Bases et Dimension

Énoncés 2
Indications 7

Énoncés

Note: à compléter

Exercice 1 (◑★♠ Intersection d'hyperplans)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soient $\varphi_1, ..., \varphi_q$ des formes linéaires sur E.

Montrer que

$$\dim\left(\bigcap_{k=1}^{q} \mathrm{Ker}(\varphi_k)\right) = \dim(E) - \mathrm{rg}\big(\varphi_1, ..., \varphi_q\big).$$

Indication p. 7

Exercice 2 (◔★♠ Rang composé)
Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

Montrer que

$$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u) - \dim(\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u)).$$

Indication p. 7

Exercice 3 (◔★ Rang d'une somme)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes.

Montrer que

- $\mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$,
- $|\,\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u+v)$,
- $\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ ssi $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Im}(v)$ ssi $\mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.

Indication p. 7

Exercice 4 (◔★♣ Inversible à gauche/droite)
Soit E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,E)$.

On suppose que

$$v \circ u = \mathrm{Id}_E \,.$$

Montrer que u et v sont inversibles.

Indication p. 7

Exercice 5 (◑☆ Inversible à gauche/droite en dimension infinie)
Donner un exemple d'espace vectoriel E et d'endomorphismes $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que

- $v \circ u = \mathrm{Id}_E$,
- u n'est pas inversible,
- v n'est pas inversible.

Indication p. 7

Exercice 6 (◔★ Sous-algèbre de dimension finie)
Soit E une $\mathbb{K}$-algèbre.

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de E de dimension finie.

Montrer que

$$\mathcal{A}^\times = E^\times \cap \mathcal{A}.$$

Commenter.

Indication p. 7

Exercice 7 (◔★ Centre)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

On note

$$\mathcal{Z}(\mathcal{L}(E)) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}.$$

Montrer que

$$\mathcal{Z}(\mathcal{L}(E)) = \mathbb{K} \cdot \mathrm{Id}_E \,.$$

Commenter.

Indication p. 7

Exercice 8 (◑★♠ Ordre de nilpotence)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'ordre de nilpotence r.

Montrer que $r \leq n$.

Indication p. 7

Exercice 9 (◔★♠ Fitting version rang)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

Montrer que la suite $\left(\mathrm{rg}\left(u^k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante convexe (c'est à dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $0 \geq \mathrm{rg}\left(u^{k+1}\right) - \mathrm{rg}\left(u^k\right) \geq \mathrm{rg}\left(u^k\right) - \mathrm{rg}\left(u^{k-1}\right)$).

Indication p. 7

Exercice 10 (◑☆ Inégalités sur le rang)
Soient E, F, G, H des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$, $w \in \mathcal{L}(G,H)$.

Montrer que

$$\mathrm{rg}(w \circ v \circ u) - \mathrm{rg}(w \circ v) - \mathrm{rg}(v \circ u) + \mathrm{rg}(v) \geq 0.$$

Exercice 11 (◑☆ Nilpotents commutant)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Soient $u_1, ..., u_n \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes nilpotents qui commutent deux à deux.

Montrer que $u_1 \circ u_2 \circ ... \circ u_n = 0$.

Indication p. 7

Exercice 12 (◔☆ Noyau égal image sans matrices)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

1. Montrer que $\dim(E)$ est paire.
2. Montrer qu'il existe $(e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{2n})$ une base de E telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u(e_i) = e_{n+i}$$
$$\forall i \in [\![n+1, 2n]\!], \quad u(e_i) = 0.$$

Indication p. 7

Exercice 13 (◔★ Mini Fitting)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$;
2. $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u)$;
3. $\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Im}(u)$.

Indication p. 8

Exercice 14 (◑★ Polynôme annulateur $X^3 - 1$)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer l'inclusion $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Indication p. 8

Exercice 15 (◔★ Sous-espace stable)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Soit u un endomorphisme de E.

Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Montrer que si $F \subset u(F)$ alors $u(F) = F$.

Indication p. 8

Exercice 16 (◔★ Existence d'un polynôme annulateur)
Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

Montrer qu'il existe un polynôme P non nul tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ où $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Indication p. 8

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Intersection d'hyperplans)
Considérer $\Psi : x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_q(x) \end{pmatrix}$.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Rang composé)
Constater que $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}\left(v_{|\mathrm{Im}(u)}\right)$ et que $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u)$.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Rang d'une somme)
Remarquer que $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ et que $\mathrm{Ker}(u+v) \supset \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$.

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Inversible à gauche/droite)
Injectivité pour l'un et surjectivité pour l'autre.

En dimension finie, comme il y a égalité des dimensions (pourquoi ?), l'injectivité entraîne la surjectivité et réciproquement.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Inversible à gauche/droite en dimension infinie)
Prendre une base $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et faire un décalage à droite et à gauche.

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Sous-algèbre de dimension finie)
Pour $a \in \mathcal{A}$ fixé remarquer que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\to \mathcal{A} \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

est bien définie, linéaire, injective et donc surjective.

Indication 7 · Énoncé p. 3 (Centre)
Cf exactement le même exercice dans le td sur les matrices.

On remarque qu'en pratique il n'y a pas besoin de la dimension finie.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Ordre de nilpotence)
On pourra choisir $x \in E$ tel que $u^{r-1}(x) \neq 0$ et montrer que $(u^{r-1}(x), u^{r-2}(x), ..., u(x), x)$ est une famille libre.

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Fitting version rang)
Utiliser le théorème du rang pour la décroissance et par exemple le théorème du rang composé pour la convexité.

Indication 11 · Énoncé p. 4 (Nilpotents commutant)
On pourra par exemple montrer que $\left(\mathrm{rg}(u_1 \circ \cdots u_k)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est strictement décroissante.

Indication 12 · Énoncé p. 5 (Noyau égal image sans matrices)
1. Utiliser la formule du rang.

2. Utiliser la forme géométrique du théorème du rang puis $(e_1, ..., e_n)$ une base du supplémentaire.

Indication 13 · Énoncé p. 5 (Mini Fitting)
Une inclusion est toujours vraie, et il suffit de conclure par égalité des dimensions.

Indication 14 · Énoncé p. 5 (Polynôme annulateur $X^3 - 1$)
- ▷ On rappelle que $v \circ w = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ssi $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Ker}(v)$.
- ▷ Par dimension et théorème du rang il suffit de montrer l'un des deux.

Indication 15 · Énoncé p. 5 (Sous-espace stable)
Inclusion dans un sens et inégalité des dimensions pour conclure.

Indication 16 · Énoncé p. 6 (Existence d'un polynôme annulateur)
Que dire de $\left(\mathrm{Id}_E, u, u^2, ..., u^{\dim(E)}\right)$?