Introduction à l'Algèbre Linéaire

Énoncés 2
Calculs et sous-espaces vectoriels 3
Calculs et familles 8
Manipulation de sevs 12
Manipulation de familles 16
Applications explicites 19
Le yoga de l'algèbre linéaire 22
Projecteurs et symétries 24
En vrac 26
Un zeste de dualité 29
Indications 30
Solutions 37

Énoncés

Dans tout le TD, $\mathbb{K}$ sera un corps et on écrira «espace vectoriel» ou «ev» pour «$\mathbb{K}$-espace vectoriel».

Calculs et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 (◔★ Sous-espaces vectoriels ? (compréhension))
On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure d'espace vectoriel.

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

1. L'ensemble

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y \right\}.$$

2. L'ensemble

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \leq 0 \right\}.$$

3. L'ensemble

$$F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \right\}.$$

4. L'ensemble

$$F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 1 \geq 2x \right\}.$$

5. L'ensemble

$$F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y - 1 = 0 \right\}.$$

6. L'ensemble

$$F_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (3x + 2y = 0) \text{ ou } (-3x + y = 0) \right\}.$$

7. L'ensemble

$$F_7 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = x \right\}.$$

8. L'ensemble

$$F_8 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2 \right\}.$$

9. L'ensemble

$$F_9 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x + y) = 0 \right\}.$$

10. L'ensemble

$$F_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq x - 1 \right\}.$$

11. L'ensemble

$$F_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3y = 2x \right\}.$$

12. L'ensemble

$$F_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \right\}.$$

Indication p. 30

Exercice 2 (◔★ Sous-espaces vectoriels ? (extension))
On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure d'espace vectoriel.

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

1. L'ensemble
$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3s-2t \\ -s \\ s+t \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. L'ensemble
$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3s-2r \\ -t \end{pmatrix}, (t,s,r) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

3. L'ensemble
$$F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. L'ensemble
$$F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 2ts \\ (1-t^2)s \\ (1+t^2)s \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

5. L'ensemble
$$F_5 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (s+t) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

6. L'ensemble
$$F_6 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -t \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

7. L'ensemble
$$F_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 3-t \\ -s \\ s+t \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

8. L'ensemble
$$F_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t^2+s^3 \\ 0 \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

9. L'ensemble
$$F_9 = \left\{ \begin{pmatrix} 3s+4t-3r+5w \\ 3s+4t-3r+5w \\ 0 \end{pmatrix}, (t,s,r,w) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

10. L'ensemble
$$F_{10} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

11. L'ensemble
$$F_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (t,s) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

12. L'ensemble
$$F_{12} = \left\{ \cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3 (◔★ Sous-espaces vectoriels ? (fonctions))
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

1. L'ensemble des fonctions continues.
2. L'ensemble des fonctions positives.
3. L'ensemble des fonctions ne s'annulant jamais.
4. L'ensemble des fonctions s'annulant au moins une fois.
5. L'ensemble des fonctions admettant une limite finie en $+\infty$.
6. L'ensemble des fonctions admettant une limite finie ou infinie en $+\infty$
7. L'ensemble des fonctions majorées.
8. L'ensemble des fonctions bornées.
9. L'ensemble des fonctions croissantes.
10. L'ensemble des fonctions monotones.
11. L'ensemble des fonctions 2π-périodiques.
12. L'ensemble des fonctions périodiques.
13. L'ensemble des fonctions pouvant s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes.
14. L'ensemble des fonctions f pour lesquelles il existe un segment $[a, b]$ t.q $\forall x \notin [a, b], f(x) = 0$.

Indication p. 30

Exercice 4 (◔★ Sous-espaces vectoriels ? (matrices carrées))
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer si les ensembles suivants sont des sevs de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et le cas échéant expliciter une base de ces sevs.

1. L'ensemble des matrices inversibles.
2. L'ensemble des matrices symétriques.
3. L'ensemble des matrices antisymétriques.
4. L'ensemble des matrices nilpotentes.
5. L'ensemble des matrices diagonales.
6. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
7. L'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes.
8. L'ensemble des homothéties.
9. L'ensemble des matrices de traces nulles.

Indication p. 31

Calculs et familles

Exercice 5 (◔★ Libre, génératrice, base ou rien du tout)
Les familles suivantes sont-elles libres ? sont-elles génératrices ?

1. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

3. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right)$$

4. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$$

5. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}36\\-\frac{7}{3}\\1\end{pmatrix}\right)$$

6. Dans $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-8\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\2\\0\end{pmatrix}\right)$$

7. Dans $\mathbb{R}^4$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

8. Dans $\mathbb{R}^4$

$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

9. ▯ Demander à une personne de votre choix de vous donner une famille de vecteurs d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ et déterminer si elle est libre, si elle est génératrice.

Indication p. 31

Exercice 6 (◔★ Liberté à paramètre)
Déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que la famille de vecteurs de $\mathbb{C}^3$

$$\left(\begin{pmatrix}\lambda\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\\lambda\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\\lambda\end{pmatrix}\right)$$

est **liée**.

Indication p. 31

Exercice 7 (◔★ Un exemple d'opérations)
Soit E un espace vectoriel.

Soit $(u_1, ..., u_p) \in E^p$ une famille libre de E.

On pose pour $k \in [\![1, p-1]\!]$

$$v_k = u_k - u_p.$$

Montrer que $(v_1, ..., v_{p-1})$ une famille libre de E.

Indication p. 31

Exercice 8 (◔★ Vect de vect)
Soit E un espace vectoriel, $(u_1, ..., u_p) \in E^p$ et $(v_1, ..., v_q) \in E^q$ deux familles de vecteurs de E

On suppose que

$$\forall k \in [\![1, q]\!], v_k \in \text{Vect}(u_1, ..., u_p).$$

Montrer que

$$\text{Vect}(v_1, ..., v_q) \subset \text{Vect}(u_1, ..., u_p).$$

Indication p. 31

Exercice 9 (◔★♠ Famille de Vandermonde)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $(x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $(n+1)$ réels **deux à deux distincts**.

Montrer que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (x_0)^2 \\ (x_1)^2 \\ \vdots \\ (x_n)^2 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} (x_0)^n \\ (x_1)^n \\ \vdots \\ (x_n)^n \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Indication p. 31

Exercice 10 (◔★ D'autres opérations)
Soit E un espace vectoriel et $(u_1, ..., u_p) \in E^p$ une famille de vecteurs de E.

Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on pose

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} u_i.$$

1. Montrer que $(u_1, ..., u_p)$ est libre **ssi** $(v_1, ..., v_p)$ est libre.
2. Montrer que $(u_1, ..., u_p)$ est génératrice **ssi** $(v_1, ..., v_p)$ est génératrice.

Indication p. 31

Exercice 11 (◔★ Famille à diagonale dominante)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(c_1, ..., c_n) \in (\mathbb{C}^n)^n$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{C}^n$.

On suppose que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], |(c_i)_i| > \sum_{\substack{j \in [\![1,n]\!] \\ j \neq i}} |(c_j)_i|.$$

Montrer que la famille $(c_1, ..., c_n)$ est libre.

Indication p. 31

Exercice 12 (◔★ Polynômes annulateurs de matrices 2×2)
Soit $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.

Montrer que la famille (I_2, A, A^2) est liée.

Indication p. 31

Exercice 13 (◔★ Vers la liberté et algébricité)
On considère $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que α est irrationnel ssi la famille $(1, \alpha)$ est libre.
2. Montrer que α est racine d'un polynôme du second degré à coefficients entiers ssi la famille $(1, \alpha, \alpha^2)$ est liée.
3. Traduire de manière «la famille $\left(\alpha^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre».

Indication p. 31

Manipulation de sevs

Exercice 14 (◔★♣ Caractérisation de la somme)
Soit E un espace vectoriel.

Montrer que $F + G$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) espace vectoriel contenant F et G.

Indication p. 32

Exercice 15 (◔★ Reformulation de résultats connus (parité))
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ev des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On note P l'ensemble des fonctions paires et I l'ensemble des fonctions impaires.

1. Expliquer pourquoi P et I sont des sevs de E.
2. Montrer que P et I sont supplémentaires.
3. Expliciter la symétrie par rapport à P parallèlement à I.

Indication p. 32

Exercice 16 (◔★♣ Reformulation de résultats connus (transposition))
Soit $E = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ l'ev des matrices carrées.

On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

1. Expliquer pourquoi $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sevs de E.
2. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.
3. Expliciter la symétrie par rapport à $S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{R})$.

Indication p. 32

Exercice 17 (◔★♣ Opérations ensemblistes et sev.)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Redémontrer que $F \cap G$ est un sev.
2. Montrer que le complémentaire de F, noté $\overline{F}$, n'est **pas** un sous-espace vectoriel.
3. Montrer que $F \cup G$ est un sev **ssi** $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Indication p. 32 · Solution p. 37

Exercice 18 (◔☆ Reformulation de résultats connus (moyenne nulle))
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

On définit

$$F = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F est un sev de E.
2. Soit $g \in E$ tel que $g \notin F$. On pose $D = \mathrm{Vect}(g)$ Montrer que $F \oplus D = E$.
3. Dans ce cas expliciter la projection sur F parallèlement à D.
4. Soit D un supplémentaire de F. Montrer qu'il existe $g \in E$ tel que $D = \mathrm{Vect}(g)$.

Indication p. 32

Exercice 19 (◔★ Propriétés du Vect)

1. Soit A une partie de E. Montrer que A est un espace vectoriel ssi $\text{Vect}(A) = A$.
2. Soit A une partie de E. Que dire de $\text{Vect}(\text{Vect}(A))$?
3. Soient A, B des parties de E.

   Montrer que si $A \subset B$ alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
4. Soient $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie de parties de E. Montrer que

$$\text{Vect}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \text{Vect}(A_1) + \cdots + \text{Vect}(A_n).$$

5. Soient A, B des parties de E.

   Comparer $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.

Indication p. 32

Exercice 20 (◔☆ On peut enlever un sev strict)
Soit E un espace vectoriel.

Soit F un sev strict de E (c'est à dire F est un sev de E et $F \neq E$).

Montrer que $\text{Vect}(E \setminus F) = E$.

Indication p. 32

Exercice 21 (◑★ Intersection de somme ?)
Soit E un espace vectoriel.

Soient F, G, H des sevs de E.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.
2. Donner un exemple où $(F \cap G) + (F \cap H) \neq F \cap (G + H)$.
3. Montrer que $F \cap (G + (F \cap H)) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

Indication p. 32

Exercice 22 (◑★ Inclusion et somme directe)
Soit E un espace vectoriel.

Soient F_1, F_2, G_1, G_2 des sevs de E.

On suppose
- $F_1 \subset F_2$ et $G_1 \subset G_2$,
- $F_1 \oplus G_1 = F_2 \oplus G_2$.

1. Montrer que $F_1 = F_2$ et $G_1 = G_2$.
2. Le résultat précédent reste t il vrai si la somme n'est plus directe ?

Indication p. 32

Exercice 23 (◑★ Rendre une somme directe)
Soit E un espace vectoriel.

Soient A, B et C trois sevs de E.

On suppose que $(A \cap B) \oplus C = B$.

Montrer que $A + B = A \oplus C$.

Indication p. 32

Exercice 24 (◔★ Relèvement de conditions aux bords I)
On note $E = \mathcal{D}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ l'ev des fonctions de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

On note $F_D = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$, $F_N = \{f \in E \mid f'(0) = 0\}$ et $F_R = \{f \in E \mid f'(0) + f(0) = 0\}$.

1. Expliquer brièvement pourquoi F_N, F_D et F_R sont des sevs de E.
2. Pour chacun de ces sevs, expliciter un supplémentaire.

Indication p. 32

Exercice 25 (◔★ Relèvement de conditions aux bords II)
On note $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ l'ev des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ dérivables une infinité de fois.

On note $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

1. Expliquer brièvement pourquoi F est un sev de E.
2. Déterminer g_0 et g_1 deux vecteurs de E tels que $F \oplus \text{Vect}(g_0, g_1) = E$.

Indication p. 32

Manipulation de familles

Exercice 26 (◔★♣ Liberté et famille échelonnée)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

On considère une famille $\left(c_1, ..., c_p\right) \in (\mathbb{K}^n)^p$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

On dit que cette famille est **échelonnée** ssi la matrice dont les colonnes sont $c_1, ..., c_p$ est échelonnée en colonnes.

Montrer que «une famille échelonnée est libre ssi elle ne contient pas de vecteurs nuls».

Indication p. 33

Exercice 27 (◔★♣ Polynômes de degrés échelonnés)
Soit $E = \mathbb{K}[X]$.

On dit qu'une famille de polynômes $(P_1, P_2, ..., P_n)$ est **échelonnée** (en degré) ssi

$$0 \leq \deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n).$$

Montrer que toute famille de polynômes échelonnée est libre.

Indication p. 33

Exercice 28 (◔★♣ Polynômes de degrés échelonnés, la suite)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $(P_0, ..., P_n)$ une famille de polynômes telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \deg(P_k) = k.$$

Montrer que $(P_0, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \deg(P_k) = k.$$

Montrer que $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Indication p. 33

Exercice 29 (◔★♣ Base de Lagrange I)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ des nombres complexes **deux à deux distincts**.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on considère les polynômes

$$\tilde{L}_k = \prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}} (X - x_j)$$

et

$$L_k = \frac{1}{\tilde{L}_k(x_k)} \tilde{L}_k \in \mathbb{K}_n[X].$$

1. Commenter la bonne définition de la famille $(L_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$. Calculer pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$
$$L_j(x_i).$$
2. Montrer que la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.
3. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$,
$$P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k.$$
4. Que peut-on dire de la famille $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$?

Indication p. 33

Exercice 30 (◑★ Linéarisation et Tchebychev I)
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note

$$\cos^k(\cdot) : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (\cos(x))^k \end{array}.$$

et

$$\cos(k\,\cdot) : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(kx) \end{array}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathrm{Vect}\Big(\big(\cos^k(\cdot)\big)_{0 \leq k \leq n}\Big) = \mathrm{Vect}\big((\cos(k\,\cdot))_{0 \leq k \leq n}\big).$$
2. Montrer que
$$\mathrm{Vect}\Big(\big(\cos^k(\cdot)\big)_{k \in \mathbb{N}}\Big) = \mathrm{Vect}\big((\cos(k\,\cdot))_{k \in \mathbb{N}}\big).$$

Indication p. 33 · Solution p. 37

Exercice 31 (◑★ Liberté de famille d'exponentielles)

1. On considère $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note e_λ le vecteur de E défini par

$$e_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t}. \end{array}$$

Montrer que la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

2. On considère $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on note e_λ le vecteur de E défini par

$$e_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\lambda t}. \end{array}$$

Montrer que la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$ est libre.

Indication p. 33

Exercice 32 (◔★ Suites de références)
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles.

1. Montrer que la famille $\left((q^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{q\in\mathbb{R}^*}$ est libre.

2. Montrer que la famille $\left((n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{\alpha\in\mathbb{R}^*}$ est libre.

3. La famille $\left((n^\alpha q^n)_n\right)_{(q,\alpha)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}}$ est-elle libre ?

Indication p. 33

Exercice 33 (◑☆ Un zeste d'arithmétique)
On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

On considère $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Montrer que la famille $(\ln(p))_{p\in\mathcal{P}}$ est libre.

Indication p. 33

Exercice 34 (◔☆ Pourquoi est-ce un classique ?)
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ev des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Montrer que la famille $(x \mapsto |x - \lambda|)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est libre. Est-elle génératrice ?

Indication p. 33

Exercice 35 (◔★ Amplitude/phase)
Soit $\omega > 0$. On note

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi) \end{matrix} \;\middle|\; (A, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi[\right\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.
2. Proposer une base de $\mathcal{S}$.

Indication p. 33

Applications explicites

Exercice 36 (◔★♠ Homothéties locales)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x.$$

Montrer que u est une homothétie.

Indication p. 34

Exercice 37 (◔★ Un tout petit lemme des noyaux)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda \neq \mu$.

Montrer que

$$\mathrm{Ker}((u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ (u - \mu \mathrm{Id}_E)) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mu \mathrm{Id}_E).$$

Indication p. 34

Exercice 38 (◑★ Lagrange et Taylor)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soient $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ deux à deux distincts.

Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_n[X] &\to \mathbb{C}^{n+1} \\ P &\mapsto \begin{pmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme et expliciter son inverse.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_n[X] &\to \mathbb{C}^{n+1} \\ P &\mapsto \begin{pmatrix} P(\alpha) \\ P'(\alpha) \\ \vdots \\ P^{(n)}(\alpha) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme et expliciter son inverse.

Indication p. 34

Exercice 39 (◑☆ Translation et polynôme)
On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{C}[X] &\to \mathbb{C}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) - P(X). \end{aligned}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par Δ. Déterminer $\mathrm{Ker}\left(\Delta_{\mathbb{C}_n[X]}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(\Delta_{\mathbb{C}_n[X]}\right)$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$.

Indication p. 34

Exercice 40 (◔★ Compositions à droites et à gauche)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que l'ensemble
$$\{v \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)\}$$
est un sev de $\mathcal{L}(E)$ en exhibant une application linéaire dont il est le noyau.
2. Montrer que l'ensemble
$$\{v \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)\}$$
est un sev de $\mathcal{L}(E)$ en exhibant une application linéaire dont il est le noyau.

Indication p. 34

Exercice 41 (◑★ L'identité comme commutant ? Le début de plusieurs exercices.)
Soient u et v deux endomorphismes de E tels que
$$u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}_E .$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$u^k \circ v - v \circ u^k = k u^{k-1}.$$
2. Montrer que la famille $\left(u^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Indication p. 34

Exercice 42 (◑☆ Pas exactement de demi-dérivée)
On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables un nombre quelconque de fois.

On note
$$\begin{aligned} D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$
l'opérateur de dérivation.

Montrer qu'il n'existe **pas** de $\delta \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ tel que $\delta^2 = D$.

Indication p. 34

Le yoga de l'algèbre linéaire

Exercice 43 (◔★♠ Le mouvement de base du yoga)
Soient E, F, G des evs, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(v\circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$ et que $\mathrm{Ker}(v\circ u) \supset \mathrm{Ker}(u)$.

2. Montrer que

$$\mathrm{Im}(v\circ u) = \mathrm{Im}(v) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Ker}(v) = F.$$

3.
$$\mathrm{Ker}(v\circ u) = \mathrm{Ker}(u) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0_F\}.$$

Indication p. 34

Exercice 44 (◔★ Un exemple de yoga)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

2. Montrer que

$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f) = E \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

3. Commenter par cet exercice par rapport à l'exercice 43.

Indication p. 34

Exercice 45 (◔★♠ Manipulation très pratique pour le théorème du rang)
Soient E, F, G des evs, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que

$$\mathrm{Im}(v\circ u) = \mathrm{Im}\left(v_{|\mathrm{Im}(u)}\right).$$

2. Montrer que

$$\mathrm{Ker}\left(v_{|\mathrm{Im}(u)}\right) = \mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(u).$$

Indication p. 34

Exercice 46 (◑★♠ Le yoga de la factorisation)
Soient E et F deux evs, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Soit S un sev de E. On note $\tilde{u} \in \mathcal{L}(S, \mathrm{Im}(u))$ l'application définie par $\begin{array}{c} \tilde{u} : S \to \mathrm{Im}(u) \\ x \mapsto u(x) \end{array}$.

(Ainsi $\tilde{u} = u_{|S}^{|\mathrm{Im}(u)}$)

Montrer que

$$\tilde{u} \text{ est un isomorphisme} \Leftrightarrow S \oplus \mathrm{Ker}(u) = E.$$

Indication p. 34

Exercice 47 (◑★ Les supplémentaires sont isomorphes)
Soit F un sev de E.

Soient S_1 et S_2 deux supplémentaires de F.

Faire un schéma.

Montrer que S_1 et S_2 sont isomorphes (i.e il existe une application linéaire bijective entre S_1 et S_2).

Indication p. 34

Exercice 48 (◔☆ Inclusion des images directes)
Soient E et F deux evs, $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Soient G, H deux sevs de E.

Montrer que

$$u(G) \subset u(H) \Leftrightarrow (G + \mathrm{Ker}(u)) \subset (H + \mathrm{Ker}(u)).$$

Indication p. 35

Projecteurs et symétries

Exercice 49 (◔★ Projections et symétries explicites en dimension 2)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application linéaire canoniquement associée à la matrice
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 & \cos(\theta)\sin(\theta) \\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin(\theta)^2 \end{pmatrix}$$
est un projecteur et déterminer ses espaces caractéristiques. Faire un schéma.
2. Montrer que l'application linéaire canoniquement associée à la matrice
$$\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$
est une symétrie et déterminer ses espaces caractéristiques. Faire un schéma.

Indication p. 35

Exercice 50 (◑★ Calculs avec des projecteurs)
Soient p et q deux projecteurs de E.

1. On suppose que p et q commutent (c'est à dire $p \circ q = q \circ p$). Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, que $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$.
2. On suppose que $p \circ q = 0$. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur, que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

On suppose désormais que $p + q$ est un projecteur.

1. Montrer que $q \circ p = p \circ q = 0$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Solution p. 37

Exercice 51 (◑★ Deux espaces propres et polynôme annulateur de degré 2)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires distincts.

On suppose que

$$u^2 - (\lambda + \mu)u + \lambda\mu \operatorname{Id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

On définit p_λ et p_μ par

$$p_\lambda = \frac{1}{\lambda - \mu}(u - \mu \operatorname{Id}_E)$$

$$p_\mu = \frac{1}{\mu - \lambda}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$$

1. Commenter les cas $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ et $(\lambda, \mu) = (1, -1)$.
2. Montrer que p_λ et p_μ sont des projecteurs.
3. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u^n = \lambda^n p_\lambda + \mu^n p_\mu.$$
4. On suppose dans cette question que λ et μ tous les deux non nuls. Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$.
5. On suppose que u n'est pas une homothétie. Déterminer l'ensemble des $\nu \in \mathbb{K}$ tels que $u - \nu \operatorname{Id}_E$ est inversible.

Indication p. 35

Exercice 52 (◔☆ Définition d'une application linéaire sur des supplémentaires)
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

On note $q = \operatorname{Id}_E - p$ son projecteur associé.

Montrer que

$$F_p = \{u \circ p, u \in \mathcal{L}(E)\}$$

$$F_q = \{u \circ q, u \in \mathcal{L}(E)\}$$

sont deux sevs de $\mathcal{L}(E)$ et que

$$F_p \oplus F_q = \mathcal{L}(E).$$

Indication p. 35

En vrac

Exercice 53 (◔☆ Hyperplans se ressemblent a priori)
Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E.

Montrer que H_1 et H_2 sont isomorphes.

Indication p. 35

Exercice 54 (◔★ Pas grand chose à dire sur les sommes)
Soient E, F des evs, $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Montrer que
$$\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v).$$
2. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(u+v) \supset \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v).$$
3. Pour chaque inclusion précédente donner un exemple où il y a égalité, et un exemple où l'inclusion est stricte.

Indication p. 35

Exercice 55 (◔★ Deux hyperplans admettent un supplémentaire commun)
Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E.

Montrer qu'il existe une droite vectorielle D telle que
$$H_1 \oplus D = H_2 \oplus D = E.$$

Indication p. 35

Exercice 56 (◔★ Cela doit faire la troisième fois que l'exercice est traité)
Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ inversible et $n \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent.

On suppose que u et n commutent. Montrer que $(u+n)$ est inversible.

Indication p. 35

Exercice 57 (◑★ Complexifié)
Soit E un $\mathbb{R}$-ev.

On muni $E \times E$ de la loi produit pour l'addition, et de la loi externe sur le corps $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall (x,y) \in E \times E, z.(x,y) = (\mathrm{Re}(z)x - \mathrm{Im}(z)y, \mathrm{Re}(z)y + \mathrm{Im}(z)x).$$

Montrer que $E \times E$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

Indication p. 35

Exercice 58 (◔☆ Vect et image directe)
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, et $A \subset E$.

Montrer que $u(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(u(A))$.

Indication p. 35

Exercice 59 (◑★ Le Dirac n'est pas une fonction)
Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.

Pour tout $f \in E$ on note

$$\begin{aligned} \varphi_f : E &\to \mathbb{R} \\ g &\mapsto \int_{-1}^{1} g(t)f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

1. Soit $f \in E$. Montrer que $\varphi_f \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$.
2. Montrer que

$$\begin{aligned} \Phi : E &\to \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \varphi_f \end{aligned}$$

est linéaire.
3. On rappelle la propriété suivante: «Si l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle alors la fonction est nulle».

Montrer que Φ est injective.
4. On défini $\delta_0 \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ par

$$\begin{aligned} \delta_0 : E &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f(0) \end{aligned}$$

Montrer que $\delta_0 \notin \mathrm{Im}(\Phi)$.

Indication p. 35

Exercice 60 (◕★ Théorème de Maschke)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{G} \subset \mathrm{GL}(E)$ un sous-groupe fini du groupe des automorphismes de E.

Soit F un sev de E stable par $\mathcal{G}$ c'est à dire tel que

$$\forall x \in F, \forall g \in \mathcal{G}\ g(x) \in F.$$

Montrer que F admet un supplémentaire stable par $\mathcal{G}$ c'est à dire qu'il existe S sev tel que:

$$F \oplus S = E$$

et

$$\forall x \in S, \forall g \in \mathcal{G}, g(x) \in S.$$

Indication p. 35

Exercice 61 (◔★ Spectre d'un projecteur)
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur non trivial (c'est à dire $p \neq 0_E$ et $p \neq \mathrm{Id}_E$).

Déterminer l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $p - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible.

Indication p. 36

Exercice 62 (◑★♠ Un bloc nilpotent fort utile)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $n \geq 1$ c'est à dire tel que $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est libre.

Indication p. 36

Exercice 63 (◑☆ Un exo classique de groupe camouflé)
Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ constitué de symétries (c'est à dire que pour tout $s \in G$, s est une symétrie).

Montrer que G est commutatif.

Indication p. 36

Un zeste de dualité

Exercice 64 (◔★♣ Égalité de deux hyperplans)
Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

Montrer que

$$\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2) \Leftrightarrow \varphi_1, \varphi_2 \text{ sont colinéaires.}$$

Indication p. 36

Exercice 65 (◑★ Intersection d'hyperplans I)
Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^*$.

Soit $\psi \in E^*$.

Montrer que

$$\mathrm{Ker}(\psi) \supset \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2) \quad \Leftrightarrow \quad \psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \varphi_2).$$

Indication p. 36

Exercice 66 (◕★♠ Intersection d'hyperplans II)
Soient $\varphi_1, ..., \varphi_n \in E^*$.

Soit $\psi \in E^*$.

Montrer que

$$\mathrm{Ker}(\psi) \supset \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i) \Leftrightarrow \psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_n).$$

Indication p. 36

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 4 (Sous-espaces vectoriels ? (compréhension))
Les réponses sont (le point essentiel étant le démontrer et de faire un schéma)

1. Oui
2. Non
3. Non
4. Oui
5. Non
6. Non
7. Oui
8. Non
9. Non
10. Non
11. Oui
12. Oui

Indication 2 · Énoncé p. 5 (Sous-espaces vectoriels ? (extension))
Les réponses sont (le point essentiel étant le démontrer et de faire un schéma)

1. Oui
2. Non (c'est un sev mais de $\mathbb{R}^2$)
3. Non
4. Non
5. Oui
6. Non
7. Non
8. Oui
9. Oui
10. Oui
11. Oui
12. Non

Indication 3 · Énoncé p. 6 (Sous-espaces vectoriels ? (fonctions))
Les réponses sont (le point essentiel étant le démontrer et de faire un schéma)

1. Oui
2. Non
3. Non
4. Non
5. Oui
6. Non
7. Non
8. Oui
9. Non
10. Non
11. Oui
12. Non
13. Oui
14. Oui

Indication 4 · Énoncé p. 7 (Sous-espaces vectoriels ? (matrices carrées))
Les réponses sont (le point essentiel étant le démontrer et de faire un schéma)

1. Non
2. Oui
3. Oui
4. Non
5. Oui
6. Oui
7. Oui
8. Oui
9. Oui

Indication 5 · Énoncé p. 9 (Libre, génératrice, base ou rien du tout)
Pivot.

Indication 6 · Énoncé p. 10 (Liberté à paramètre)
Pivot.

Indication 7 · Énoncé p. 10 (Un exemple d'opérations)
C'est juste des transvections.

Indication 8 · Énoncé p. 10 (Vect de vect)
Si F est un sev et $A \subset F$ alors par définition $\text{Vect}(A) \subset F$.

Et le Vect est un sev.

Indication 9 · Énoncé p. 11 (Famille de Vandermonde)
Vandermonde.

Indication 10 · Énoncé p. 11 (D'autres opérations)
Ce sont juste des transvections bien choisies.

Indication 11 · Énoncé p. 11 (Famille à diagonale dominante)
Écrire une relation de liaison et regarder un indice maximisant le module du coefficient.

Indication 12 · Énoncé p. 12 (Polynômes annulateurs de matrices 2×2)
On pourra calculer $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2$.

Indication 13 · Énoncé p. 12 (Vers la liberté et algébricité)

1. Avec $a1 + b\sqrt{\alpha} = 0$ que dire si $b \neq 0$?
2. Écrire la définition. Si le polynôme est de degré < 2, constater que l'on peut augmenter le degré.
3. S'inspirer de la question précédente.

Indication 14 · Énoncé p. 12 (Caractérisation de la somme)
Cours.

Indication 15 · Énoncé p. 12 (Reformulation de résultats connus (parité))
Le plus simple est de commencer par la dernière question !

Indication 16 · Énoncé p. 13 (Reformulation de résultats connus (transposition))
Le plus simple est de commencer par la dernière question.

Indication 17 · Énoncé p. 13 (Opérations ensemblistes et sev.)
Le point essentiel est le dernier.

Pour cela procéder par exemple par contraposée.

Solution p. 37

Indication 18 · Énoncé p. 13 (Reformulation de résultats connus (moyenne nulle))
Le plus simple est de constater qu'il s'agit du cours pour une forme linéaire bien choisie.

Indication 19 · Énoncé p. 14 (Propriétés du Vect)
1. Vect d'un sev, et le vect est un sev.
2. Vect d'un sev.
3. Écrire la définition.
4. Par récurrence (par exemple).
5. Constater que $\subset$ est vraie et trouver un contre-exemple pour l'autre.

Indication 20 · Énoncé p. 14 (On peut enlever un sev strict)
Faire un schéma.

Indication 21 · Énoncé p. 14 (Intersection de somme ?)
Rédaction automatique et schémas.

Indication 22 · Énoncé p. 15 (Inclusion et somme directe)
Rédaction automatique et schéma.

Indication 23 · Énoncé p. 15 (Rendre une somme directe)
Schéma et rédaction automatique.

Indication 24 · Énoncé p. 15 (Relèvement de conditions aux bords I)
Hyperplans.

Indication 25 · Énoncé p. 15 (Relèvement de conditions aux bords II)
Intersection de deux hyperplans.

Indication 26 · Énoncé p. 16 (Liberté et famille échelonnée)
Pivot ou récurrence.

Indication 27 · Énoncé p. 16 (Polynômes de degrés échelonnés)
Pivot ou récurrence.

Indication 28 · Énoncé p. 16 (Polynômes de degrés échelonnés, la suite)
Pivot ou récurrence.

Indication 29 · Énoncé p. 17 (Base de Lagrange I)
Constater que si

$$P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$$

alors on peut récupérer pour tout λ_k en évaluant en λ_k.

Indication 30 · Énoncé p. 17 (Linéarisation et Tchebychev I)

1. Linéariser dans un sens, Tchebychever dans l'autre.
2. Utiliser judicieusement le précédent et le fait que les CLs sont à support fini.

Solution p. 37

Indication 31 · Énoncé p. 18 (Liberté de famille d'exponentielles)

1. Se ramener au cas fini, trier par ordre croissant, puis récurrence descendante ou principe de minimalité.

   Ou bien dériver, évaluer et Vandermonde.
2. Se rendre compte que l'on peut se ramener par la question précédente à des parties réelles égales.

   Ensuite intégrale, Cesàro, etc.

   Ou bien dériver, évaluer et Vandermonde.

Indication 32 · Énoncé p. 18 (Suites de références)
Croissances comparées par exemple.

Indication 33 · Énoncé p. 18 (Un zeste d'arithmétique)
Unicité de la DFP.

Indication 34 · Énoncé p. 18 (Pourquoi est-ce un classique ?)
Regarder les points de discontinuité.

Indication 35 · Énoncé p. 19 (Amplitude/phase)
Amplitude-phase…

Indication 36 · Énoncé p. 19 (Homothéties locales)
Remarquer qu'en notant pour tout x, λ_x qui convient (et est unique si $x \neq 0_E$) il suffit de montrer que pour tous x, y, $\lambda_x = \lambda_y$.

Par exemple faire une disjonction de cas entre libre et liée.

Indication 37 · Énoncé p. 19 (Un tout petit lemme des noyaux)
Par exemple remarquer (interpolation de Lagrange dans un cas ultra-particulier) que

$$\mathrm{Id}_E = \frac{1}{\mu - \lambda}((u - \lambda \mathrm{Id}_E) - (u - \mu \mathrm{Id}_E))$$

ou bien se ramener à un projecteur.

Indication 38 · Énoncé p. 20 (Lagrange et Taylor)
Toujours, par principe de superposition, se ramener à la base canonique à l'arrivée.

Indication 39 · Énoncé p. 20 (Translation et polynôme)
On obtient les constantes dans le noyau (pourquoi ?)

Indication 40 · Énoncé p. 21 (Compositions à droites et à gauche)
Le faire «à la main» ou écrire comme des noyaux/images.

Indication 41 · Énoncé p. 21 (L'identité comme commutant ? Le début de plusieurs exercices.)
Récurrence ou télescopage malin.

Indication 42 · Énoncé p. 21 (Pas exactement de demi-dérivée)
Regarder le noyau de δ et constater que deux cas sont possibles. Puis qu'ils sont tous les deux impossibles.

Indication 43 · Énoncé p. 22 (Le mouvement de base du yoga)
Rédaction automatique.

Indication 44 · Énoncé p. 22 (Un exemple de yoga)
Faire d'aborde l'exercice 43.

Indication 45 · Énoncé p. 22 (Manipulation très pratique pour le théorème du rang)
Écrire les définitions.

Indication 46 · Énoncé p. 23 (Le yoga de la factorisation)
Un sens est la forme géométrique du rang.

L'autre sens est juste reprendre la démonstration de la forme géométrique du théorème du rang.

Indication 47 · Énoncé p. 23 (Les supplémentaires sont isomorphes)
Exhiber un isomorphisme par projecteurs et forme géométrique du théorème du rang.

Indication 48 · Énoncé p. 23 (Inclusion des images directes)
Rédaction automatique.

Indication 49 · Énoncé p. 24 (Projections et symétries explicites en dimension 2)
Faire les schémas d'abord.

Indication 51 · Énoncé p. 25 (Deux espaces propres et polynôme annulateur de degré 2)

1. Projecteur et symétrie.
2. Calcul explicite.
3. Montrer que $p_\lambda \circ p_\mu = p_\mu \circ p_\lambda = 0$.
4. S'inspirer de la question précédente pour proposer un inverse.
5. Idem.

Indication 52 · Énoncé p. 25 (Définition d'une application linéaire sur des supplémentaires)
En deux temps:

- $u = u \circ p + u \circ q$,
- regarder le noyau

Indication 53 · Énoncé p. 26 (Hyperplans se ressemblent a priori)
Commencer par traiter les exercices 47 et 55.

Indication 54 · Énoncé p. 26 (Pas grand chose à dire sur les sommes)
Rédaction automatique.

Indication 55 · Énoncé p. 26 (Deux hyperplans admettent un supplémentaire commun)
Il suffit de trouver ξ n'appartenant à aucun hyperplan.

Indication 56 · Énoncé p. 26 (Cela doit faire la troisième fois que l'exercice est traité)
Cf les autres TDs.

Indication 57 · Énoncé p. 27 (Complexifié)
Rédaction.

Indication 58 · Énoncé p. 27 (Vect et image directe)
Double inclusion.

Indication 59 · Énoncé p. 27 (Le Dirac n'est pas une fonction)
Par l'absurde si c'était le cas, que dire de f si $\delta_0 = \Phi(f)$.

Indication 60 · Énoncé p. 28 (Théorème de Maschke)
Considérer S un supplémentaire quelconque, π le projecteur associé puis regarder le projecteur moyenné

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|} \sum_{g \in \mathcal{G}} g \circ \pi \circ g^{-1}.$$

Indication 61 · Énoncé p. 28 (Spectre d'un projecteur)
On obtient $\{0, 1\}$.

Indication 62 · Énoncé p. 28 (Un bloc nilpotent fort utile)
On choisit x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0_E$.

Ensuite en une relation de liaison et en appliquant u^{n-1} on obtient $\lambda_1 = 0$.

Reste à faire une récurrence forte, ou de manière équivalente un principe de minimalité.

Indication 63 · Énoncé p. 28 (Un exo classique de groupe camouflé)
$s^2 = \mathrm{Id}_E$.

Indication 64 · Énoncé p. 29 (Égalité de deux hyperplans)
Prendre $\xi \notin \mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ pour trouver le scalaire.

Indication 65 · Énoncé p. 29 (Intersection d'hyperplans I)
Constater qu'un sens est immédiat.

Commencer par l'exercice 64.

Faire une disjonction de cas entre liée et libre.

Dans le cas libre prendre par exemple ξ_1 dans l'un et pas dans l'autre et ξ_2 dans l'autre et pas dans l'un pour déterminer les scalaires.

Indication 66 · Énoncé p. 29 (Intersection d'hyperplans II)
Faire une récurrence sur n, le cas $n = 2$ étant l'exercice 65.

Solutions

Solution pour l'exercice 17 · Énoncé p. 13 · Indication p. 32 (Opérations ensemblistes et sev.)
Cf cours.

Solution pour l'exercice 30 · Énoncé p. 17 · Indication p. 33 (Linéarisation et Tchebychev I)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, procédons par double inclusion.

▷ $\boxed{\subset}$ On procède par linéarisation.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(\cos(x))^k &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^k \\ &= \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}e^{i(k-2j)x} \\ &= \dots\end{aligned}$$

Solution pour l'exercice 50 · Énoncé p. 24 (Calculs avec des projecteurs)

1. ▷ On a comme p et q commutent, puis comme il s'agit de projecteurs

$$(p\circ q)^2 = p^2\circ q^2 = p\circ q$$

et donc $\boxed{p\circ q \text{ est un projecteur}}$.

▷ On a $\mathrm{Im}(p\circ q)\subset \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q\circ p)\subset \mathrm{Im}(q)$ c'est à dire (comme $p\circ q = q\circ p$) $\mathrm{Im}(p\circ q)\subset \mathrm{Im}(q)$.

Par conséquent $\boxed{\mathrm{Im}(p\circ q)\subset \mathrm{Im}(p)\cap \mathrm{Im}(q)}$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(p)\cap \mathrm{Im}(q)$. Alors comme q est un projecteur et $y \in \mathrm{Im}(q)$, $q(y) = y$, de même comme p est un projecteur et $y \in \mathrm{Im}(p)$, $p(y) = y$. Donc $(p\circ q)(y) = y$, et $y \in \mathrm{Im}(p\circ q)$.

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(p)\cap \mathrm{Im}(q)\subset \mathrm{Im}(p\circ q)}$

▷ On a $\mathrm{Ker}(q)\subset \mathrm{Ker}(p\circ q)$ et $\mathrm{Ker}(p)\subset \mathrm{Ker}(q\circ p)$ c'est à dire (comme $p\circ q = q\circ p$) $\mathrm{Ker}(p)\subset \mathrm{Ker}(p\circ q)$.

Par conséquent $\boxed{\mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Ker}(q)\subset \mathrm{Ker}(p\circ q)}$.

▷ Soit $x \in \mathrm{Ker}(p\circ q)$. Alors $p(q(x)) = 0$ et donc $q(x) \in \mathrm{Ker}(p)$.

Et donc comme

$$x = (x - q(x)) + q(x)$$

avec $x - q(x) \in \mathrm{Ker}(q)$, on a et $q(x) \in \mathrm{Ker}(p)$, on a $x \in \mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Ker}(q)$.

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(p\circ q)\subset \mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Ker}(q)}$.

2. ▷ On a comme $p^2 = p$, $q^2 = q$, $p\circ q = 0$,

$$\begin{aligned} r^2 &= (p+q-qp)^2 \\ &= p^2 + pq - pqp + qp + q^2 - q^2p - qp^2 - qpq + qpqp \\ &= p + 0 + 0 + qp + q - qp - qp - 0 - 0 \\ &= r \end{aligned}$$

donc $\boxed{r \text{ est un projecteur}}$.

On remarque que par des calculs similaires $r \circ p = p$, $r \circ q = q$, $p \circ r = p$ et $q \circ r = q$.

▷ Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$. Alors $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$ d'où

$$r(x) = p(x) + q(x) - q(p(x)) = 0$$

et $x \in \mathrm{Ker}(r)$.

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(r)}$.

De plus $p \circ r = p$ et donc $\mathrm{Ker}(r) \subset \mathrm{Ker}(p)$, de même $q \circ r = q$ et donc $\mathrm{Ker}(r) \subset \mathrm{Ker}(q)$.

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(r) \subset \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)}$.

▷ Soit $y \in \mathrm{Im}(r)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = r(x)$ (fixons le).

On a alors

$$y = p(x) + q(x) - q(p(x))$$

et donc

$$y = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)} + \underbrace{q(x - p(x))}_{\in \mathrm{Im}(q)}$$

d'où $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(r) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)}$.

De plus $r \circ p = p$ d'où $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(r)$ et de même $r \circ q = q$ et donc $\mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(r)$.

Donc $\boxed{\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subset \mathrm{Im}(r)}$

3. On a, comme $p + q$, p et q sont des projecteurs

$$(p+q) = (p+q)^2 = p^2 + pq + qp + q^2$$

et donc

$$pq + qp = 0.$$

En composant l'inégalité précédente par p à droite on obtient

$$pq + pqp = 0$$

et en composant à gauche par p,

$$pqp + qp = 0$$

par conséquent

$$\begin{cases} pq + qp = 0 \\ pq - qp = 0. \end{cases}$$

et donc $(0 \neq 2)$

$$\boxed{pq = qp = 0}.$$

4. D'après la question précédente comme $p \circ q = 0$, et $p + q = p + q - q \circ p$ on a $\boxed{\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)}$ et $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

De plus par la question 1, comme $p \circ q = q \circ p$ on a $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et comme $p \circ q = 0$, $\mathrm{Im}(p \circ q) = \{0\}$.

Par conséquent $\boxed{\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)}$.