncé p. 24 (Taille des uniformément continues)
Remarquer que si δ est un module d'ε-continuité, avec $n \in \mathbb{N}$ pour $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| \leq n\delta$, on a $|f(x) - f(y)| \leq n\varepsilon$ (subdiviser le segment $[x, y]$ en n segments de longueurs $\leq \delta$).

Remarque que pour tout $\delta > 0$, $|x - y| \leq \delta\lceil\frac{|x-y|}{\delta}\rceil$.

Indication 76 · Énoncé p. 24 (Lemme de Croft: cas uniformément continu)
Fixer un $\varepsilon > 0$ puis un module d'ε uniforme continuité. Prendre alors un x dépendant de ce δ. (Faire un schéma).

Indication 77 · Énoncé p. 24 (Sommes de Riemann alternées)
Grouper les termes deux par deux pour montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, APCR la somme est plus petite que ε.

Solution p. 41

Indication 78 · Énoncé p. 25 (Uniforme continuité et limite en l'infini)

1. Montrer qu'il existe M tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leq 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq M$. Pour cela on peut par exemple fixer un $\varepsilon > 0$ arbitraire, fixer un $\delta > 0$ correspondant et faire suffisamment de « pas » de longueur δ pour couvrir tout segment de longueur ≤ 1. Pour plus de détails faire un schéma et regarder aussi l'exercice 75.
2. Découper l'intervalle $[0, 1[$ en un nombre fini de sous-intervalles de taille δ. Utiliser l'uniforme continuité sur chacun de ces sous-intervalles.

Indication 79 · Énoncé p. 25 (Uniforme continuité et réciproque)
Par exemple la racine et le carré.

Indication 80 · Énoncé p. 26 (Des cordes horizontales)

1. Commence par «t» et termine par «élescopique».

2. Montrer que deux $\varphi_n\left(\frac{k}{n}\right)$ consécutifs sont de signe opposés (au sens large). Utiliser le TVI sur un tel segment.

Indication 81 · Énoncé p. 26 (L'exercice du cross)
Utiliser l'exercice 80.

Indication 82 · Énoncé p. 27 (Maximum d'une subdivision)
Attention la suite n'est pas forcément croissante.

On a f bornée et atteint ses bornes. Notons μ son maximum et x un point où il est atteint. Montrer que pour tout $\delta > 0$, APCR $\{\} \cap [x-\delta, x+\delta] \neq \varnothing$. En déduire que par continuité de f, $\forall \varepsilon > 0$, APCR $M_n \geq f(x) - \varepsilon$.

Indication 83 · Énoncé p. 27 (Ouvert ou fermé ?)
Une inégalité est issue de l'inclusion.

Pour l'autre constater que $a \in \overline{(a,b)}$ et f continue.

Indication 84 · Énoncé p. 27 (Propriété des valeurs intermédiaires bis)
Se rendre compte que dans une des versions de la preuve du cours de la stricte monotonie on a utilisé la propriété des valeurs intermédiaires (issue de la continuité par TVI).

On peut donc montrer que f est strictement monotone.

Adapter ensuite la preuve stricte monotone + surjective implique continue.

Indication 85 · Énoncé p. 27 (Fonction écartante)
On a l'injectivité en utilisant l'inégalité.

On en déduit la (stricte) monotonie par continuité.

Une fois les valeurs absolues enlevées en déduire le comportement en l'infini puis la surjectivité par TVI.

Indication 86 · Énoncé p. 28 (Nombre d'antécédents)
Faire un schéma et utiliser par exemple le TVI ou le TBA sur un segment bien choisi. Pour l'exemple non continu, ne pas hésiter à définir par "disjonction de cas".

Indication 87 · Énoncé p. 28 (Limite ou pas limite ?)
Regarder 1 et $\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$ pour se forger une intuition.

Solutions

Solution pour l'exercice 9 · Énoncé p. 3 · Indication p. 29 (Différences de fonctions périodiques)
On propose ici une preuve alternative n'utilisant pas la continuité (merci à Paul S.).

Pour tout $T > 0$ notons

$$\begin{aligned}\Delta_T : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) &\to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})\\ f &\mapsto (x \mapsto f(x+T) - f(x)).\end{aligned}$$

Ainsi une fonction est T-périodique ssi $\Delta_T(f) = 0$.

On commence par remarquer le lemme suivant: «Soit h une fonction périodique telle que $h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $h = 0$.»

En effet avec $T > 0$ une période de h et $x \in \mathbb{R}$, on a $h(x) = h(x+nT) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soient $T_f > 0$ et $T_g > 0$ des périodes respectives de f et g. Posons $h = f - g$.

On a

$$\begin{aligned}\Delta_{T_f}(h) &= \Delta_{T_f}(f) - \Delta_{T_f}(g)\\ &= 0 - \Delta_{T_f}(g).\end{aligned}$$

Et:

- $\Delta_{T_f}(g)$ est périodique de période T_g car $\Delta_{T_g}\big(\Delta_{T_f}(g)\big) = \Delta_{T_f}\big(\Delta_{T_g}(g)\big) = 0$,
- $\Delta_{T_f}(h)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $h\big(x+T_f\big) - h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 - 0 = 0$.

par conséquent $\Delta_{T_f}(h)$ est nulle.

Donc h est T_f périodique et tends vers 0 en l'infini.

Donc $h = 0$ c'est à dire $\boxed{f = g}$.

Solution pour l'exercice 77 · Énoncé p. 24 · Indication p. 39 (Sommes de Riemann alternées)
Tout d'abord comme f est continue sur le segment $[0,1]$, par le théorème de Heine, elle est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par uniforme continuité, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, si $|x-y| \leq \delta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{n} \leq \delta$.

Soit $n \geq N$.

On a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) = \begin{cases}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\Big(f\Big(\frac{2j}{n}\Big) - f\Big(\frac{2j+1}{n}\Big)\Big) + \frac{1}{n}f\big(1-\frac{1}{n}\big) & \text{si } n \text{ est impair}\\ \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\Big(f\Big(\frac{2j}{n}\Big) - f\Big(\frac{2j+1}{n}\Big)\Big) & \text{si } n \text{ est pair}\end{cases}$$

et comme pour tout j,

$$|\ \frac{2j}{n} - \frac{2j+1}{n}\ | = \frac{1}{n} \leq \delta,$$

on en déduit

$$\begin{aligned} |\ \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\left(f\left(\frac{2j}{n}\right) - f\left(\frac{2j+1}{n}\right)\right)\ | &\leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}|\ f\left(\frac{2j}{n}\right) - f\left(\frac{2j+1}{n}\right)\ | \\ &\leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\varepsilon \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}\left(f\left(\frac{2j}{n}\right) - f\left(\frac{2j+1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et comme $\left(f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car tend vers $f(1)$), on en déduit que

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$