Suites et Limites

Énoncés 2
Calculs explicites 2
Définitions équivalentes 7
Petites manipulations 7
Encadrements théoriques 10
Autour des valeurs d'adhérence 14
Exemples et contre-exemples 16
Densité 18
Vers la topologie 19
Autour de Cesàro 20
Vers les séries 24
Développement asymptotiques de suites non explicites 27
Limsup et liminf 30
Indications 33
Solutions 44

Énoncés

Faire régulièrement les exercices idoines du cahier de calcul.

Calculs explicites

Exercice 1 (◔★ Puissances)
Donner **sans justification**, si elle existe, la limite quand $n \to +\infty$ de chacune des expressions suivantes (sans se préoccuper de la bonne définition des suites)

1. $\frac{4n-2n^2+\sqrt{n}}{8(n+1)^2-5n^3}$
2. $\frac{3n^2+\sqrt{n^5}}{n(n+8)}$
3. $\frac{3n^3-n(n^2+2)}{5n^3+\sqrt{n}-n}$
4. $(-2(n+1)^3+3n^2+1)(n+5)^{-2}$
5. $\frac{\sqrt{3n+\sqrt{n}+2}}{\sqrt{(n+1)^2-n^2}}$
6. $\left(2(n+1)^5-2n^5-10(n-1)^4\right)^{-1}n^3$
7. $\frac{n^3-4n^2+n-n^5}{4n^3+7n-3\sqrt{n^3}}$
8. $(n+1)^4-\left(n^2+3\right)^2+5(n+1)$
9. $\frac{(n+1)^6+1}{1+n^6}$
10. $\frac{(n+2)^2-(n-1)^2-6n}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{n}}}}$

Solution p. 44

Exercice 2 (◔★ Géométrique)
Donner **sans justification**, si elle existe, la limite quand $n \to +\infty$ de chacune des expressions suivantes (sans se préoccuper de la bonne définition des suites)

1. $(3^n+2)(4^{-n}+2^n)$
2. $\frac{2^{3n}-3^{2n}}{5^n-7}$
3. $\frac{(-2)^n+3^{-n}}{4^{-n}+4^n-2(-1)^n}$
4. $\left(\sqrt{2}^n-3^n+5^{-2n}\right)\left(\frac{4}{3^n}+\frac{3}{4^n}\right)$
5. $\left((-3)^n+3^n\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$
6. $\frac{7+5(-4)^n}{2^{2n}-5}\times\frac{(-3)^n-\sqrt{7}^n}{2^n-3^n}$

Solution p. 44

Exercice 3 (◔★ Puissances et géométriques)
Donner **sans justification**, si elle existe, la limite quand $n \to +\infty$ de chacune des expressions suivantes (sans se préoccuper de la bonne définition des suites)

1. $\frac{n-\sqrt{n}+2^{-3n}}{(n+5)^3-n^5}$
2. $\frac{(-1)^n+n}{n}$
3. $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n-(n+1)^3+\frac{n}{2^n+n}\right)\left(\frac{1}{n^2+5}+\frac{(-1)^n}{2^n}\right)$
4. $\frac{\sqrt{n}3^n-3n^5 2^n-\left(n+\sqrt{n}\right)^2}{3n^2-\sqrt{n+7}+\left(\sqrt{3}\right)^n}$
5. $\frac{\ln(n^7)}{n+1}$
6. $\left((3n+2)^3 2^n-(6n-2)^2 2^n\right)\left(\frac{n^5}{3^n}-\frac{3}{n2^n}\right)$

Solution p. 44

Exercice 4 (◑★▫ Algorithme babylonien)
Soit $a>0$. Soit $u_0>0$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = u_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère l'erreur relative

$$\delta_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_{n+1} = \frac{\delta_n^2}{2(1+\delta_n)}.$$

4. Conclure qu'il existe $C>0$ et $q \in]0,1[$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\ \delta_n\ | \leq C q^{2^n}.$$

On parle alors de **convergence quadratique**.

5. ▫ Illustrer numériquement cette convergence dans le cas $a=2$ et $u_0=2$.

Commenter.

Indication p. 33 · Solution p. 44

Exercice 5 (◔★ Quelques sommes quasi-explicites)
Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes

1. Selon $q \in \mathbb{C}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

2. Pour $\alpha > 0$,

$$\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} \lfloor k\alpha \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

3.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Indication p. 33 · Solution p. 50

Exercice 6 (◔★♣ Des limites plus qu'usuelles)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^a.$$

2. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma.$$

Indication p. 33 · Solution p. 52

Exercice 7 (◑☆ Suite quasi-arithmético-géométrique)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$.

On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$u_{n+1} - au_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b.$$

Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{b}{1-a}.$$

Indication p. 33

Exercice 8 (◉☆ Des découpages plus ardus)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer, si elle existe, la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+x}{n}\right)^n.$$

2. Déterminer, si elle existe, la limite quand $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^k.$$

Indication p. 33

Exercice 9 (◑★ Un extrait cesàresque d'oral PC)
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Indication p. 34 · Solution p. 53

Exercice 10 (◑★ Suite récurrente de complexes)
On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} z_0 & = i \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} & = \frac{z_n + |z_n|}{2}. \end{cases}$$

1. Faire un schéma.

2. Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Indication p. 34

Exercice 11 (◑★ Bifurcation selon la condition initiale: cas pratique)
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = x$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2^n}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de x et de $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

2. En déduire qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$.

3. Conclure qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

- ▷ Si $x > \ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
- ▷ Si $x < \ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Indication p. 34 · Solution p. 55

Exercice 12 (◕★ Bifurcation selon la condition initiale: cas théorique)
Soient

- ▷ $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ croissante et tendant vers $+\infty$ en $+\infty$,
- ▷ $g \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}_+)$ décroissante et tendant vers 0 en $+\infty$,
- ▷ $x \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = x$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)g(n).$$

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.

2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Conclure que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

- ▷ Si $x > \ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
- ▷ Si $x < \ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Indication p. 34

Définitions équivalentes

Exercice 13 (◔★ Définitions équivalentes de limites finies)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes:

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell\ | \leq \varepsilon$.
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_n - \ell\ | \leq \varepsilon$.
(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq 3N^2, |u_n - \ell\ | \leq \varepsilon$.
(iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell\ | < \varepsilon$.
(v) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell\ |^2 < \varepsilon$.
(vi) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell\ | \leq \frac{\varepsilon}{12}$.
(vii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell\ | \leq \varepsilon$.

Exercice 14 (◔★ Définitions équivalentes de limites infinies)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes:

(i) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$.
(ii) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, u_n \geq A$.
(iii) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A$.
(iv) $\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$.
(v) $\forall A \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \geq A$.

Exercice 15 (◔★ Définitions équivalentes de densité)
Soit $A \subset \mathbb{R}$.

Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes:

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, A \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\neq \varnothing$.
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, A \cap [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \neq \varnothing$.
(iii) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ t.q $a < b, A \cap]a, b[\neq \varnothing$.
(iv) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ t.q $a < b, A \cap [a, b] \neq \varnothing$.
(v) $\forall r \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*, A \cap]r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}[\neq \varnothing$.

Petites manipulations

Exercice 16 (◔★♣ Quelques applications directes)

1. Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On suppose que les deux suites convergent et on note ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives.

Montrer que **si** $\ell_1 < \ell_2$ **alors** à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que **si** $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$ **alors** $\prod_{k=1}^{n} u_k \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 17 (◔★ Retour à la logique)
Soit $\mathcal{P}(n)$ un prédicat dépendant de $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que

$$(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \mathcal{P}(n)) \Rightarrow (\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \mathcal{P}(n))$$

et traduire en français cet énoncé.

Que dire de la réciproque ?

Exercice 18 (◔★♠ Maximum et convergence)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On suppose qu'il existe $\ell_u, \ell_v \in \overline{\mathbb{R}}$ telles que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_u$$
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_v.$$

Montrer que

$$\max(u_n, v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \max(\ell_u, \ell_v)$$
$$\min(u_n, v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \min(\ell_u, \ell_v).$$

Indication p. 34

Exercice 19 (◔★ Laplacien unidimensionnel discret)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0.$$

Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Indication p. 34 · Solution p. 59

Exercice 20 (◔★ Suites à valeurs entières convergentes)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs **entières**.

Montrer l'équivalence entre
(i) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
(ii) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire (c'est à dire constante à partir d'un certain rang.)

Indication p. 35

Exercice 21 (◑★ Vrac I)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^n$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$.

1. Montrer que **si** $u_n + v_n \to 2$ lorsque $n \to +\infty$ **alors** $u_n \to 1$ et $v_n \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Montrer que **si** $u_n v_n \to 1$ lorsque $n \to +\infty$ **alors** $u_n \to 1$ et $v_n \to 1$ lorsque $n \to +\infty$.

Indication p. 35 · Solution p. 60

Exercice 22 (◔★ Une petite astuce)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Montrer que **si** $\left(\frac{u_n}{u_n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \neq 1$, **alors** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication p. 35 · Solution p. 61

Exercice 23 (◔☆ Rien à voir avec Cesàro)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. Montrer que **si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée **alors** $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Montrer que **si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) **alors** $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. Que dire des réciproques des propriétés précédentes ?

Indication p. 35 · Solution p. 61

Exercice 24 (◑☆ Faire le grand écart nuit à la convergence)
Montrer que toute suite réelle convergente admet un plus petit élément ou admet un plus grand élément.

Indication p. 35

Exercice 25 (◔☆ Adjacence ou explicite)
Soit $t \in]0,1[$.

On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_{n+1}, v_{n+1}) = (tu_n + (1-t)v_n, (1-t)u_n + tv_n).$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer leurs limites.

Indication p. 35 · Solution p. 63

Encadrements théoriques

Exercice 26 (◔★ Protocritère de d'Alembert)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

1. Montrer que pour tout $q > \ell$ la suite $\left(\frac{u_n}{q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. En déduire que pour tout $q > \ell$ on a
$$u_n = o_{n\to+\infty}(q^n).$$
3. Montrer que pour tout $0 \leq q < \ell$ on a
$$q^n = o_{n\to+\infty}(u_n).$$
4. Que peut-on dire si $q = \ell$?

Indication p. 36 · Solution p. 63

Exercice 27 (◔★ Protocritère de Cauchy)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell.$$

1. Montrer que pour tout $q > \ell$ la suite $\left(\frac{u_n}{q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. En déduire que pour tout $q > \ell$ on a
$$u_n = o_{n\to+\infty}(q^n).$$
3. Montrer que pour tout $0 \leq q < \ell$ on a
$$q^n = o_{n\to+\infty}(u_n).$$
4. Que peut-on dire si $q = \ell$?

Indication p. 36 · Solution p. 65

Exercice 28 (◔★ Deux cas particuliers des protocritères)
1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

   On suppose que
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
   Montrer que
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

   On suppose que
   $$(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
   Montrer que
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

   Montrer que
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \Rightarrow (u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Indication p. 36

Exercice 29 (◕★ Encadrement par des suites récurrentes)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

Soit $u_0 > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = u_0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{a_n + u_n}$$

1. On suppose dans cette question que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante**. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. On suppose dans cette question que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée**. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
3. On suppose dans cette question que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente**. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication p. 36 · Solution p. 66

Exercice 30 (◔★♣ Début du critère spécial des séries alternées)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle **décroissante** et **convergeant vers 0**.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k.$$

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication p. 36

Exercice 31 (◑★ Moyennes mixtes)
Soient α et β deux réels strictement positifs.

1. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$(a_0, b_0) = (\alpha, \beta)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, (a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\sqrt{a_n b_n}, \frac{a_n + b_n}{2}\right)$$

1.1. Expliquer brièvement pourquoi ces suites sont bien définies.

1.2. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

1.3. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

1.4. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite.

Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de α et β et parfois notée $\mathrm{agm}(\alpha, \beta)$.

2. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$(a_0, b_0) = (\alpha, \beta)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, (a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)}, \frac{a_n + b_n}{2}\right).$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{\alpha\beta}.$$

3. On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$(a_0, b_0) = (\alpha, \beta)$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, (a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)}, \sqrt{a_n b_n}\right).$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{\mathrm{agm}\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)}.$$

Indication p. 36 · Solution p. 71

Exercice 32 (◑★ Attention aux quantifications)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que

$$\forall A > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \frac{A}{n} + \frac{1}{A}.$$

Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Indication p. 37 · Solution p. 73

Autour des valeurs d'adhérence

Exercice 33 (◔★♣ Construction d'extractrices)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1. Soit $A \subset \mathbb{C}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes
(i) $\exists \varphi$ extractrice , $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \in A$.
(ii) $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \in A$.
(iii) $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in A\}$ est infini.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes
(i) $\exists \varphi$ extractrice , $u_{\varphi(n)} \to \alpha$.
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \alpha| \leq \varepsilon$.
(iii) $\forall \varepsilon > 0, \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - \alpha| \leq \varepsilon\}$ est infini

Indication p. 37

Exercice 34 (◔★ Extractions croisées)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication p. 37 · Solution p. 74

Exercice 35 (◔★♠ Convergence et unicité de la valeur d'adhérence)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite **bornée**.

On suppose qu'il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que:

«pour toute extractrice φ, **si** $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **alors** $u_{\varphi(n)} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.»

Montrer que $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 37

Exercice 36 (◑★ Unicité des valeurs d'adhérences des coordonnées)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.

On suppose que lorsque $n \to +\infty$,

$$a_n + b_n + c_n \to 0$$
$$e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} \to 3$$

et on cherche à montrer que lorsque $n \to +\infty$,

$$a_n \to 0, b_n \to 0, c_n \to 0.$$

1. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.
2. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\left(e^{\alpha} + e^{\beta} + e^{\gamma}\right) - ((1+\alpha) + (1+\beta) + (1+\gamma)) = 0.$$
Montrer que $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$.
3. Soit φ une extraction telle que les suites extraites $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(b_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(c_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Que dire de leurs limites respectives ?
4. Conclure.

Indication p. 37

Exercice 37 (◑☆ Un exemple de valeurs d'adhérences)
Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\cos(\sqrt{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 37

Exercice 38 (◕☆ Adhérence lorsque l'écart tend vers 0)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0.$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle fermé de $\overline{\mathbb{R}}$.

Indication p. 37

Exercice 39 (◑★ Extractions monotones ou «Vue sur la mer»)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On considère l'ensemble

$$V = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall m > n, u_m < u_n\}.$$

1. On suppose que V est infini. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante.
2. Faire un schéma.
3. On suppose V fini. Montrer qu'il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
4. En déduire la propriété suivante:

   «De toute suite réelle on peut extraire une suite monotone».
5. En utilisant la question précédente, proposer une autre démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Indication p. 37 · Solution p. 74

Exemples et contre-exemples

Exercice 40 (◔★ Attention à la continuité)
Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{n\to+\infty} \lfloor 2 - \frac{1}{n} \rfloor$$

Commenter.

Indication p. 38 · Solution p. 76

Exercice 41 (◔★ Étude de contre-exemples)

1. Étudier le caractère borné et la convergence éventuelle de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Étudier le caractère majoré et la limite éventuelle de $(n(1+(-1)^n))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Étudier les variations et la limite éventuelle de $(n+3(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Étudier l'ensemble des valeurs d'adhérence et la convergence éventuelle de $\left(n^{(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 38

Exercice 42 (◕☆ Arithméticogéométrique par puissance de 2)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée.

On suppose qu'il existe $b\in\mathbb{C}$ tel que

$$u_n+\frac{u_{2n}}{2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication p. 38

Exercice 43 (◔★ Forme indéterminée)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\left(\mathbb{R}_+^+\right)^{\mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

Expliciter deux suites strictement positives $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\left(\mathbb{R}_+^+\right)^{\mathbb{N}}$ telles que

$$a_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$$
$$b_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$
$$\forall n\in\mathbb{N},(a_n)^{b_n}=u_n.$$

Commenter.

Indication p. 38

Exercice 44 (◑★ Un peu de construction de contre-exemples)

1. Telle que $u_{n+1}-u_n\to 0$ lorsque $n\to+\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. Telle que $u_{n+1}-u_n\to 0$ lorsque $n\to+\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Indication p. 38

Exercice 45 (◕☆ Un peu de construction de contre-exemples bis)
Existe-t-il une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1}-u_n \to 0$ lorsque $n\to+\infty$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, et $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ?

Indication p. 38

Exercice 46 (◔☆ Un contre-exemple à la réciproque de Cauchy implique d'Alembert);)
Soit $\ell \in \mathbb{R}_+$.

Exhiber une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Indication p. 38

Densité

Exercice 47 (◔★ Densité des dyadiques)
On pose

$$D = \left\{\frac{a}{2^n}, (a,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\right\}.$$

Montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication p. 38

Exercice 48 (◑★ Suite de rationnels convergeant vers un irrationnel)
Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

Montrer que, lorsque $n\to+\infty$, on a $q_n\to+\infty$ et $|p_n|\to+\infty$.

Indication p. 38 · Solution p. 76

Exercice 49 (◔☆ Caractérisation de la densité à l'aide d'ouvert)
La définition de parties ouvertes est celle de l'exercice 51.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:
(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, A \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \varnothing$
(ii) pour toute partie U ouverte non vide de $\mathbb{R}$, $A \cap U \neq \varnothing$.

Indication p. 39

Vers la topologie

Exercice 50 (◑★♠ Complétude de $\mathbb{R}$)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels.

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **une suite de Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

1. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. À l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass montrer que toute suite de Cauchy est convergente.

Indication p. 39

Exercice 51 (◔★ Ouverts)
Une partie U de $\mathbb{R}$ est dite **ouverte** ssi

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U.$$

1. Donner un exemple de partie ouverte. Donner un exemple de partie non-ouverte.
2. Montrer que
   - ▷ Une union quelconque de parties ouvertes est ouverte.
   - ▷ Une intersection finie de parties ouvertes est ouverte.
3. Donner un exemple d'intersections de parties ouvertes qui n'est pas ouverte.

Indication p. 39

Exercice 52 (◕★ Vers Baire)
On utilise dans cet exercice la notion de partie ouverte définie à l'exercice 51.

On cherche à montrer le théorème de Baire: «Une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense».

1. Donner un exemple de partie ouverte dense.
2. Soit U un ouvert dense et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha < \beta$. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$ tel que
$$[a, b] \subset U \cap]\alpha, \beta[.$$

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties ouvertes et denses.

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que
$$[a_0, b_0] \subset U_0 \cap V$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset U_{n+1} \cap]a_n, b_n[.$$
2. Montrer que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \varnothing.$$
3. En déduire que
$$\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) \cap V \neq \varnothing.$$
4. Conclure.

Indication p. 39

Autour de Cesàro

Exercice 53 (◔★♠ Cesàro)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose
$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. Montrer que **si** $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, **alors** $M_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
2. Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

   Montrer que **si** $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$, **alors** $M_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.
3. Que dire de la réciproque ?

Indication p. 39

Exercice 54 (◔★ Cesàro version cut-off)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) u_k.$$

1. Montrer que **si** $\sum_{k=0}^{n} u_k \to 0$ quand $n \to +\infty$, **alors** $M_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.
2. Que dire de la réciproque ?

Indication p. 39

Exercice 55 (◔★ Cesàro infini)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que **si** $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$, **alors** $M_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 39

Exercice 56 (◔☆ Cesàro géométrique)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$G_n = \left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Soit $\ell \in [0, +\infty]$. Montrer que **si** $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$, **alors** $G_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 39

Exercice 57 (◔★ Cesàro pondéré)
Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \rho_k = +\infty.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$M_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \rho_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho_k}.$$

Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que **si** $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$, **alors** $M_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 40

Exercice 58 (◑☆ Cesàro-Stolz)
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante et non majorée.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que **si** $\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} \to \ell$ quand $n \to +\infty$ **alors** $\frac{u_n}{v_n} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 40

Exercice 59 (◑★ Variante binomiale de Cesàro)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$B_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k.$$

Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que **si** $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$, **alors** $B_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Indication p. 40 · Solution p. 78

Exercice 60 (◔★ Cesàro produit)
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$C_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$.

Montrer que **si** lorsque $n \to +\infty$, $a_n \to \alpha$ et $b_n \to \beta$ **alors** lorsque $n \to +\infty$, $C_n \to \alpha\beta$.

Indication p. 40

Exercice 61 (◑★ Cesàro version spé)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ deux suites de termes positifs.

On suppose que

$$u_n = o_{n\to+\infty}(v_n)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = o_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

Indication p. 40

Exercice 62 (◔★♠ Un début de méthode générale)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $\ell > 0$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_{n+1}^{\alpha}} - \frac{1}{u_n^{\alpha}}\right) = \ell.$$

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ tel que

$$u_n \sim \frac{C}{n^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Indication p. 40

Exercice 63 (◔★ Lien entre Cauchy et d'Alembert)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

Soit $\ell \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que **si** $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ quand $n \to +\infty$ **alors** $(u_n)^{\frac{1}{n}} \to \ell$ quand $n \to +\infty$.
2. Commenter le lien entre l'exercice 26 et l'exercice 27.

Indication p. 40

Exercice 64 (◔★ Gendarmes version équivalent)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles.

On suppose qu'ÀPCR

$$g_n \leq u_n \leq d_n$$

et que

$$g_n \sim d_n.$$

Montrer que

$$u_n \sim g_n.$$

Indication p. 40

Exercice 65 (◔★ Toujours de la place)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

On suppose que

$$u_n = o_{n\to+\infty}(v_n).$$

Montrer qu'il existe une $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$u_n = o_{n\to+\infty}(w_n) \quad \text{et} \quad w_n = o_{n\to+\infty}(v_n).$$

Indication p. 40

Vers les séries

Les exercices de cette partie seront revus dans le chapitre sur les séries.

Exercice 66 (◔★♣ Divergence grossière)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Montrer que **si** $u_n \to .\neg 0$ quand $n \to +\infty$ **alors** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Que dire de la réciproque ?

Indication p. 40 · Solution p. 79

Exercice 67 (◔★ Sommes de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Montrer que si $\alpha \leq 1$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. Montrer que si $\alpha > 1$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Indication p. 41

Exercice 68 (◔★ Critères de d'Alembert et de Cauchy)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

- ▷ Montrer que si $\ell \in]1, +\infty]$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- ▷ Montrer que si $\ell \in [0, 1[$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- ▷ Que dire si $\ell = 1$?

2. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell.$$

- ▷ Montrer que si $\ell \in]1, +\infty]$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- ▷ Montrer que si $\ell \in [0, 1[$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- ▷ Que dire si $\ell = 1$?

Indication p. 41

Exercice 69 (◑★ Critère de Raabe-Duhamel)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que si $\alpha < 1$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. Montrer que si $\alpha > 1$ alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Que dire si $\alpha = 1$?

Indication p. 41 · Solution p. 79

Développement asymptotiques de suites non explicites

Exercice 70 (◑★ Sinus itéré)
On considère la suite définie par

$$u_0 \in]0,1]$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1.$$

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente on note ℓ sa limite.
3. Montrer que $\sin(\ell) = \ell$ puis en déduire que $\ell = 0$.
4. Étudier la convergence éventuelle de la suite

$$\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

5. Conclure que

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Indication p. 41 · Solution p. 84

Exercice 71 (◑★ Une méthode classique: cas infini)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}_+^*$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

2. Montrer que

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

3. En déduire que

$$u_n^2 \sim 2n.$$

4. Conclure que

$$u_n \sim \sqrt{2n}.$$

Indication p. 41

Exercice 72 (◑★ En autonomie: suite récurrente)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}.$$

Montrer que

$$u_n \sim \ln(n).$$

Indication p. 41 · Solution p. 85

Exercice 73 (◑★ Intersection avec la tangente)

1. Représenter sur le même graphe les courbes d'équations $y = \tan(x)$ et $y = x$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation
$$\tan(x) = x$$
admet une et unique solution sur l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$. On note x_n cette solution.
3. Montrer que $x_n = n\pi + o_{n\to+\infty}(n)$.
4. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{n\to+\infty}(1)$.
5. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n})$.

Indication p. 42

Exercice 74 (◑☆ En autonomie: suite implicite)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère le polynôme

$$P_n(X) = X^n + X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X^2 + X - 1.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ P_n admet une unique racine positive notée x_n puis que

$$x_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + o_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Indication p. 42

Exercice 75 (◔★ Une perturbation régulière, ou pourquoi les chimistes ont raison)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère l'équation

$$x^3 + \frac{1}{n}x - 1 = 0 \tag{1}$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation (1) admet une et unique solution. On note cette solution $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. On note ℓ la limite. Déterminer un équivalent simple de $(x_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 42

Exercice 76 (◑★ Une perturbation singulière, ou pourquoi il faut écouter les physiciens)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère l'équation

$$\frac{1}{n}x^3 + x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation (1) admet une et unique solution. On note cette solution $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
3. Déterminer un équivalent simple de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 42

Limsup et liminf

Exercice 77 (◑★♠ Limsup et liminf)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$s_n = \sup_{k\geq n}(u_k) \quad \text{et} \quad i_n = \inf_{k\geq n}(u_k).$$

1. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Expliquer pourquoi les deux suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans $\overline{\mathbb{R}}$.

On définit les limites supérieures et inférieures de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} s_n,\\ &= \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n}(u_k),\\ &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n}(u_k)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} i_n,\\ &= \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n}(u_k), = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n}(u_k).\end{aligned}$$

1. Montrer que
$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée ssi $\limsup_{n\to+\infty} u_n < +\infty$.

   Énoncer un résultat similaire pour la lim inf.
3. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

   Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \liminf_{n\to+\infty} u_n = \ell = \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

Indication p. 42

Exercice 78 (◔★ Limsup, liminf et opérations)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites bornées.

On utilise les notations de l'exercice 77 et on note que comme les suites sont bornées les lim sup et lim inf sont des réels.

1. Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}(u_n + v_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n + \limsup_{n\to+\infty} v_n.$$

2. Soit $\lambda > 0$. Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}(\lambda u_n) = \lambda \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

3. Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}(-u_n) = -\liminf_{n\to+\infty} u_n.$$

4. On suppose de plus que les deux suites sont positives.

Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty}(u_n v_n) \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n \cdot \limsup_{n\to+\infty} v_n.$$

5. Énoncer des résultats similaires pour la lim inf.

Indication p. 42

Exercice 79 (◕★ Limsup, liminf et valeurs d'adhérences)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

On note

$$\mathrm{Adh}\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = \Big\{\ell \in \mathbb{R} \ \mid\ \exists \varphi \ \text{ extractrice t.q } \ u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\Big\}.$$

On utilise les notations de l'exercice 77 et on note que comme la suite est bornée les lim sup et lim inf sont des réels.

l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \max\Big(\mathrm{Adh}\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)\Big)$$

2. Énoncer un résultat similaire pour la lim inf.

Indication p. 42

Exercice 80 (◕★ Lemme de Fekete)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle sous-additive c'est à dire telle que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, u_{m+n} \leq u_m + u_n.$$

Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que

$$\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Indication p. 43 · Solution p. 87

Indications

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Algorithme babylonien)
Poser $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ avec le bon ensemble de définition.

Faire ensuite un schéma.

1. Déterminer un intervalle stable.
2. Étude $u_{n+1} = f(u_n)$, par exemple monotonie, minoration et continuité. Au pire regarder la question suivante.
3. Injecter.
4. Une récurrence ou bien passer au log et faire comme pour les suites arithmético-géométriques.
5. Par exemple tracer en échelle log l'erreur en fonction de n.

Solution p. 44

Indication 5 · Énoncé p. 4 (Quelques sommes quasi-explicites)

1. Calcul explicite.
2. Encadrement explicite.
3. Sortir le plus grand terme. Essayer de majorer le reste. Se rendre compte qu'il faut sortir un terme de plus. Réussir.

Solution p. 50

Indication 6 · Énoncé p. 4 (Des limites plus qu'usuelles)

1. On rappelle que $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
2. Télescoper ou s'inspirer du DM7 (Stirling).

Solution p. 52

Indication 7 · Énoncé p. 4 (Suite quasi-arithmético-géométrique)
Se ramener à $b = 0$.

Donner un nom (par exemple δ_n) à l'écart $u_{n+1} - au_n$.

Exprimer ensuite pour tout n, u_n en fonction de n et de $(\delta_k)_{0\leq k\leq n}$.

Découper la somme selon la valeur de k.

Indication 8 · Énoncé p. 5 (Des découpages plus ardus)
Faire d'abord les autres exercices de la feuille de TD (notamment ceux sur Cesàro).

Pour le premier découper à αn pour $\alpha \in]0,1[$.

Pour le second découper à n^β avec $\beta \in]0,1[$.

Indication 9 · Énoncé p. 5 (Un extrait cesàresque d'oral PC)
Par exemple découper pour k petit et k grand.

Solution p. 53

Indication 10 · Énoncé p. 5 (Suite récurrente de complexes)
Travailler en module et argument.

À un moment , remarquer que si $\sin(x) \neq 0$ alors

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$$

peut aider.

Indication 11 · Énoncé p. 6 (Bifurcation selon la condition initiale: cas pratique)

1. Passer au ln et faire une variation de la constante.
2. Pour majorer une somme il suffit de majorer le terme général, par exemple par une autre suite géométrique ou par comparaison avec une intégrale (ou alors calculer explicitement la somme par transformée d'Abel ou dérivation d'une série géométrique).
3. La suite est croissante.
4. Que dire de $e^{2^n y}$ selon le signe de y.

Solution p. 55

Indication 12 · Énoncé p. 6 (Bifurcation selon la condition initiale: cas théorique)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} < u_n$. Appliquer f, multiplier par g.
2. On rappelle qu'une fonction continue sur un segment est bornée.
3. Remarquer qu'une suite décroissante ÀPCR est majorée.
4. Remarquer qu'en notant $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite,$x \mapsto u_n(x)$ est croissante pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Indication 18 · Énoncé p. 8 (Maximum et convergence)
Traiter à part le cas où une des limites est infinie.

Dans le cas où les deux limites sont finies, remarquer pour tous réels x et y on a

$$\max(x,y) + \min(x,y) = x + y$$
$$\max(x,y) - \min(x,y) = |x - y|.$$

Indication 19 · Énoncé p. 8 (Laplacien unidimensionnel discret)
On peut résoudre l'équation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 (ÉRLHO2) ou bien en posant $\Delta : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'opérateur de dérivation discrète se rendre compte que l'équation revient à résoudre $\Delta^2 u = 0$ et que vous savez résoudre $\Delta v = w$ (somme télescopique).

Solution p. 59

Indication 20 · Énoncé p. 8 (Suites à valeurs entières convergentes)
Un sens est immédiat.

Dans l'autre sens, prendre par exemple la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{3}$ et faire un schéma.

Indication 21 · Énoncé p. 9 (Vrac I)

1. Plusieurs façons de procéder
- ▷ Par compacité si ℓ_u est une valeur d'adhérence de u montrer que $\ell_u = 1$. Conclure par l'exercice 35.
- ▷ Par contraposée, montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne cv pas vers 1, alors par la majoration, $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne cv pas vers 1.
- ▷ Remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 1 - u_n \leq (1 - u_n) + (1 - v_n)$ et conclure par encadrement.

2. Mêmes arguments.

Solution p. 60

Indication 22 · Énoncé p. 9 (Une petite astuce)
Les homographies s'inversent.

Solution p. 61

Indication 23 · Énoncé p. 9 (Rien à voir avec Cesàro)

1. Inégalité triangulaire.

2. Constater que (barycentre), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = \frac{n}{n+1}M_n + \frac{1}{n+1}u_{n+1}$ et que si la suite est croissante alors $u_{n+1} \geq M_n$.

3. Pour le premier contre-exemple prendre des termes qui se compensent par exemple $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour le second prendre des termes tq $u_{n+1} \geq M_n$.

Solution p. 61

Indication 24 · Énoncé p. 9 (Faire le grand écart nuit à la convergence)
Si ce n'est pas le cas, montrer par exemple que la suite ne converge pas (car les écarts sont « grands »).

Indication 25 · Énoncé p. 10 (Adjacence ou explicite)
Montrer que les suites sont adjacentes (faire un schéma).

Ou bien obtenir une expression explicite pour les deux suites pour conclure.

Solution p. 63

Indication 26 · Énoncé p. 10 (Protocritère de d'Alembert)

1. Montrer que le quotient de deux termes successifs tend vers une limite strictement inférieure à 1 donc est inférieure à 1 ÀPCR.
2. Remarquer que si $\ell < q$ alors $\ell < \frac{q+\ell}{2} < q$.
3. Faire de même.
4. Que dire de $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ selon la valeur de α ?

Solution p. 63

Indication 27 · Énoncé p. 11 (Protocritère de Cauchy)
Traiter tout d'abord l'exercice 26.

Traiter ensuite l'exercice 68.

Solution p. 65

Indication 28 · Énoncé p. 11 (Deux cas particuliers des protocritères)

1. Cf exercice 26.
2. Cf exercice 27.
3. Cf exercice 63.

Indication 29 · Énoncé p. 12 (Encadrement par des suites récurrentes)

1. Étude de suite $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Remarquer que $a \mapsto \sqrt{a+x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Encadrer ÀPCR par les suites vérifiant $u^+_{n+1} = \sqrt{(a+\varepsilon)+u^+_n}$ et $u^-_{n+1} = \sqrt{(a-\varepsilon)+u^-_n}$.

Solution p. 66

Indication 30 · Énoncé p. 12 (Début du critère spécial des séries alternées)

1. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$, $S_{2(n+1)} - S_{2n}$, $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1}$ et $S_{2n+1} - S_{2n}$.
2. Suites adjacentes. Remarquer que l'on dispose de plus d'un contrôle du reste.

Indication 31 · Énoncé p. 13 (Moyennes mixtes)

1. Montrer par récurrence et par IAG, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.
2. Remarquer que le produit $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constant. Et que par exemple on a les mêmes variations que dans la première question.
3. Que dire de $\left(\left(\frac{1}{a_n}, \frac{1}{b_n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

Solution p. 71

Indication 32 · Énoncé p. 14 (Attention aux quantifications)
Attention à ne pas écrire $\lim u_n$ avant de montrer la convergence !

Remarquer au brouillon que pour tout A, pour tout $\varepsilon > 0$ ÀPCR, $|u_n| \leq \frac{1}{A} + \varepsilon$.

Au propre, fixer $\varepsilon > 0$ puis $A = \frac{2}{\varepsilon}$ et utiliser la définition.

Solution p. 73

Indication 33 · Énoncé p. 14 (Construction d'extractrices)
Cf cours.

Indication 34 · Énoncé p. 14 (Extractions croisées)
À l'aide de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ montrer que les termes pairs et impairs convergent vers la même limite.

Méditer sur une généralisation.

Solution p. 74

Indication 35 · Énoncé p. 15 (Convergence et unicité de la valeur d'adhérence)
Sinon exhiber une suite extraite bornée et «loin de ℓ». Par BW en extraire une suite convergeant, mais ne convergeant pas vers ℓ.

Indication 36 · Énoncé p. 15 (Unicité des valeurs d'adhérences des coordonnées)

1. À l'aide des exponentielles majorer les suites.

   À l'aide de la somme en déduire des minorations.
2. Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls. Et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.
3. C'est $(0, 0, 0)$.
4. Faire une triple extraction pour avoir une extraction commune. Utiliser l'exercice 35.

Indication 37 · Énoncé p. 15 (Un exemple de valeurs d'adhérences)
Montrer qu'il s'agit de $[-1, 1]$.

Regarder aussi l'exercice 38.

Indication 38 · Énoncé p. 16 (Adhérence lorsque l'écart tend vers 0)
L'ensemble des valeurs d'adhérence est toujours fermé.

Pour montrer qu'il s'agit d'un intervalle, prendre a et b des valeurs d'adhérence, $c \in [a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $u_n \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$.

Indication 39 · Énoncé p. 16 (Extractions monotones ou «Vue sur la mer»)
Faire d'abord l'exercice 33.

Solution p. 74

Indication 40 · Énoncé p. 16 (Attention à la continuité)
A priori si f n'est pas continue on ne peut pas «passer à la limite à l'intérieur de la fonction».

Solution p. 76

Indication 41 · Énoncé p. 17 (Étude de contre-exemples)
Faire des schémas. On obtient:

1. Borné non convergente.
2. Non majoré, sans limite.
3. Non croissante, de limite $+\infty$.
4. Unique valeur d'adhérence $\{0\}$, non convergente.

Indication 42 · Énoncé p. 17 (Arithméticogéométrique par puissance de 2)
Que dire de ℓ si $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$?

Indication 43 · Énoncé p. 17 (Forme indéterminée)
Quitte à passer au ln il suffit de trouver $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{\ln(u_n)}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par exemple que dire de $(\ln(u_n))^2 + n^2$?

La forme indéterminée «$1^{+\infty}$» peut donc correspondre à n'importe quel comportement de suite.

Indication 44 · Énoncé p. 17 (Un peu de construction de contre-exemples)

1. Harmonique.
2. Faire une analogie avec les fonctions. Par exemple que dire de $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.

Indication 45 · Énoncé p. 18 (Un peu de construction de contre-exemples bis)
Oui. Par exemple changer de signe sur des plages de grandes longueurs.

Alternativement définir la suite en fonction de ses sommes de Cesàro précédente (cf astuce de Riemann).

Indication 46 · Énoncé p. 18 (Un contre-exemple à la réciproque de Cauchy implique d'Alembert);)
Par exemple, pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ que dire de $\left(a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication 47 · Énoncé p. 18 (Densité des dyadiques)
Même preuve que pour les décimaux.

Indication 48 · Énoncé p. 18 (Suite de rationnels convergeant vers un irrationnel)
Supposer que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$ (pour cela nier formellement).

En extraire une sous-suite bornée, et donc en extraire une sous-suite convergente donc constante (car entière). Borné et extraire pour le numérateur ensuite.

Solution p. 76

Indication 49 · Énoncé p. 19 (Caractérisation de la densité à l'aide d'ouvert)
Remarquer que dans un sens les $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ sont ouverts, et que dans l'autre si $B \subset C$ et alors $A \cap B \subset A \cap C$.

Indication 50 · Énoncé p. 19 (Complétude de $\mathbb{R}$)
1. Utiliser la définition de la limite.
2. Montrer que toute suite de Cauchy est bornée. Extraire une suite convergente. Montrer que la suite initiale converge vers la même limite.

Indication 51 · Énoncé p. 19 (Ouverts)
1. Un intervalle ouvert (le démontrer). Un intervalle fermé (le démontrer).
2. Pour l'union être inclus dans l'un suffit. Pour l'intersection finie, un minimum de réels strictement positifs est strictement positif.
3. Que dire de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}[$.

Indication 52 · Énoncé p. 20 (Vers Baire)
1. Par exemple faire une réunion d'intervalles ouverts centrés sur une partie dense.
2. Prendre un point dans l'intersection (existe par densité) et un petit intervalle ouvert autour (existe par caractère ouvert). Dans un intervalle ouvert on peut placer un intervalle fermé.
3. Construire par récurrence à l'aide de la question précédente.
4. Suites adjacentes version segments emboîtés.
5. Constater que l'intersection précédente est contenue dans les deux.
6. RAS

Indication 53 · Énoncé p. 20 (Cesàro)
Découper en deux temps (cf cours, à savoir refaire).

Indication 54 · Énoncé p. 21 (Cesàro version cut-off)
Dans le cas positif faire des schémas de rectangles et de triangles, puis se ramener au cas réel, puis au cas complexe.

Alternativement remarquer qu'il s'agit exactement de Cesàro (en commençant à 0).

Indication 55 · Énoncé p. 21 (Cesàro infini)
Adapter la preuve de Cesàro.

Indication 56 · Énoncé p. 21 (Cesàro géométrique)
Passer au ln. Utiliser Cesàro.

Indication 57 · Énoncé p. 22 (Cesàro pondéré)
Adapter la preuve de Cesàro.

Indication 58 · Énoncé p. 22 (Cesàro-Stolz)
Remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n - u_0}{v_n - v_0} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \frac{u_{k+1} - u_k}{v_{k+1} - v_k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)}.$$

Indication 59 · Énoncé p. 22 (Variante binomiale de Cesàro)
Essayer d'adapter la preuve de Cesàro.

Se rendre compte de la dépendance en n des coefficients binomiaux.

Mais à k fixé $\binom{n}{k}$ est un polynôme en n.

Solution p. 78

Indication 60 · Énoncé p. 23 (Cesàro produit)
Adapter la preuve de Cesàro, en coupant à des deux côtés (faire un schéma).

Indication 61 · Énoncé p. 23 (Cesàro version spé)
Adapter la preuve de Cesàro.

Voir aussi le cours de l'année prochaine et le « théorème de sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs, cas divergent ».

Indication 62 · Énoncé p. 23 (Un début de méthode générale)
Utiliser Cesàro.

Indication 63 · Énoncé p. 24 (Lien entre Cauchy et d'Alembert)
Cesàro sur le ln.

Indication 64 · Énoncé p. 24 (Gendarmes version équivalent)
Attention à ne pas écrire des bêtises à cause des signes.

Faire comme la preuve du théorème des gendarmes.

Indication 65 · Énoncé p. 24 (Toujours de la place)
Moyenne géométrique mais en prenant un module.

Indication 66 · Énoncé p. 25 (Divergence grossière)
Par contraposée, en exprimant u_n en fonction de S_n et S_{n-1}.

La réciproque est fausse, trouver un contre-exemple.

Solution p. 79

Indication 67 · Énoncé p. 25 (Sommes de Riemann)
Comparer avec une intégrale.

Indication 68 · Énoncé p. 26 (Critères de d'Alembert et de Cauchy)
Faire tout d'abord les exercices 26 et 27.

Indication 69 · Énoncé p. 26 (Critère de Raabe-Duhamel)
Passer au ln.

De même que pour 68, prendre un β entre 1 et α et comparer à un calcul explicite (série harmonique).

Solution p. 79

Indication 70 · Énoncé p. 27 (Sinus itéré)
Faire un schéma et utiliser le plan d'étude général.

Pour la fin on pourra utiliser $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}(x^3)$ et Cesàro.

Solution p. 84

Indication 71 · Énoncé p. 27 (Une méthode classique: cas infini)
1. Étude de suite $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Calcul explicite.
3. Cesàro.
4. Racine.

Indication 72 · Énoncé p. 28 (En autonomie: suite récurrente)
Des étapes possibles sont:

1. Montrer que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
2. Montrer que
$$e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
3. En déduire que
$$u_n \sim \ln(n).$$

Solution p. 85

Indication 73 · Énoncé p. 28 (Intersection avec la tangente)
Schéma et TVI pour commencer.

Réécrire la relation implicite comme $x_n - n\pi = \arctan(x_n)$.

Relier de manière générale étudier $\arctan(x)$ revient à étudier $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Indication 74 · Énoncé p. 28 (En autonomie: suite implicite)
Suite géométrique.

Indication 75 · Énoncé p. 29 (Une perturbation régulière, ou pourquoi les chimistes ont raison)
Toujours commencer par un TVI.

Ensuite utiliser le tableau de variation pour obtenir une monotonie et majoration.

Ou se contenter du caractère borné et utiliser l'unicité de la valeur d'adhérence.

Indication 76 · Énoncé p. 29 (Une perturbation singulière, ou pourquoi il faut écouter les physiciens)
À l'aide d'une remise à l'échelle bien choisie se ramener à un exercice proche de 75

Indication 77 · Énoncé p. 30 (Limsup et liminf)

1. Inclusion.
2. Théorème de limite monotone.
3. Commencer par montrer que pour p, q deux entiers

$$\inf_{k\geq q}(u_k) \geq \sup_{k\geq p}(u_k)$$

puis en déduire en deux temps que

$$\sup_{q\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq q}(u_k) \leq \inf_{p\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq p}(u_k).$$

4. Dans un sens majorer la suite des sup.

Dans l'autre sens, on rappelle que si une suite est majorée ÀPCR alors elle est majorée.

5. Dans un sens par exemple repasser aux ε.

Dans l'autre sens utiliser par exemple un encadrement.

Alternativement utiliser l'exercice 35.

Indication 78 · Énoncé p. 31 (Limsup, liminf et opérations)
Faire d'abord le passage au sup puis le passage à la limite (ou à l'inf).

Indication 79 · Énoncé p. 31 (Limsup, liminf et valeurs d'adhérences)
Il faut donc:

- montrer les valeurs d'adhérences sont inférieures ou égales à la lim sup;
- la lim sup est une valeur d'adhérence.

Indication 80 · Énoncé p. 32 (Lemme de Fekete)
Commencer par montrer que pour tout k,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n}{n} \leq \frac{\lfloor n /\!\!/ k \rfloor}{n} u_k + \frac{1}{n} \max_{0 \leq r \leq k-1} (u_r).$$

Solution p. 87

Solutions

Solution pour l'exercice 1 · Énoncé p. 2 (Puissances)
Les réponses sont

1. 0
2. $+\infty$
3. $\frac{2}{5}$
4. $-\infty$
5. $\sqrt{\frac{3}{2}}$
6. $\frac{1}{60}$
7. $-\infty$
8. $+\infty$
9. 1
10. 0

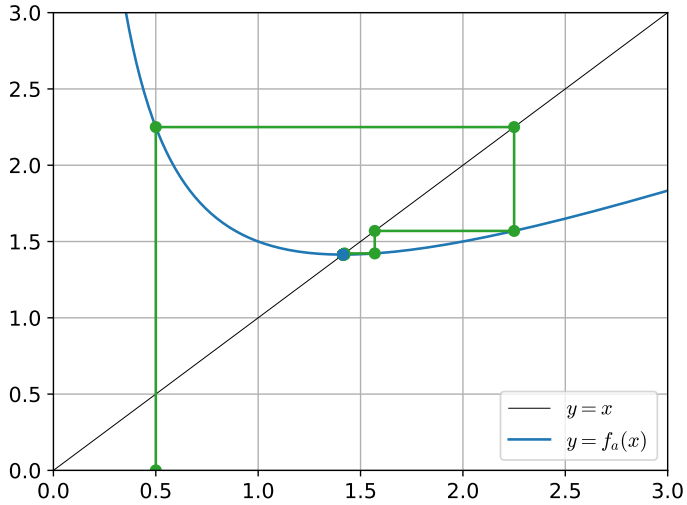
Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 2 (Géométrique)
Les réponses sont

1. 0
2. $-\infty$
3. 0
4. 4
5. pas de limite
6. -5

Solution pour l'exercice 3 · Énoncé p. 3 (Puissances et géométriques)
Les réponses sont

1. 0
2. 1
3. $-\infty$
4. $+\infty$
5. 0
6. $-\infty$

Solution pour l'exercice 4 · Énoncé p. 3 · Indication p. 33 (Algorithme babylonien)
On obtient le schéma suivant:



1. Soit $f_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right). \end{aligned}$$

Alors f_a est bien définie et $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f_a.

La relation de l'énoncé se réécrit donc

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= f_a(u_n). \end{aligned}$$

Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, par récurrence immédiate on obtient que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction f_a est dérivable et

$$\forall x > 0, f_a(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right).$$

Comme de plus $f_a(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$ on en déduit le tableau de variations

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f_{a'}(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f_a	‖ $+\infty$	↘	$\sqrt{a}$	↗	$+\infty$

par conséquent, pour tout $n \geq 1$, comme $u_n = f_a(u_{n-1})$ on a $u_n \geq \sqrt{a}$.

Or en posant $g_a : x \mapsto f_a(x) - x$ on observe que g_a est dérivable de dérivée $g_a' : x \mapsto \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{a}{x^2}\right)$ d'où le tableau de variations

x	0		$\sqrt{a}$	$+\infty$
$g_{a'}(x)$	$-$		$-$	
g_a	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$

d'où

$$\forall x \geq \sqrt{a}, f_a(x) \leq x.$$

On en déduit donc

$$\forall n \geq 1, \boxed{\sqrt{a} \leq u_{n+1} \leq u_n}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante ÀPCR et minorée, par conséquent, par théorème de convergence monotone, elle converge.

Notons ℓ sa limite.

Par PLIL on a $\ell \geq \sqrt{a}$ (et en particulier > 0).

Alors par passage à la limite dans la relation de récurrence on obtient (comme f_a est continue, ou bien par opérations sur les limites)

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$$

c'est à dire $\ell^2 = a$. Comme $\ell > 0$ on en déduit $\ell = \sqrt{a}$.

D'où finalement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{a}}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a:

- ▷ par définition de la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\delta_{n+1} = \frac{u_{n+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$,
- ▷ par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$,
- ▷ par définition de la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n = \sqrt{a}(1 + \delta_n)$.

Il suffit ensuite de faire le calcul:

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right)-\sqrt{a}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}(1+\delta_n)+\frac{a}{\sqrt{a}(1+\delta_n)}-2\sqrt{a}\right)\\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\left((1+\delta_n)+\frac{1}{1+\delta_n}-2\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{(1+\delta_n)^2+1-2(1+\delta_n)}{1+\delta_n}\\ &= \frac{1}{2}\frac{(\delta_n)^2}{1+\delta_n}.\end{aligned}$$

D'où on a bien

$$\forall n\in\mathbb{N},\boxed{\delta_{n+1}=\frac{\delta_n^2}{2(1+\delta_n)}}$$

4. On a

- ▹ si $u_0=\sqrt{a}$ alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\delta_n=0$ et on a bien l'inégalité demandée quel que soit (C,q).
- ▹ sinon, $\delta_0\neq 0$ et par récurrence immédiate, pour tout $n\geq 1$, $\delta_n>0$. On considère ce cas désormais.

D'où

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, 0<\delta_{n+1}\leq\frac{\delta_n^2}{2}$$

par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \ln(\delta_{n+1})\leq 2\ln(\delta_n)-\ln(2)$$

On obtient donc une inégalité arithmético-géométrique.

Comme pour les suites arithmético-géométriques, il y a au moins deux façons de procéder.

- ▹ **Par «théorème de structure»**

  On cherche une constante $\gamma\in\mathbb{R}$ telle que

  $$\forall n\in\mathbb{N}^*, \gamma=2\gamma-\ln(2).$$

  On observe que

  $$\gamma=\ln(2)$$

  convient.

  On en déduit alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(\delta_{n+1}) - \ln(2) \leq 2(\ln(\delta_n) - \ln(2)).$$

Par conséquent comme $2 > 0$, on a par récurrence immédiate, pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq N$,

$$\ln(\delta_n) - \ln(2) \leq 2^{n-N}(\ln(\delta_N) - \ln(2))$$

et donc (croissance de exp)

$$\delta_n \leq 2\left(\frac{\delta_N}{2}\right)^{2^{n-N}}.$$

▷ **Par «variation de la constante»**

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{\ln(\delta_{n+1})}{2^{n+1}} \leq \frac{\ln(\delta_n)}{2^n} - \frac{\ln(2)}{2^{n+1}}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq N$. Par télescopage on a donc

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(\delta_n)}{2^n} - \frac{\ln(\delta_N)}{2^N} &= \sum_{k=N}^{n-1}\left(\frac{\ln(\delta_{k+1})}{2^{k+1}} - \frac{\ln(\delta_k)}{2^k}\right) \\
&\leq -\sum_{k=N}^{n-1}\frac{\ln(2)}{2^{k+1}} \\
&= -\frac{\ln(2)}{2}\frac{1}{2^N}\frac{1-\frac{1}{2^{n-M}}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{\ln(2)}{2^N} + \frac{\ln(2)}{2^n}
\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\frac{\ln(\delta_n)}{2^n} - \frac{\ln(2)}{2^n} \leq \frac{\ln(\delta_N)}{2^N} - \frac{\ln(2)}{2^N}$$

i.e

$$\ln(\delta_n) \leq 2\ln\left(\frac{\delta_N}{2}\right)2^{n-N}$$

et donc (par croissance de exp)

$$\delta_n \leq \left(\frac{\delta_N}{2}\right)^{2^{n-N}}$$

Quel que soit la preuve on obtient finalement que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $n \geq N$,

$$\boxed{0 \leq \delta_n \leq 2\left(\frac{\delta_N}{2}\right)^{2^{n-N}}}.$$

Or $\delta_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\delta_N < 2$.

Posons

$$q = \left(\frac{\delta_N}{2}\right)^{2^{-N}} < 1.$$

On a alors

$$\forall n \geq N, 0 \leq \delta_n \leq 2^{-N} q^{2^n}$$

i.e la suite $\left(\delta_n q^{-2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ÀPCR, donc (en prenant le maximum des rangs 0 à $N-1$ et une borne de $\left(\delta_n q^{-2^n}\right)_{n\geq N}$) elle est donc bornée.

Fixons $C > 0$ une telle borne.

On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mid \delta_n \mid \leq C q^{2^n}}.$$

5. On peut par exemple calculer quelques itérations et afficher l'erreur en fonction de n.

```python
import numpy as np

# Les paramètres
a = 2
u0 = 2

N = 8  # nombre d'itérations
#  Pour mesurer l'écart on peut afficher l'erreur
u = u0
for n in range(N):
    print(f"Pour n = {n}, u_n = {u:.18f} et δ_n = {np.abs(u - np.sqrt(a)):.18f}")
    u = 1 / 2 * (u + a / u)

```

On obtient

```
Pour n = 0, u_n = 2.000000000000000000 et d_n = 0.585786437626904855
Pour n = 1, u_n = 1.500000000000000000 et d_n = 0.085786437626904855
Pour n = 2, u_n = 1.416666666666666519 et d_n = 0.002453104293571373
Pour n = 3, u_n = 1.414215686274509665 et d_n = 0.000002123901414519
Pour n = 4, u_n = 1.414213562374689870 et d_n = 0.000000000001594724
Pour n = 5, u_n = 1.414213562373094923 et d_n = 0.000000000000000222
Pour n = 6, u_n = 1.414213562373094923 et d_n = 0.000000000000000222
Pour n = 7, u_n = 1.414213562373094923 et d_n = 0.000000000000000222
```

ou bien on peut tracer l'erreur en échelle logarithmique:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Les paramètres
a = 2
u0 = 2

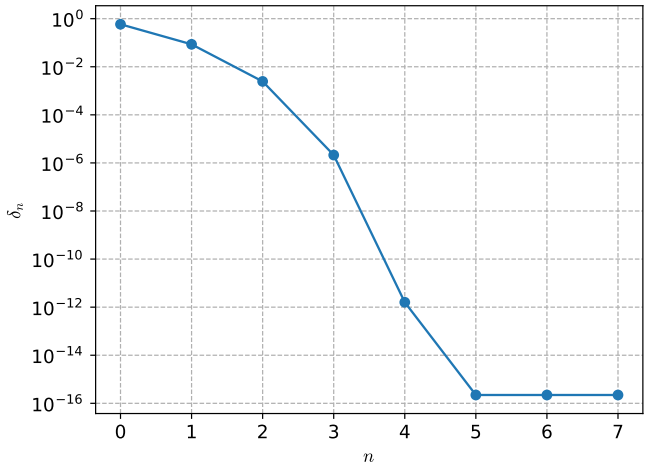
N = 8  # nombre d'itérations
#  Pour mesurer tracer en échelle logarithmique l'erreur effectuée
u = u0
liste_u = []
liste_n = []
liste_delta = []
```

```python
for n in range(N):
    liste_n.append(n)
    liste_u.append(u)
    liste_delta.append(np.abs(u - np.sqrt(2)))
    u = 1 / 2 * (u + a / u)


plt.plot(liste_n, liste_delta, "o-")
plt.title("Erreur en fonction du nombre d'itérations")
plt.yscale("log")  # Échelle logarithmique
plt.xlabel("$n$")
plt.ylabel("$\\delta_n$")
plt.grid(True, which="both", ls="--")
plt.show()

```

et on obtient



Dans les deux cas on observe qualitativement cette vitesse quadratique: à chaque itération le nombre de décimales correctes double, ou sur le graphe une erreur logarithmique qui ressemble à une parabole.

On observe que vu la vitesse de convergence, dès la 5-ème itération on atteint la précision machine.

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 4 · Indication p. 33 (Quelques sommes quasi-explicites)

1. On procède par disjonction de cas:

▷ Si $q = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} 1^k = n + 1$$

et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} 1^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

▷ Si $q \neq 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$= \frac{1}{1-q}(1-q^{n+1}).$$

On précise ensuite selon le caractère réel ou non de q et selon $|q|$.

▷ Si $|q|<1$ alors $|q|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}}.$$

▷ Si $q \in]1,+\infty[$ alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et comme $\frac{1}{1-q}<0$ on en déduit par opérations,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

▷ Sinon $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite (détailler si nécessaire) et donc

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'a pas de limite}}.$$

2. On a pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$k\alpha - 1 < \lfloor k\alpha \rfloor \leq k\alpha$$

et donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, par somme et comme $\frac{1}{n^2}\geq 0$,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(k\alpha-1) < \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\lfloor k\alpha\rfloor \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(k\alpha)$$

c'est à dire, par somme usuelle, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\alpha - n\right) < \sum_{k=0}^{n}\lfloor k\alpha\rfloor \leq \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Par conséquent (mise en facteur du terme prédominant), pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n^2} < \sum_{k=0}^{n}\lfloor k\alpha\rfloor \leq \frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Et donc comme les termes de gauche et de droite tendent vers $\frac{1}{2}$ par opérations, par théorème des gendarmes,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\lfloor k\alpha\rfloor \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{2}.$$

3. On a pour tout $n\geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2}k! + \frac{1}{n} + 1$$

De plus on a pour tout $n\geq 2$,

$$0 \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2}k! \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2}(n-2)! = \frac{n(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n-1}$$

et donc par encadrement,

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par opérations on a donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

Solution pour l'exercice 6 · Énoncé p. 4 · Indication p. 33 (Des limites plus qu'usuelles)

1. On a pour tout n à partir d'un certain rang,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right).\\ &= \exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)-\ln(1)}{\frac{a}{n}}\times a\right).\end{aligned}$$

De plus comme $\frac{a}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a (dérivabilité de ln en 0)

$$\frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)-\ln(1)}{\frac{a}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln'(1) = \frac{1}{1}.$$

Par continuité de exp on en conclut que

$$\boxed{\left(1+\tfrac{a}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(a)}.$$

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

On a alors, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}u_n - u_{n-1} &= (H_n - H_{n-1}) - (\ln(n) - \ln(n-1))\\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

De plus pour tout $x > -1$ on sait que

$$\ln(1+x) \leq x$$

et par conséquent pour tout $n \geq 2$, $u_n - u_{n-1} \leq 0$ d'où la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>décroissante</u>.

Remarque: l'argument suivant sera simplifié une fois vu le cours sur les DLs et encore plus une fois vu l'argument sur les séries (cf cours idoines). Ici on fait la preuve sans les outils susmentionnés. On pourrait aussi faire une comparaison avec des intégrales (cf DM sur Stirling).

De plus pour $x > -1$ on a

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= -\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)\\ &= -\ln\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\\ &\geq \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

et par conséquent pour tout $n \geq 2$,

$$u_n - u_{n-1} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}.$$

Et donc pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}u_n &= u_0 + \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1})\\ &\geq u_0 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{1}\\ &\geq 0\end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

Par le théorème de convergence monotone, elle est donc convergente, c'est à dire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma}.$$

Solution pour l'exercice 9 · Énoncé p. 5 · Indication p. 34 (Un extrait cesàresque d'oral PC)
On constate tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} &\geq \sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{2^n}\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}2^{-j}\\ &= \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\\ &= 2 - \frac{2}{2^n}.\end{aligned}$$

Il reste donc à majorer la somme par un terme tendant vers 2.

Intuition: Le calcul précédent montre que cela revient à majorer le terme $\frac{n}{k}$, la somme des puissances de 2 tendant déjà vers 2. Or pour k petit le terme $\frac{n}{k}$ est grand les termes $\frac{2^k}{2^n}$ sont très petits tandis que pour k grand le terme $\frac{n}{k}$ est proche du 1 souhaité.

On découpe donc la somme en deux.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in [\![1, n]\!]$.

On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n}.$$

Et par conséquent on a la majoration

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{n}{1}\frac{2^k}{2^n} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{n}{m+1}\frac{2^k}{2^n} \\ &= \frac{n}{2^n}\frac{2^{m+1}-1}{2-1} + \frac{n}{m+1}\frac{1-\frac{1}{2}^{n-m}}{1-\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{n}{2^n}2^{m+1} + 2 \times \frac{n}{m+1}.\end{aligned}$$

On rédige ensuite une preuve « à la Cesàro ».

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons

$$m_n = \left\lfloor \frac{n}{1+\frac{\varepsilon}{4}} \right\rfloor \leq n.$$

Alors

$$m_n + 1 \geq \frac{n}{1+\frac{\varepsilon}{4}}$$

et donc

$$\frac{n}{m_n+1} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} \leq n2^{m_n-n+1} + 2\Big(1+\frac{\varepsilon}{4}\Big).$$

Or

$$m_n - n \leq \frac{n}{1+\frac{\varepsilon}{4}} - n = -\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}n$$

et donc comme $-\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon} < 0$, par croissance comparée,

$$n2^{m_n-n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il existe donc $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$n2^{m_n-n+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} \leq 2 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 2 + \varepsilon.$$

De plus on a déjà vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} \geq 2 - \frac{2}{2^n}$$

et par conséquent, comme $\frac{2}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $\tilde{N} \geq N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq \tilde{N}$,

$$2 - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} \leq 2 + \varepsilon.$$

On a donc bien montré que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}\frac{2^k}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2}.$$

Remarque: on aurait pu simplifier la preuve en procédant comme dans la première étape de la preuve de Cesàro en se ramenant à 0, c'est à dire ici en se ramenant à montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k} - 1\right)\frac{2^k}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Solution pour l'exercice 11 · Énoncé p. 6 · Indication p. 34 (Bifurcation selon la condition initiale: cas pratique)

1. On constate tout d'abord que comme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N} &\to \mathbb{R}_+^* \times \\ (x, n) &\mapsto \left(\frac{x^2}{2^n}, n+1\right) \end{aligned}$$

est bien définie et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.

Ensuite pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\ln(u_{n+1}) = 2\ln(u_n) - n\ln(2).$$

Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\ln(u_{n+1})}{2^{n+1}} = \frac{\ln(u_n)}{2^n} - \frac{n\ln(2)}{2^{n+1}}$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\ln(u_n)}{2^n} = \frac{\ln(u_0)}{2^0} + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\ln(u_{k+1})}{2^{k+1}} - \frac{\ln(u_k)}{2^k}\right)$$
$$= \ln(x) - \ln(2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{2^{k+1}}.$$

On en déduit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n = \exp\left(2^n\left(\ln(x) - \tfrac{\ln(2)}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\tfrac{k}{2^k}\right)\right)}.$$

2. Il y a plusieurs façons de procéder:

▷ **Majoration du terme général**

Par croissances comparées on a

$$\frac{\left(\frac{k}{2^k}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^k} = k\left(\frac{3}{4}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$\frac{k}{2^k} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

et donc pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{2^k} &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{k}{2^k} + \sum_{k=N}^{n-1}\frac{k}{2^k}\\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1}\frac{k}{2^k} + \sum_{k=N}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{k}{2^k} + \left(\frac{2}{3}\right)^N\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-N}}{1-\frac{2}{3}}\\ &\leq \sum_{k=0}^{N-1}\frac{k}{2^k} + \left(\frac{2}{3}\right)^N\frac{1}{1-\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

et donc $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}}$.

▷ **Calcul explicite**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On peut en fait calculer explicitement S_n par exemple en étudiant une fonction génératrice ou bien par transformation d'Abel.

▷ **Par fonction génératrice**

Posons

$$\begin{aligned}f_n : [t]]-1,1[&\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{n-1}x^k\end{aligned}$$

On a alors

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} k x^{k-1}.$$

Mais de plus

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$$

et donc

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \quad f_n'(x) &= \frac{(1-x)(-nx^{n-1}) - (1-x^n)(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

On a donc montré que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k x^{k-1} = \frac{1 - nx^{n-1} + (n-1)x^n}{(1-x)^2}.$$

En particulier pour $x = \frac{1}{2}$ on obtient

$$\begin{aligned}S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n-1}{2^n}}{\frac{1}{4}} \\ &= 2\left(1 - \frac{n+1}{2^n}\right) \\ &= 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

▷ **Par transformation d'Abel**

On rappelle qu'étant données deux suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}v_{n+1} - u_n v_n = u_{n+1}(v_{n+1} - v_n) + v_n(u_{n+1} - u_n)$$

et que par conséquent (transformation d'Abel)

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k(u_{k+1} - u_k) = u_n v_n - u_0 v_0 - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}(v_{k+1} - v_k).$$

Par conséquent étant données deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k,$$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(B_{k+1}-B_k) = a_n B_n - a_0 B_0 - \sum_{k=0}^{n-1} B_{k+1}(a_{k+1}-a_k).$$

Ici avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n$ et $b_n = \frac{1}{2^n}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} k2^{-k} &= n\sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} - 0 - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{k} 2^{-j}\right)((k+1)-k) \\
&= n(1-2^{-n}) \times 2 - \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-2^{-(k+1)}\right) \times 2 \\
&= 2n(1-2^{-n}) - 2(n-(1-2^{-n})) \\
&= 2n - \frac{2n}{2^n} - 2n + 2 - \frac{2}{2^n} \\
&= 2 - \frac{2n+2}{2^n} \\
&= 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Dans tous les cas on a bien

$$S_n = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$$

et donc en particulier

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

En particulier $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}}$.

3. Remarque: si on avait décidé à la question précédente de calculer explicitement S_n on obtient directement que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_{n+1} - S_n = \frac{n}{2^n} \geq 0$$

et donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

De plus par la question précédente elle est majorée.

Par le théorème de convergence monotone on en déduit qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L}$.

4. On a donc

$$\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} L.$$

Posons

$$\ell = \exp\left(\frac{\ln(2)}{2} L\right) = 2^{\frac{L}{2}}.$$

On a donc

▷ Si $x < \ell$ alors

$$\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(x) - \ln(\ell) < 0$$

et donc par opérations

$$2^n \left(\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

et donc

$$u_n = \exp\left(2^n \left(\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \right) \right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

▷ De même si $x > \ell$ alors

$$\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(x) - \ln(\ell) > 0$$

et donc par opérations

$$2^n \left(\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

d'où

$$u_n = \exp\left(2^n \left(\ln(x) - \frac{\ln(2)}{2} S_n \right) \right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On a donc bien montré que

$$\boxed{\begin{cases} \text{si } x<\ell \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \text{si } x>\ell \text{ alors } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty. \end{cases}}.$$

Solution pour l'exercice 19 · Énoncé p. 8 · Indication p. 34 (Laplacien unidimensionnel discret)
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_{n+1} - u_n) - (u_n - u_{n-1}) = 0$$

et donc la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \alpha$ on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_0 + n\alpha$$

et donc on a bien une suite affine

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n = u_0 + n(u_1 - u_0)}.$$

Solution pour l'exercice 21 · Énoncé p. 9 · Indication p. 35 (Vrac I)

1. Supposons que $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

▷ **Par encadrement**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n, v_n \in [0,1]$ on a

$$0 \leq (1-u_n) \leq (1-u_n) + (1-v_n).$$

De plus $(1-u_n) + (1-v_n) = 2 - (u_n + v_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc par encadrement, on obtient

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

et de même

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

▷ **Par compacité**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Soit ℓ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et φ une extractrice telle que $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Comme la suite $\left(v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi bornée, par Bolzano-Weierstrass il existe une extractrice ψ et $\tilde{\ell}$ tels que $v_{\varphi\circ\psi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\ell}$.

On a donc

$$u_{\varphi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$
$$v_{\varphi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\ell}.$$

et donc

$$u_{\varphi(\psi(n))} + v_{\varphi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \tilde{\ell}.$$

Par conséquent

$$\ell + \tilde{\ell} = 2.$$

De plus par Passage à la limite dans les Inégalités Larges on a aussi

$$\ell \in [0,1]$$
$$\tilde{\ell} \in [0,1].$$

et par conséquent $((1-\ell) + \left(1-\tilde{\ell}\right) = 0)$

$$\ell = 1$$
$$\tilde{\ell} = 1.$$

On a donc montré que $\ell = 1$.

Ainsi toute valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à 1.

Par unicité de la valeur d'adhérence d'une suite bornée on en déduit

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

Et de même

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

2. On pourrait de même procéder par encadrement ou par compacité.

Voici la preuve par encadrement.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n, v_n \in [0,1]$ on a

$$u_n v_n \leq u_n \leq 1,$$

et donc par théorème des gendarmes, comme $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on obtient

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

De même, on a aussi

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

Solution pour l'exercice 22 · Énoncé p. 9 · Indication p. 35 (Une petite astuce)
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}.$$

Par conséquent comme $v_n \to \ell \neq 1$ lorsque $n \to +\infty$, on en déduit par opérations que

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{1-\ell}}.$$

Solution pour l'exercice 23 · Énoncé p. 9 · Indication p. 35 (Rien à voir avec Cesàro)

1. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq C$.

Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par inégalité triangulaire,

$$|M_n| = |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} C = C,$$

et donc la suite $\boxed{(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}}$.

2. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a (associativité du barycentre)

$$M_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k + u_{n+1}\right)$$
$$= \frac{n}{n+1}M_n + \frac{1}{n+1}u_{n+1}.$$

Or comme la suite est croissante on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_k \leq u_{n+1}$ et donc

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_{n+1} = u_{n+1}.$$

D'où on obtient finalement

$$M_{n+1} \geq \frac{n}{n+1}M_n + \frac{1}{n+1}M_n = M_n$$

Donc la suite $\boxed{(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

3. ▷ Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée mais pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a (exercice classique de calcul de somme)

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} -\frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|M_n| \leq 1.$$

D'où la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

▷ On commence par constater que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_{n+1} = \frac{n}{n+1}M_n + \frac{1}{n+1}u_{n+1} \geq M_n$$

c'est à dire ssi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} \geq M_n.$$

Il reste donc à trouver une suite suffisamment «croissante» pour que u_{n+1} soit toujours supérieur à la moyenne des précédents termes mais non croissante.

Posons par exemple pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + (-1)^n$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1-n) + ((-1)^{n+1} - (-1)^n) = 1 - 2(-1)^n = \begin{cases} -1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(k+(-1)^k\big) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} + (-1)\times\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}\right) \\ &= \frac{n+1}{2} - \frac{1-(-1)^n}{2n}. \end{aligned}$$

en particulier, comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (ou tout du moins ÀPCR)

$$\frac{n+1}{2} \geq \frac{(-1)^n - 1}{2n},$$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} \geq M_n.$$

Donc la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Solution pour l'exercice 25 · Énoncé p. 10 · Indication p. 35 (Adjacence ou explicite)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$$

et donc (suite constante),

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n = u_0 + v_0.$$

De même pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - v_{n+1} = (2t-1)(u_n - v_n)$$

et donc (suite géométrique),

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n = (2t-1)^n(u_0 - v_0).$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = \frac{u_0+v_0}{2} + \frac{(2t-1)^n}{2}(u_0 - v_0) \\ v_n = \frac{u_0+v_0}{2} - \frac{(2t-1)^n}{2}(u_0 - v_0). \end{cases}$$

et en particulier

$$\boxed{\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{u_0+v_0}{2}, \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{u_0+v_0}{2}. \end{array}}$$

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 10 · Indication p. 36 (Protocritère de d'Alembert)

1. Soit $q > \ell$.

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$.

Par récurrence on a pour tout $n \geq N$, $0 < u_n \leq u_N q^{n-N}$.

▷ **Initialisation**

Pour $n = N$ on a bien $0 < u_N \leq u_N q^{N-N}$.

▷ **Hérédité**

Soit $n \geq N$. Supposons que $0 < u_n \leq u_N q^{n-N}$.

Comme $n+1 \geq N$ on a $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ et donc par produit d'inégalités positives,

$$0 < u_{n+1} \leq q u_N q^{n-N} = u_N q^{(n+1)-N}.$$

▷ **Conclusion**

Par récurrence on a bien pour tout $n \geq N$, $0 < u_n \leq u_N q^{n-N}$.

D'où

$$\forall n \geq N, \frac{u_n}{q^n} \leq \frac{u_N}{q^N}.$$

Remarque: on aurait aussi pu procéder par produit télescopique.

La suite $\left(\frac{u_n}{q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée à partir du rang N et donc (car toute suite bornée ÀPCR est bornée) $\boxed{\text{bornée}}$.

2. Soit $q > \ell$.

Posons $\rho = \frac{q+\ell}{2}$. Alors [**Faire un schéma**]

$$\ell < \rho < q.$$

Par la question précédente, la suite $\left(\frac{u_n}{\rho^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{u_n}{q^n}\right| = \underbrace{\left|\frac{u_n}{\rho^n}\right|}_{\text{borné}} \underbrace{\left(\frac{q}{\rho}\right)^n}_{\substack{\longrightarrow \\ n\to+\infty \\ \text{car } 0<\frac{q}{\rho}<1}} 0$$

et donc, comme produit d'une suite bornée et d'une suite tendant vers 0, la suite $\left(\frac{u_n}{q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, c'est à dire

$$\boxed{u_n = o_{n\to+\infty}(q^n)}.$$

3. Si $\ell = 0$ ou $q = 0$ il n'y a rien à faire. Supposons $\ell > q > 0$.

On peut faire de même en posant $\rho = \frac{q+\ell}{2}$ vérifiant $q < \rho < \ell$.

et en constatant que pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$|\frac{u_n}{q^n}| = |\frac{u_n}{\rho^n}| \left(\frac{q}{\rho}\right)^n.$$

Alternativement on observe que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{u_{n+1}}\right)}{\left(\frac{1}{u_n}\right)} = \frac{1}{\ell}$$

et comme

$$\frac{1}{\ell} < \frac{1}{q}$$

par la question précédente on a

$$\left(\frac{1}{u_n}\right)\left(\frac{1}{q}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

c'est à dire

$$\frac{q^n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où

$$\boxed{q^n = o_{n\to+\infty}(u_n)}.$$

4. On ne peut $\boxed{\text{rien dire}}$.

À titre d'exemple, Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la condition avec $\ell = 1$, mais si $\alpha = 0$ tend vers 1, si $\alpha > 0$ tend vers $+\infty$ et si $\alpha < 0$ tend vers 0.

Ou encore la suite $\left(2 + \cos(\pi\sqrt{n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la condition avec $\ell = 1$ (à démontrer) mais n'admet pas de limite (à démontrer).

Solution pour l'exercice 27 · Énoncé p. 11 · Indication p. 36 (Protocritère de Cauchy)

1. Soit $q > \ell$.

Comme $(u_n)^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, et $\ell < q$, en particulier il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $0 \leq (u_n)^{\frac{1}{n}} < q$.

Soit $n \geq N$, par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ on a donc $u_n < q^n$ c'est à dire $\frac{u_n}{q^n} < 1$.

Par conséquent la suite $\left(\frac{u_n}{q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée à partir du rang N et donc $\boxed{\text{bornée}}$.

2. Soit $q > \ell$.

Posons

$$Q = \frac{q+\ell}{2}$$

on a alors

$$\ell < Q < q.$$

Par la question précédente, la suite $\left(\frac{u_n}{Q^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Et (suite géométrique), $\left(\frac{Q}{q}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme produit d'une suite tendant vers 0 et d'une suite bornée on a donc

$$\frac{u_n}{q^n} = \underbrace{\frac{u_n}{Q^n}}_{\text{bornée}} \underbrace{\left(\frac{Q}{q}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

c'est à dire

$$\boxed{u_n = o_{n\to+\infty}(q^n)}.$$

3. On pourrait considérer u_n^{-1} pour se ramener au cas précédent si $\ell \neq 0$.

On va plutôt refaire exactement la même preuve.

Soit $0 \leq q < \ell$.

Posons $Q = \frac{q+\ell}{2}$. Alors $q < Q < \ell$.

Comme $Q < \ell$, à partir d'un certain rang $Q < (u_n)^{\frac{1}{n}}$ et donc par croissance des fonctions puissances, à partir d'un certain rang $Q^n < u_n$ d'où $\left(\frac{Q^n}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée à partir d'un certain rang et donc bornée.

Puis on a $\left(\frac{q}{Q}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc, comme produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0,

$$\frac{q^n}{u_n} = \underbrace{\left(\frac{q}{Q}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underbrace{\frac{Q^n}{u_n}}_{\text{bornée}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

c'est à dire

$$\boxed{q^n = o_{n\to+\infty}(u_n)}.$$

4. On ne peut $\boxed{\text{rien dire}}$.

Par exemple pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a par croissance comparée

$$(n^\alpha)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\alpha \ln(n)}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

mais selon la valeur de α le résultat la limite est $+\infty$ ou 0 et donc on ne peut pas comparer à 1^n indépendamment de α.

Solution pour l'exercice 29 · Énoncé p. 12 · Indication p. 36 (Encadrement par des suites récurrentes)

1. Notons $a \in \mathbb{R}_+$ la valeur constante de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Posons

$$\begin{aligned} f_a : [0,+\infty[&\to [0,+\infty[\\ x &\mapsto \sqrt{a+x} \end{aligned}$$

on constate tout d'abord que comme $[0,+\infty[$ est stable par f_a, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

Effectuons l'étude de fonction de $g_a : x \mapsto f_a(x) - x$ (on aurait aussi pu étudier f_a).

Constatons tout d'abord que pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a

$$g_a(x) = 0$$

ssi

$$a + x = x^2$$

ssi

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

ssi (comme $x > 0$)

$$x = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$

Notons dans la suite

$$\ell(a) = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$

On a g_a est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$g_a'(x) = \frac{1}{2\sqrt{a+x}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a+x}}$$

ou encore, pour tout $x > 0$,

$$g_a'(x) = \frac{1^2 - 4(a+x)}{2\sqrt{a+x}(1+2\sqrt{a+x})}$$

et donc pour tout $x > 0$, $g_a'(x)$ est du signe de $1^2 - 4(a+x) = -4\big(x + \big(a - \frac{1}{4}\big)\big)$.

En constatant finalement que pour tout $a \geq 0$,

$$\frac{1}{4} - a \leq \ell(a)$$

car par exemple

$$\frac{1}{4} - a \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \leq \ell(a)$$

on en déduit le tableau de variations de g_a:

- Si $a < \frac{1}{4}$,

x	0		$\frac{1}{4}-a$		$\ell(a)$		$+\infty$
$g_{a'}(x)$	$+$		0	$-$		$-$	
g_a	$\sqrt{a}$	↗		↘	0	↘	$-\infty$

- et si $a \geq \frac{1}{4}$,

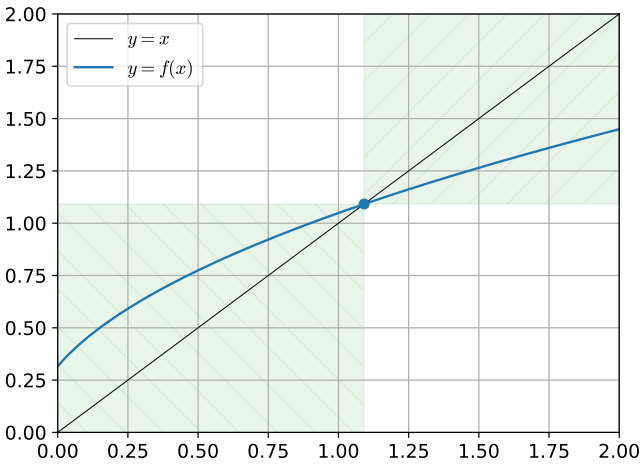
x	0		$\ell(a)$		$+\infty$
$g_{a'}(x)$	$-$			$-$	
g_a	$\sqrt{a}$	↘	0	↘	$-\infty$

Par conséquent on a, dans tous les cas (lecture de tableau de variation), pour tout $x \in [0, +\infty[$

$$\text{si } \; x \geq \ell(a) \; \text{ alors } \; \ell(a) \leq f(x) \leq x$$
$$\text{si } \; x \leq \ell(a) \; \text{ alors } \; x \leq f(x) \leq \ell(a).$$

Par conséquent

- si $u_0 \leq \ell(a)$, par stabilité de $[0, \ell(a)]$ par f_a et l'étude précédente, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée par $\ell(a)$,
- si $u_0 \geq \ell(a)$, par stabilité de $[\ell(a), +\infty[$ par f_a et l'étude précédente, on a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée par $\ell(a)$.



Dans tous les cas, par le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

De plus, par continuité et passage à la limite de la relation de récurrence,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell(a).$$

2. On commence par remarquer que la bonne définition est issue de la stabilité $[0,+\infty[\times\mathbb{N}$ par

$$\begin{aligned}[0,+\infty[\times\mathbb{N} &\to [0,+\infty[\times\mathbb{N}\\ (x,n) &\mapsto \left(\sqrt{a_n+x}, n+1\right)\end{aligned}$$

Soit $A\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n \leq A.$$

Considérons la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned} m_0 &= u_0\\ \forall n\in\mathbb{N}, m_{n+1} &= \sqrt{A+m_n}.\end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n \leq m_n.$$

▷ **Initialisation**

On a $m_0 = u_0$ donc $u_0 \leq m_0$.

▷ **Hérédité**

Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq m_n$.

Alors comme $a_n \leq A$ on a

$$u_n + a_n \leq m_n + A$$

et donc par croissance de la fonction racine

$$\sqrt{u_n+a_n} \leq \sqrt{m_n+A}$$

c'est à dire

$$u_{n+1} \leq m_{n+1}.$$

▷ **Conclusion**

Par récurrence on a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq m_n.$$

Or on a vu à la question 1 que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (vers $\ell(A)$) et donc en particulier est majorée.

Par conséquent $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}}$.

(On peut même montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, ÀPCR, $u_n \leq m_n \leq \ell(A) + \varepsilon$, cf question 3)

3. On s'inspire des calculs de la question 2.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$a_n \leq a + \varepsilon.$$

Posons $(v_n)_{n\geq N}$ la suite définie par

$$v_N = u_N$$
$$\forall n \geq N, v_{n+1} = \sqrt{(a+\varepsilon) + v_n}.$$

Alors par exactement les mêmes calculs qu'à la question 2, on a

$$\forall n \geq N, u_n \leq v_n.$$

Mais par la question 1, on a aussi

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell(a+\varepsilon)$$

et donc en particulier il existe $\tilde{N} \geq N$ tel que

$$\forall n \geq \tilde{N}, u_n \leq v_n \leq \ell(a+\varepsilon) + \varepsilon.$$

On a donc montré

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ ÀPCR } u_n \leq \ell(a+\varepsilon) + \varepsilon.$$

Par exactement le même raisonnement (à rédiger si nécessaire) on a

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ ÀPCR } u_n \geq \ell(a-\varepsilon) - \varepsilon.$$

On a (expression explicite)

$$\ell(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \ell(a)$$

et par conséquent pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\ell(a+\delta) \leq \ell(a) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc quitte à diminuer $\varepsilon > 0$, on a donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \text{ÀPCR}\ \ \ell(a) - \varepsilon \leq u_n \leq \ell(a) + \varepsilon.$$

C'est à dire

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell(a)}.$$

Solution pour l'exercice 31 · Énoncé p. 13 · Indication p. 36 (Moyennes mixtes)

1.

1.1. L'ensemble $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ est stable par

$$\begin{aligned}]0,+\infty[\times]0,+\infty[&\to]0,+\infty[\times]0,+\infty[\\ (x,y) &\mapsto \left(\sqrt{xy}, \frac{x+y}{2}\right)\end{aligned}$$

d'où la bonne définition, et de plus le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.

1.2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

▷ **Initialisation**

Pour $n = 1$ on a bien $a_1 = \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2} = b_1$ par inégalité arithmético-géométrique (on peut constater que $\left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right)^2 \geq 0$ pour la redémontrer si nécessaire).

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.

Comme $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}b_{n+1}}$ et $b_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$ on a

▷ La moyenne géométrique est une moyenne et $a_{n+1} \leq b_{n+1}$ donc.

$$a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} \geq \sqrt{a_{n+1}a_{n+1}} = a_{n+1}.$$

▷ La moyenne arithmétique est une moyenne et $b_{n+1} \geq a_{n+1}$ donc

$$b_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \leq \frac{b_{n+1}+b_{n+1}}{2} = b_{n+1}.$$

▷ Par inégalité arithmético-géométrique on a

$$a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} = b_{n+2}.$$

Et donc

$$a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}.$$

▷ **Conclusion**

Par récurrence on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \boxed{a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n}.$$

Et donc, en particulier $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$ et $\boxed{(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ décroissante}}$.

1.3. On a montré à la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

En particulier

- ▷ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par b_1. Par théorème de convergence monotone elle est donc convergente.
- ▷ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par a_1. Par théorème de convergence monotone elle est donc convergente.

1.4. Notons ℓ_a et ℓ_b les limites respectives de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par passage à la limite (opérations sur les limites et continuité de la racine) dans la relation de récurrence on a

$$\ell_a = \sqrt{\ell_a \ell_b}$$
$$\ell_b = \frac{\ell_a + \ell_b}{2}$$

d'où (par exemple à l'aide d'une des deux équations) $\ell_a = \ell_b$.

Donc les deux suites ont la même limite.

2. Par le même raisonnement que précédemment (il suffit de remplacer le mot «géométrique» par «harmonique», à rédiger) on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$$

et de même (c'est exactement le même argument), les suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Notons ℓ_a et ℓ_b leurs limites.

De même

$$\ell_a = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ell_a} + \frac{1}{\ell_b}\right)}$$
$$\ell_b = \frac{\ell_a + \ell_b}{2}$$

d'où $\ell_a = \ell_b$.

La différence consiste ici à déterminer la valeur commune de ℓ_a et ℓ_b.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a alors

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)} \times \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{2(a_n b_n)}{(a_n + b_n)} \frac{a_n + b_n}{2} = a_n b_n$$

la suite $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n b_n = a_0 b_0 = \alpha\beta$$

par passage à la limite (opérations)

$$\ell_a \ell_b = \alpha\beta$$

et comme $\ell_a = \ell_b$ on a bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{\alpha\beta}}.$$

3. Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{a_n} \\ v_n = \frac{1}{b_n}. \end{cases}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)} = \frac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}{2} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{a_n b_n}} = \sqrt{\frac{1}{a_n}\frac{1}{b_n}} = \sqrt{u_n v_n}$$

Comme de plus $u_0 = \frac{1}{\alpha}$ et $v_0 = \frac{1}{\beta}$, on en déduit par la première question que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} = \operatorname{agm}\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right).$$

Et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{\operatorname{agm}\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)}}.$$

Solution pour l'exercice 32 · Énoncé p. 14 · Indication p. 37 (Attention aux quantifications)
Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $A = \frac{2}{\varepsilon} > 0$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n| \leq \frac{A}{n} + \frac{1}{A} = \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus $\frac{A}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\frac{A}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'où pour tout $n \geq N$,

$$|u_n| \leq \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a donc bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon$$

c'est à dire que

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

Variante: soit $n \in \mathbb{N}$, avec $A = \sqrt{n}$ on a

$$|u_n| \leq \frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Or $\frac{2}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc par encadrement,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Solution pour l'exercice 34 · Énoncé p. 14 · Indication p. 37 (Extractions croisées)
Notons ℓ_0 la limite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, ℓ_1 la limite de $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et ℓ_2 la limite de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$.

On a, en tant que suite extraite d'une suite convergente,

$$u_{6n} = u_{2(3n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_0$$

et

$$u_{6n} = u_{3(2n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2.$$

Donc (unicité de la limite) $\ell_0 = \ell_2$.

De même,

$$u_{6n+3} = u_{2(3n+1)+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$$

et

$$u_{6n+3} = u_{3(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2.$$

Donc (unicité de la limite) $\ell_1 = \ell_2$.

Par conséquent

$$\ell_0 = \ell_1$$

les termes pairs et impairs convergeant vers la même limite on en déduit que

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}.$$

Solution pour l'exercice 39 · Énoncé p. 16 · Indication p. 37 (Extractions monotones ou «Vue sur la mer»)

1. Construisons par récurrence une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varpi(n) \in V$.

Remarque: de manière générale on est en train de redémontrer que pour toute partie infinie de $\mathbb{N}$ on peut construire une extractrice prenant ses valeurs dans cette partie.

▷ **Initialisation**

Comme V est infini, en particulier il est non vide.

On pose $\varphi(0)$ un élément quelconque de V, par exemple $\varphi(0) = \min(V)$.

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\varphi(n)$ construite.

Comme V est infini et $\varphi(n)$ est un entier, on a $V \setminus [\![0, \varphi(n)]\!]$ est infini et donc en particulier non vide.

On pose alors $\varphi(n+1)$ un élément de cet ensemble, par exemple $\varphi(n+1) = \min(V \setminus [\![0, \varphi(n)]\!])$.

▷ **Conclusion**

On a bien construit par récurrence $\varphi : \mathbb{N}to\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \in V$ et $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.

Montrons désormais que la suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a

$$\varphi(n) \in V$$

c'est à dire

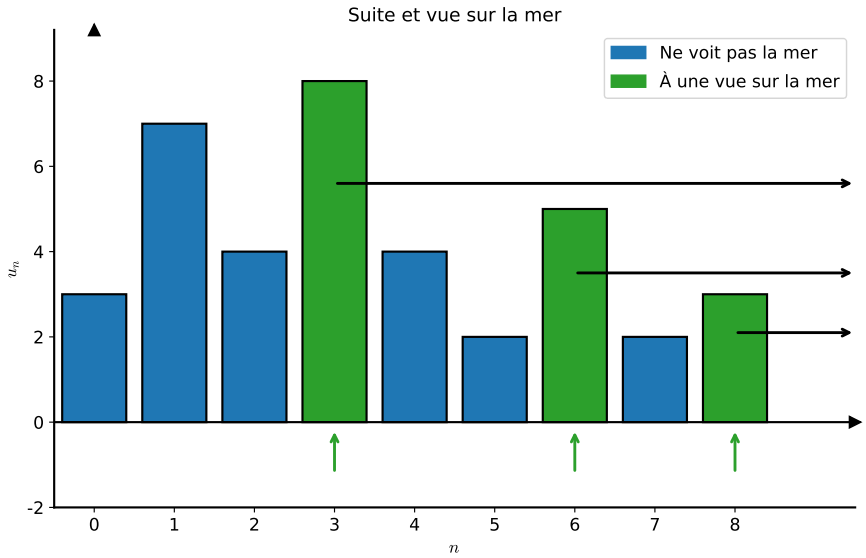
$$\forall m > \varphi(n), u_m < u_{\varphi(n)}.$$

Mais comme $\varphi(n+1) > \varphi(n)$, on a en particulier

$$u_{\varphi(n+1)} < u_{\varphi(n)}.$$

Donc $\boxed{\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante}}$.

2. L'ensemble V est l'ensemble des indices desquels on peut «voir la mer» c'est à dire qu'il n'existe aucun terme ultérieur plus grand.



3. Comme V est fini, en particulier il est majoré.

Soit N un majorant de V.

On a donc

$$\forall n > N, n \notin V$$

c'est à dire

$$\forall n > N, \exists m > n, u_m \geq u_n.$$

Construisons alors par récurrence une extractrice ψ telle que $u_{\psi(n)}$ est décroissante.

- ▷ **Initialisation**

  On pose $\psi(0)$ un entier strictement plus grand que N, par exemple $\psi(0) = N + 1$.
- ▷ **Hérédité**

  Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\psi(n) > N$ construite.

  Comme $\psi(n) > N$, il existe $m > \psi(n)$ tel que $u_m \geq u_{\psi(n)}$.

  Posons alors $\psi(n+1)$ un tel élément quelconque, par exemple $\psi(n+1) = \min\left(\left\{m > \psi(n) \mid u_m \geq u_{\psi(n)}\right\}\right)$.
- ▷ **Conclusion**

  On a donc construit par récurrence $\psi : \mathbb{N}to\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi(n+1) > \psi(n) > N$ et $u_{\psi(n+1)} \geq u_{\psi(n)}$.

On a donc la suite extraite $\boxed{\left(u_{\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

4. Par disjonction de cas:

- ▷ Si V est infini, il existe une suite extraite strictement décroissante.
- ▷ Si V est fini, il existe une suite extraite croissante.

Dans tous les cas $\boxed{\text{il existe une suite extraite monotone}}$.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée réelle.

Par la question précédente, il existe une suite extraite monotone.

Comme elle est extraite d'une suite bornée, elle est elle-même bornée.

Par le théorème des suites monotones, cette suite extraite converge.

D'où il existe bien une suite extraite convergente.

On a donc bien redémontré le théorème de $\boxed{\text{Bolzano-Weierstrass}}$.

Solution pour l'exercice 40 · Énoncé p. 16 · Indication p. 38 (Attention à la continuité)
On a pour tout $n \geq 1$, $1 \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$ et donc $\lfloor 2 - \frac{1}{n} \rfloor = 1$.

Par conséquent

$$\boxed{\left\lfloor 2 - \tfrac{1}{n} \right\rfloor \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq \lfloor 2 \rfloor}.$$

Solution pour l'exercice 48 · Énoncé p. 18 · Indication p. 38 (Suite de rationnels convergeant vers un irrationnel)
Supposons par l'absurde que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$.

C'est à dire

$$\exists A \geq 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, q_n \leq A.$$

Commençons par construire une extractrice φ telle que la suite extraite $\left(q_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

- ▹ **Initialisation**: il existe $n \geq 0$ tel que $q_n \leq A$ (prendre $N = 0$ dans l'hypothèse). Posons $\varphi(0)$ un tel entier.
- ▹ **Hérédité**: soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons construit $\varphi(n)$ tel que $q_{\varphi(n)} \leq A$.

  Par l'hypothèse (avec $N = \varphi(n) + 1$) il existe $m \geq \varphi(n) + 1$ tel que $q_m \leq A$.

  Posons $\varphi(n+1)$ un tel entier.
- ▹ **Conclusion**: on a donc construit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq q_{\varphi(n)} \leq A$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) > \varphi(n).$$

Ce qui est bien une extractrice et telle que la suite extraite $\left(q_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Par Bolzano-Weierstrass, la suite extraite $\left(q_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite bornée, il existe une extractrice ψ telle que la suite extraite $\left(q_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Mais la suite $\left(q_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'entiers, donc par l'exercice très-classique 20 elle est stationnaire.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $q_{\varphi(\psi(n))} = Q$.

On a donc

$$\frac{p_{\varphi(\psi(n))}}{Q} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$$

c'est à dire

$$p_{\varphi(\psi(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} Qx.$$

La suite $\left(p_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'entiers, donc encore une fois par l'exercice très-classique 20 elle est stationnaire.

Il existe donc $\tilde{N} \geq N$ et $P \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $n \geq \tilde{N}$, $p_{\varphi(\psi(n))} = P$.

On a donc ÀPCR

$$\frac{p_{\varphi(\psi(n))}}{q_{\varphi(\psi(n))}} = \frac{P}{Q}$$

et donc

$$\frac{P}{Q} = x$$

ce qui est **absurde** par irrationalité de x.

Par conséquent

$$\boxed{q_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

Puis comme $x \neq 0$ et que $|p_n| \sim q_n\ |x|$ lorsque $n \to +\infty$, on en déduit que

$$\boxed{|p_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

Solution pour l'exercice 59 · Énoncé p. 22 · Indication p. 40 (Variante binomiale de Cesàro)
On adapte la preuve usuelle de Cesàro.

▷ Cas $\ell = 0$

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors pour tout $n \geq N$ on a (comme les coefficients binomiaux sont positifs de somme 2^n)

$$\begin{aligned}|B_n| &\leq \frac{1}{2^n}\ |\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k| + \frac{1}{2^n}\sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k}\ |\ u_k\ | \\ &\leq \frac{1}{2^n}\ |\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k\ | + \frac{1}{2^n}\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N}^{n}\binom{n}{k} \\ &\leq \frac{1}{2^n}\ |\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Remarque: la différence par rapport à Cesàro « classique » est que le terme $\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k$ est dépendant de n.

De plus pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$ on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

est un polyôme en n de degré au plus k.

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k$$

est un polynôme en n de degré au plus $N-1$.

Par conséquent, (à N fixé), par croissances comparées,

$$\frac{1}{2^n}\ |\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Il existe donc $\tilde{N} \geq N$ tel que pour tout $n \geq \tilde{N}$,

$$\frac{1}{2^n}\ |\sum_{k=0}^{N-1}\binom{n}{k}u_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et donc

$$\forall n \geq \tilde{N}, |B_n| \leq \varepsilon.$$

On a donc bien montré que

$$\boxed{B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

▷ Cas général

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

$$B_n - \ell = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k - 2^n \ell\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(u_k - \ell).$$

Or $u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par le cas $\ell = 0$, on en déduit que $B_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi

$$\boxed{B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}.$$

Solution pour l'exercice 66 · Énoncé p. 25 · Indication p. 40 (Divergence grossière)

▷ Procédons par **contraposée**.

Supposons que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Alors par opérations $S_n - S_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a donc bien montré $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $\Rightarrow u_n \to 0$ c'est à dire $\boxed{u_n \to .\neg 0}$ $\Rightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

▷ La réciproque est **FAUSSE**.

Par exemple en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$ on a

$$u_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \ln(n+2) - \ln(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Solution pour l'exercice 69 · Énoncé p. 26 · Indication p. 41 (Critère de Raabe-Duhamel)

1. Comme $\ln(1+h) = h + o_{h\to 0}(h)$ on a

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{\alpha}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Soit $\beta = \frac{1+\alpha}{2}$.

En particulier [faire un schéma]

$$\alpha < \beta < 1.$$

Comme

$$n(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\alpha$$

il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq N$,

$$n(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) > -\beta$$

c'est à dire pour tout $n \geq N$,

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) > -\frac{\beta}{n}.$$

Par conséquent, par somme télescopique, pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned}\ln(u_n) &= \ln(u_N) + \sum_{k=N}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) \\ &\geq \ln(u_N) - \beta \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

or (comparaison somme/intégrale) , pour tout $k \geq 2$,

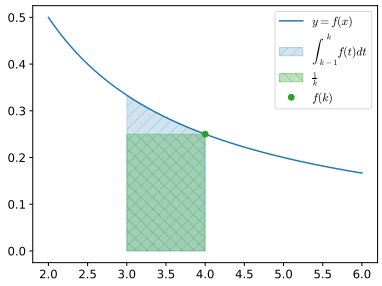
$$1 \times \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

d'où pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \int_{N-1}^{n-1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(n-1) - \ln(N-1)$$

i.e

$$-\sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k} \geq -\ln(n-1) + \ln(N-1)$$



et donc finalement

$$\ln(u_n) \geq \underbrace{u_N + \beta \ln(N-1)}_{C_N} - \beta \ln(n-1)$$

d'où par croissance de l'exponentielle, pour tout $n \geq N$,

$$u_n \geq \frac{e^{C_N}}{(n-1)^\beta}$$

et donc (juste pour l'esthétique) on a en particulier

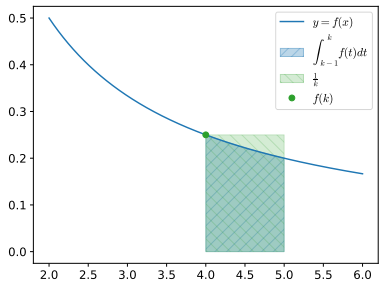
$$\forall k \geq N, u_k \geq e^{C_N} \frac{1}{k^\beta}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_k \geq \sum_{k=0}^{N-1} u_k}_{A_N} + e^{C_N} \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^\beta}.$$

Or, toujours par comparaison somme/intégrale, on a pour tout $k \geq N$

$$1 \times \frac{1}{k^\beta} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\beta} \, \mathrm{d}t$$



d'où, pour tout $n \geq N$, (comme $-\beta \neq 1$)

$$\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^\beta} \geq \int_N^{n+1} \frac{1}{t^\beta} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{-\beta+1}\left((n+1)^{-\beta+1} - N^{-\beta+1}\right)$$

ce qui se réécrit, comme $\beta < 1$,

$$\sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^\beta} \geq \frac{1}{1-\beta}(n+1)^{1-\beta} - \underbrace{\frac{N^{1-\beta}}{1-\beta}}_{K_N}.$$

Par conséquent on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n \geq A_N + e^{C_N}\left(\frac{1}{1-\beta}(n+1)^{1-\beta} - K_N\right).$$

Où C_N, A_N, K_N sont des constantes indépendantes de n (mais dépendant de N et de β).

Or $\beta < 1$ et par conséquent

$$\lim_{n \to +\infty} (n+1)^{1-\beta} = +\infty$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

2. On reprend la preuve précédente « dans l'autre sens ».

On a de même, comme $\ln(1+h) = h + o_{h\to 0}(h)$,

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = -\frac{\alpha}{n} + o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

c'est à dire

$$n(\ln(u_{n+1} - \ln(u_n))) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\alpha$$

Soit

$$\beta = \frac{1+\alpha}{2}$$

Alors l'inégalité essentielle est alors

$$1 < \beta < \alpha.$$

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$n(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) < -\beta$$

d'où par somme télescopique $n \geq N$,

$$\ln(u_n) \leq \ln(u_N) - \beta \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Par comparaison somme/intégrale, pour tout $k \geq 2$,

$$1 \times \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

et par conséquent pour tout $n \geq N$,

$$\ln(u_n) \leq \ln(u_N) - \beta\ln(n+1) + \beta\ln(N)$$

et donc il existe une constante C_N telle que

$$\forall n \geq N, u_n \leq \frac{e^{C_N}}{n^\beta}.$$

Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n \leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k + e^{C_N} \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^\beta}.$$

Or, toujours par comparaison somme/intégrale, pour tout $k \geq N$,

$$1 \times \frac{1}{k^\beta} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$$

et par conséquent on obtient qu'il existe une constante A_N telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_n \leq A_N + e^{C_N}\frac{1}{-\beta+1}\big((n)^{-\beta+1} - (N-1)^{-\beta+1}\big).$$

Ici le reste diffère légèrement. On réécrit tout d'abord l'inégalité comme $-\beta+1<0$, pour tout $n \geq N$,

$$S_n \leq A_N + K_N - e^{C_N}\frac{1}{\beta-1}n^{1-\beta}.$$

où K_N est une constante indépendante de n.

Et comme pour tout $n \geq N$,

$$e^{C_N}\frac{1}{\beta-1}n^{1-\beta} \geq 0$$

on en déduit, pour tout $n \geq N$,

$$S_n \leq A_N + K_N$$

c'est à dire $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}}$ (ÀPCR mais aussi à tous les rangs).

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

et donc $\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

Par le théorème de convergence monotone,

$$\boxed{(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}.$$

3. On ne peut rien dire, par exemple pour $\beta \in \mathbb{R}$, considérons la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$\forall n \geq 2, u_n = \frac{1}{n\ln(n)^\beta}.$$

Alors pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n}{n+1}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^\beta \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(\frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^\beta \\
&= \left(1-\frac{1}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\beta\frac{1}{n\ln(n)}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)\right) \\
&= 1-\frac{1}{n}+o_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

et on est donc dans le cas $\alpha = 1$.

Mais par comparaison série intégrale, on a peut montrer (le faire) que comme (si $\beta \neq 1$)

$$\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-\beta+1}\ln(t)^{-\beta+1}\right]_2^x$$

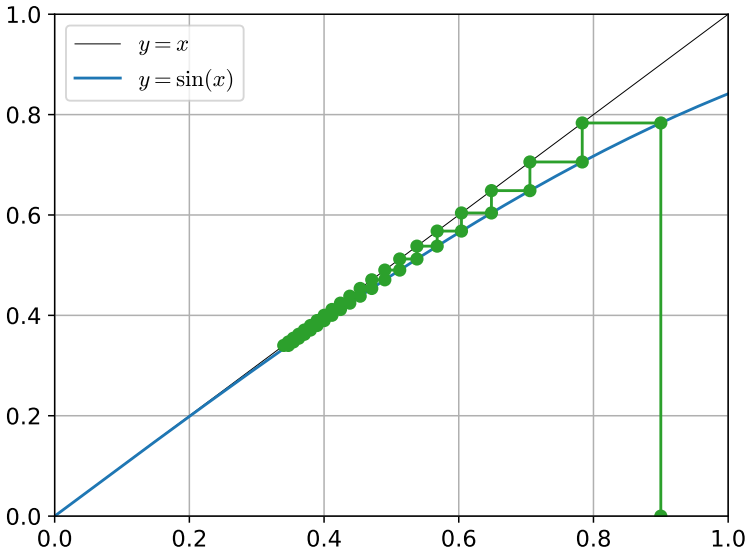
on a en particulier

- ▷ Si $\beta < 1$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- ▷ Si $\beta > 1$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Remarque: voir le chapitre sur les séries, notamment les séries de Riemann et séries de Bertrand.

Solution pour l'exercice 70 · Énoncé p. 27 · Indication p. 41 (Sinus itéré)

1. L'intervalle $]0,1]$ est stable par sin.



D'où la bonne définition et $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.

De plus (par exemple par étude de fonction)

$$\forall x \in]0,1], \sin(x) \leq x$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1}$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc décroissante et minorée par 0.

Par le théorème de convergence monotone elle est donc convergente.

3. Par PLIL on a $\ell \in [0,1]$.

Par continuité de sin, en passant à la limite la relation de récurrence on a

$$\ell = \sin(\ell)$$

De plus (toujours par étude de fonction) on a pour tout $x > 0$, $\sin(x) < x$.

Donc $\boxed{\ell = 0}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a, comme $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}(x^3)$, lorsque $x \to 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x\to 0}\right)^{-2} - x^{-2}\\ &= x^{-2}\left(\left(1 - \frac{x^2}{6} + o_{x\to 0}(x^2)\right) - 1\right)\\ &= x^{-2}\left(1 + (-2)\left(-\frac{x^2}{6}\right) + o_{x\to 0}(x^2)\right)\\ &= \frac{1}{3} + o_{x\to 0}(1)\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

Par conséquent comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par composée de limites,

$$\boxed{\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}}.$$

5. Par théorème de Cesàro, on a donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

c'est à dire (télescopage)

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.$$

Enfin comme $\frac{1}{n}\frac{1}{u_0^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit

$$\frac{3}{nu_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est à dire

$$\boxed{u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}}.$$

Solution pour l'exercice 72 · Énoncé p. 28 · Indication p. 41 (En autonomie: suite récurrente)
Posons

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x + e^{-x}.\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}$ est stable par f la suite est bien définie.

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $e^{-x} > 0$, on a

$$f(x) > x$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} > u_n.$$

Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.

Par théorème de limite monotone il existe donc $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Supposons par l'absurde que $\ell \in \mathbb{R}$.

Par passage à la limite et continuité de f on a alors

$$\ell = f(\ell)$$

c'est à dire

$$0 = e^{-\ell}$$

ce qui est impossible.

Donc $\ell = +\infty$, c'est à dire

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a ensuite

$$\begin{aligned} e^{u_{n+1}} - e^{u_n} &= e^{u_n + e^{-u_n}} - e^{u_n} \\ &= e^{u_n}\left(e^{e^{-u_n}} - 1\right) \\ &= \frac{e^{e^{-u_n}} - e^0}{e^{-u_n}} \end{aligned}$$

et comme

$$e^{-u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et (limite de taux d'accroissement)

$$\frac{e^x - e^0}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e^0 = 1$$

on en déduit que

$$\boxed{e^{u_{n+1}} - e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}.$$

Par conséquent, par le théorème de Cesàro on a donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{u_{k+1}} - e^{u_k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

c'est à dire par somme télescopique

$$\frac{1}{n}e^{u_n} - \frac{1}{n}e^{u_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

et donc comme $\frac{1}{n}e^{u_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on en déduit

$$\frac{e^{u_n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

En particulier par continuité de ln,

$$u_n - \ln(n) = \ln\left(\frac{e^{u_n}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0.$$

D'où

$$\boxed{u_n = \ln(n) + o_{n\to+\infty}(1)}.$$

Et en particulier comme $1 = o_{n\to+\infty}(\ln(n))$,

$$\boxed{u_n \sim \ln(n)}.$$

Solution pour l'exercice 80 · Énoncé p. 32 · Indication p. 43 (Lemme de Fekete)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Tout d'abord on montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que, par sous-additivité,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, u_{pk} \leq pu_k.$$

Par conséquent avec $n = (n /\!\!/ k)k + (n\%k)$ où $(n /\!\!/ k)$ et $n\%k$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par k, on a

$$u_n = u_{(n/\!\!/k)k+(n\%k)} \leq u_{(n/\!\!/k)k} + u_{(n\%k)} \leq (n /\!\!/ k)u_k + u_{(n\%k)}$$

et comme $(n\%k) \in [\![0, k-1]\!]$ on a

$$u_{(n\%k)} \leq \max_{0\leq r\leq k-1} u_r.$$

On obtient bien

$$u_n \leq (n /\!\!/ k)u_k + \max_{0\leq r\leq k-1} u_r$$

ce qui comme $\frac{1}{n} > 0$ donne

$$\boxed{\frac{u_n}{n} \leq \frac{(n/\!\!/k)}{n}u_k + \frac{1}{n}\max_{0\leq r\leq k-1}(u_r)}.$$

Posons

$$\ell = \inf_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{u_k}{k}\right).$$

On remarque tout d'abord que comme infimum d'un ensemble non vide de réels, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ell \leq \frac{u_n}{n}$$

donc par passage à la limite inférieure de l'inégalité large (cf exercices sur lim inf et lim sup),

$$\boxed{\ell \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}}.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On a montré que

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{(n \mathbin{/\!\!/} k)}{n} u_k + \frac{1}{n} \max_{0\leq r\leq k-1}(u_r).$$

Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ et $\frac{(n/\!\!/k)}{n} \to \frac{1}{k}$.

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(n \mathbin{/\!\!/} k)}{n} u_k + \frac{1}{n} \max_{0\leq r\leq k-1}(u_r) \right) = \frac{u_k}{k}$$

et donc en particulier

$$\limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{(n \mathbin{/\!\!/} k)}{n} u_k + \frac{1}{n} \max_{0\leq r\leq k-1}(u_r) \right) = \frac{u_k}{k}.$$

Par passage à la limite supérieure de l'inégalité large (cf exercices sur lim inf et lim sup) on a donc

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_k}{k}.$$

Comme $k \in \mathbb{N}^*$ est arbitraire on a donc montré

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \limsup_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \leq \frac{u_k}{k}.$$

En passant à l'inf (sur $k \in \mathbb{N}^*$) on en déduit

$$\boxed{\limsup_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} \leq \ell}.$$

De par les deux inégalités démontrées et par l'inégalité entre lim inf et lim sup (cf exercices sur lim inf et lim sup) on en déduit

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell = \liminf_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$$

c'est à dire (cf exercices sur lim inf et lim sup),

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = \ell}.$$