Matrices sans Algèbre Linéaire

Énoncés 2
Calculs pratiques 2
Résolution de systèmes 2
Calculs de puissances 3
Calculs théoriques 5
♠ Premiers contacts avec quelques matrices remarquables 9
Indications 15
Solutions 18

Énoncés

Calculs pratiques

Résolution de systèmes

Exercice 1 (◔★ Systèmes)
Donner l'ensemble des solutions des systèmes suivants

1.
$$\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 5x - 8y = 2. \end{cases}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y = \cos(\varphi) \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y = \sin(\varphi). \end{cases}$$

4. Selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.
$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 = 1 \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 = 1 \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

7.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8.
$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

10. (□) Demander à une personne de votre choix de vous donner un système linéaire, puis résolvez le. Vérifiez ensuite votre résultat.

Exercice 2 (◔★ Un exo à paramètre (valeur propre))
Déterminer selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{C}$ l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0. \end{cases}$$

Indication p. 15

Exercice 3 (◔★ Un exo à paramètre (image))
Déterminer l'ensemble des $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que le système

$$\begin{cases} x + y \ = \alpha \\ 2x - y = \beta \\ x + 2y = \gamma. \end{cases}$$

admette au moins une solution.

Solution p. 18

Exercice 4 (◔★ Un exo à paramètre (inverse))
Déterminer selon la valeur $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ l'ensemble des solutions du système

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Commenter.

Solution p. 18

Calculs de puissances

Exercice 5 (◔★ Par récurrence)
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Indication p. 15

Exercice 6 (◔★ Par binôme)
On pose

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ l'expression explicite de N^k.
2. En remarquant que les matrices $2I_2$ et N commutent, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(2I_2 + N)^n = 2^n I_2 + n2^{n-1} N$$

Indication p. 15

Exercice 7 (◔★ Par polynôme annulateur)
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$A^2 = 4A - 4I_2$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I_2$$

puis une expression explicite de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Indication p. 15

Exercice 8 (◔★♣ Par diagonalisation éventuelle: la théorie)
Soit d un entier naturel.

1. Soit $D = \text{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$ une matrice diagonale.

   Déterminer pour tout entier naturel n l'expression de D^n.
2. Soient $P \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$ et $D \in \text{M}_d(\mathbb{R})$.

   Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1}$$

Indication p. 15

Exercice 9 (◔★ Par diagonalisation éventuelle: la pratique)
On définit les matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 10 & -7 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
2. Calculer $P^{-1}AP$.
3. En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'expression de A^n.

Indication p. 15

Exercice 10 (◔★ Autonomie I)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression de

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n.$$

Solution p. 19

Exercice 11 (◔★ Autonomie II)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression explicite de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Solution p. 23

Calculs théoriques

Exercice 12 (◔★ Matrices comme formes bilinéaires)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

Montrer que

$$A = B \Leftrightarrow \forall (X, Y) \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X^\top AY = X^\top BY.$$

Indication p. 15

Exercice 13 (◑★ Matrices à diagonale dominante)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Une matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n.}} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *à diagonale dominante* ssi

$$\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{ii}| > \sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} |a_{ij}|.$$

Montrer que toute matrice à diagonale dominante est inversible.

Indication p. 15

Exercice 14 (◔★ Équations matricielles sans solution)

1. Soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il n'existe pas de $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{N})$ tel que

$$A^2 = N.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$AB - BA = I_n.$$

Solution p. 24

Exercice 15 (◔★ Nilpotence et triangularité)

1. Donner un exemple de matrice nilpotente qui n'est ni triangulaire supérieure stricte, ni triangulaire inférieure stricte.

2. Montrer que toute matrice triangulaire supérieure stricte (resp. triangulaire inférieure stricte) est nilpotente.

Indication p. 15

Exercice 16 (◔★♣ Relations sur les matrices)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On dit que deux matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont **équivalentes** ssi il existe $(P, Q) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))^2$ tels que
$$Q^{-1}AP = B.$$
Montrer que la relation «être équivalent à» est une relation d'équivalence.
2. On dit que deux matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont **semblables** ssi il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que
$$P^{-1}AP = B.$$
Montrer que la relation «être semblable à» est une relation d'équivalence.
3. On dit que deux matrices A et B de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont **congrues** ssi il existe $P\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que
$$P^{\top}AP = B.$$
Montrer que la relation «être congru à» est une relation d'équivalence.

Indication p. 15

Exercice 17 (◔★ Centre)
Soit $n \in \mathbb{N}$

Montrer que
$$\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\} = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Indication p. 15

Exercice 18 (◔★ Centre bis)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Déterminer
$$\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$$

Indication p. 15

Exercice 19 (◔★ Un aperçu de produit scalaire matriciel)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que

$$\mathrm{tr}(AA^\top) \geq 0.$$

Dans quel cas a-t-on $\mathrm{tr}(AA^\top) = 0$?

Solution p. 24

Exercice 20 (◔★ Seulement la trace)
Soit $n \in \mathbb{N}$, f une application

$$f : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$$

- ▷ **linéaire** c'est à dire

$$\forall (A_1, A_2) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2,\ f(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 f(A_1) + \lambda_2 f(A_2).$$

- ▷ $$\forall (A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{K}))^2, f(AB) = f(BA).$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = \alpha\,\mathrm{tr}(A).$$

Solution p. 25

Exercice 21 (◕★ Les transvections engendrent SL_n)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe $T_1, ..., T_N$ des matrices de transvections et $\Delta \in \mathbb{K}$ tels que

$$A = T_1 \cdots T_N \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Delta \end{pmatrix}.$$

Indication p. 16

Exercice 22 (◔★ Trace et rang 1)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soient $L \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ une matrice ligne et $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne.

On pose $A = CL$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = LC$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \mathrm{tr}(A)^{n-1}A$.

Indication p. 16

Exercice 23 (◔☆ Un exemple de produit semidirect)
Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (\theta, (x,y)) \in [0, 2\pi[\times \mathbb{R}^2 \right\}$$

est un groupe.

Indication p. 16

♠ Premiers contacts avec quelques matrices remarquables

Remarque: toutes les matrices vues ici ont de très nombreuses propriétés qui seront vues tout au long de cette année et de l'année prochaine. Notamment, une fois le lien entre matrices et applications linéaires explicité, ces exercices se traiteront de manière bien plus « naturelle ».

Exercice 24 (◔★♠ Matrices de rotation)

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on note

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \\ \theta &\mapsto R(\theta) \end{aligned}$$

est bien définie et est un morphisme de groupe.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note

$$H(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \\ t &\mapsto H(t) \end{aligned}$$

est bien définie et est un morphisme de groupe.

Indication p. 16

Exercice 25 (◔★ TD Structure algébriques: Une construction matricielle des complexes)
On note

$$\tilde{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Montrer que $\tilde{\mathbb{C}}$ est un sous-anneau de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\tilde{\mathbb{C}}$ est un corps.

3. Commenter et interpréter le déterminant, la transposée et la trace.

Solution p. 25

Exercice 26 (◔★ TD Structure algébriques: Une construction matricielle des quaternions)
On note

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix}, (u,v) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{H}$ est un sous-anneau de $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible.
3. Commenter.

Indication p. 16

Exercice 27 (◔★ Matrices stochastiques)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique ssi

- ▹ tous les coefficients de A sont positifs:

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (A)_{ij} \geq 0,$$

- ▹ la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1:

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 1.$$

Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

Indication p. 16

Exercice 28 (◔★♠ Bloc de Jordan)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit la matrice $J_n(\lambda) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

c'est à dire la matrice avec λ sur la diagonale, 1 sur la sur-diagonale et 0 pour tous les autres coefficients.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$ une expression de $(J_n(\lambda))^k$.
2. Montrer que $J_n(\lambda)$ est inversible ssi $\lambda \neq 0$.

   Dans ce cas, calculer $(J_n(\lambda))^{-1}$.

Solution p. 26

Exercice 29 (◔★♠ Matrices de Pascal)
<u>Notation</u>: Dans cet exercice les indices des lignes et des colonnes commencent à 0 !

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ on note $T_n(\alpha) \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!], (T_n(\alpha))_{ij} = \binom{j}{i}\alpha^{j-i}.$$

(Par convention, si $i > j$ on posera $(T_n(\alpha))_{ij} = 0$ pour <u>tout</u> $\alpha \in \mathbb{C}$.)

1. Expliciter $T_4(\alpha)$ pour $n = 4$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Expliciter $T_6(1)$ et commenter.
2. Montrer que $T_n(0) = I_n$.
3. Montrer que pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$,
$$T_n(\alpha)T_n(\beta) = T_n(\alpha + \beta).$$
4. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $T_n(\alpha)$ est inversible et déterminer son inverse.

Solution p. 29

Exercice 30 (◔★♠ TD Dénombrement: formules d'inversion de Pascal)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{0\leq k\leq n}$ deux familles de nombres complexe.

1. Montrer la **première formule d'inversion de Pascal**
$$\left(\forall i \in [\![0,n]\!], a_i = \sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}b_j\right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in [\![0,n]\!], b_i = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j-i}\binom{i}{j}a_j\right)$$
2. Montrer la **seconde formule d'inversion de Pascal**
$$\left(\forall i \in [\![0,n]\!], a_i = \sum_{j=0}^{n}\binom{j}{i}b_j\right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in [\![0,n]\!], b_i = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}a_j\right)$$

Indication p. 16

Exercice 31 (◔★♠ Matrice de Vandermonde)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soient $x_1, ..., x_n$ des nombres complexes deux à deux distincts.

On définit la matrice V par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], (V)_{ij} = (x_i)^{j-1}$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que V est inversible (on ne demande pas de déterminer l'inverse).

Indication p. 17 · Solution p. 30

Exercice 32 (◔★ Matrices de permutations)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que l'on note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ c'est à dire l'ensemble des fonctions bijectives de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$.

Pour $\sigma \in S_n$ on appelle matrice de permutation σ la matrice P_σ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!], (P_\sigma)_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} S_n &\to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \sigma &\mapsto P_\sigma \end{aligned}$$

est bien définie et est un morphisme de groupes.

Indication p. 17

Exercice 33 (◑★ Matrices compagnons)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + X^n$ un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1.

On définit la matrice compagnon de P par

$$\mathcal{C}_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout polynôme Q de degré strictement inférieur à n on a $Q(\mathcal{C}_P) \neq 0$ et que $P(\mathcal{C}_P) = 0$.

Solution p. 35

Indications

Indication 2 · Énoncé p. 3 (Un exo à paramètre (valeur propre))
Pivoter.

Pour réduire le nombre de cas à traiter, remarquer qu'il vaut mieux éviter les pivots pouvant s'annuler.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Par récurrence)
Récurrence.

Indication 6 · Énoncé p. 4 (Par binôme)
Binôme.

Indication 7 · Énoncé p. 4 (Par polynôme annulateur)
Division euclidienne.

Pour obtenir le reste utiliser la fonction en un point et sa dérivée en un autre.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Par diagonalisation éventuelle: la théorie)
Remarquer que $PAP^{-1}PBP^{-1} = PABP^{-1}$.

Indication 9 · Énoncé p. 5 (Par diagonalisation éventuelle: la pratique)
Traiter l'exercice 8 avant.

Indication 12 · Énoncé p. 5 (Matrices comme formes bilinéaires)
Que dire de $E_{1,i}AE_{j,1}$?

Indication 13 · Énoncé p. 6 (Matrices à diagonale dominante)
Utiliser le critère nucléaire d'inversibilité et prendre une ligne bien choisie.

Indication 15 · Énoncé p. 6 (Nilpotence et triangularité)
RAS

Indication 16 · Énoncé p. 7 (Relations sur les matrices)
Vérifications automatiques.

Indication 17 · Énoncé p. 7 (Centre)
Écrire pour tous i, j, $AE_{ij} = E_{ij}A$.

Indication 18 · Énoncé p. 7 (Centre bis)
Faire l'exercice 17.

Remarquer que si $\big(I_n + E_{ij}\big)A = A\big(I_n + E_{ij}\big)$ alors $AE_{ij} = E_{ij}A$.

Indication 21 · Énoncé p. 8 (Les transvections engendrent SL_n)
Faire un pivot.

Pour faire comme une dilatation remarquer que si $a_{i,1} \neq 0$, on peut effectuer $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{a_{i,1}}{a_{11}} L_i$.

Pour faire comme une transposition remarquer qu'on peut effectuer $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ puis $L_j \leftarrow L_j - \lambda L_i$ puis $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Indication 22 · Énoncé p. 9 (Trace et rang 1)

1. Trace d'un produit.
2. $C(LCLCLCLCLCLC)L$

Indication 23 · Énoncé p. 9 (Un exemple de produit semidirect)
Faire un calcul explicite.

On observe qu'il s'agit d'une représentation du groupe des isométries directes du plan, en tant que produit semi-direct des rotations et des translations.

Indication 24 · Énoncé p. 10 (Matrices de rotation)

1. Calcul explicite.
2. Calcul explicite.

Indication 26 · Énoncé p. 11 (TD Structure algébriques: Une construction matricielle des quaternions)

1. Vérifications par rédaction automatique.
2. On sait déterminer l'inversibilité et calculer l'inverse dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. Il ne reste donc plus qu'à vérifier que cet éventuel inverse explicite est bien dans $\mathbb{H}$.
3. Ce n'est pas un corps car le produit est non commutatif, ce qui se prouve en exhibant un contre-exemple.

Indication 27 · Énoncé p. 11 (Matrices stochastiques)

- ▷ Pour la positivité écrire la formule.
- ▷ Pour la somme des coefficients des lignes, on peut écrire une somme double avec la formule explicite des coefficients du produit, ou bien poser $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et vérifier que la condition s'écrit tout simplement $AX = 1 \times X$ et que $(AB)X = A(BX)$.

Indication 30 · Énoncé p. 12 (TD Dénombrement: formules d'inversion de Pascal)
Faire l'exercice 29.

Se rendre compte qu'on souhaite simplement montrer que

$$(T_n(1))^{-1} = T_n(-1)$$

et

$$(T_n(1)^\top)^{-1} = (T_n(-1))^\top.$$

Indication 31 · Énoncé p. 13 (Matrice de Vandermonde)
Par exemple:

- ▷ interpréter un vecteur du noyau comme polynôme de degré au plus $n-1$ ayant $x_1, ..., x_n$ comme racines,
- ▷ effectuer un pivot sur les colonnes pour obtenir une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & P_2(x_1) & \cdots & P_{n-1}(x_1) \\ P_0(x_2) & P_1(x_2) & P_2(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_2) \\ P_0(x_3) & P_1(x_3) & P_2(x_3) & \cdots & P_{n-1}(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & P_2(x_n) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}.$$

  Avec pour tout k, P_k unitaire et de degré k.
- ▷ effectuer un pivot sur les lignes, Bernoulli, dilation et transvection avant de faire une récurrence.

Solution p. 30

Indication 32 · Énoncé p. 13 (Matrices de permutations)
On vérifie *d'abord* que $P_{\sigma_1 \circ \sigma_2} = P_{\sigma_1} P_{\sigma_2}$ (il faudra de toutes façons le faire pour le montrer que c'est un morphisme de groupes) et que $P_{\mathrm{Id}} = I_n$.

On en déduit que P_σ est inversible car $P_{\sigma^{-1}}$ est bien un inverse.

En fait, comme pour l'exercice 29, on montre que c'est un morphisme de monoïdes, avec un ensemble de départ qui est un groupe, et donc un morphisme de groupe dans le groupe des inversibles.

Solutions

Solution pour l'exercice 3 · Énoncé p. 3 (Un exo à paramètre (image))
On effectue les opérations élémentaires sur les lignes suivantes

▷ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{cases} x+y = \alpha \\ -3y \ = \beta - 2\alpha \\ y \ = \gamma - \alpha. \end{cases}$$

▷ $L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3$

$$\begin{cases} x+y = \alpha \\ y \ = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta \\ y \ = -\alpha + \gamma. \end{cases}$$

▷ $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{cases} x+y = \alpha \\ y \ = \frac{2}{3}\alpha - \frac{1}{3}\beta \\ y \ = -\frac{5}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{3}{3}\gamma. \end{cases}$$

Le système obtenu étant échelonné, et la condition de compatibilité étant $-\frac{5}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta + \frac{3}{3}\gamma = 0$, il existe une solution ssi

$$\boxed{5\alpha - \beta - 3\gamma = 0}.$$

Remarque: On a $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix}$. Faire un schéma et commenter.

Solution pour l'exercice 4 · Énoncé p. 3 (Un exo à paramètre (inverse))
On effectue les opérations élémentaires

▷ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 2 & 0\\0 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta-\alpha\\\gamma-\alpha\end{pmatrix}.$$

▷ $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\\-\alpha+\gamma\end{pmatrix}.$$

▷ $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\\\frac{1}{2}\alpha-\frac{3}{2}\beta+\gamma\end{pmatrix}.$$

▷ $L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\\\frac{1}{6}\alpha-\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{3}\gamma\end{pmatrix}.$$

▷ $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\alpha+\beta-\frac{1}{3}\gamma\\-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\\\frac{1}{6}\alpha-\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{3}\gamma\end{pmatrix}.$$

Et par conséquent

$$\boxed{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&1&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}.}$$

On a donc montré (cf cours) que $\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}$ est inversible et

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&1&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

On peut aussi commenter que la matrice concernée est un cas particulier de matrice de Vandermonde.

Solution pour l'exercice 10 · Énoncé p. 5 (Autonomie I)

Posons

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

▷ **Par récurrence**

On calcule les premières puissances de A.

▷ $A^0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
▷ $A^1=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$
▷ $A^2=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$
▷ $A^3=A^2A=\begin{pmatrix}14&13\\13&14\end{pmatrix}$

On va par conséquent montrer par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ le résultat suivant

$$\forall n\in\mathbb{N}, A^n=\begin{pmatrix}\frac{3^n+1}{2}&\frac{3^n-1}{2}\\\frac{3^n-1}{2}&\frac{3^n}{2}\end{pmatrix}$$

▷ **Initialisation**

Pour $n=0$, on a bien

$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^0+1}{2} & \frac{3^0-1}{2} \\ \frac{3^0-1}{2} & \frac{3^0}{2} \end{pmatrix}.$$

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}$.

Alors on a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (3^n+1) + \frac{3^n-1}{2} & (3^n-1) + \frac{3^n+1}{2} \\ (3^n-1) + \frac{3^n+1}{2} & (3^n+1) + \frac{3^n-1}{2} \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} \frac{(2+1)3^n+2-1}{2} & \frac{(2+1)3^n-2+1}{2} \\ \frac{(2+1)3^n-2+1}{2} & \frac{(2+1)3^n+2-1}{2} \end{pmatrix} \qquad = \begin{pmatrix} \frac{3^{n+1}+1}{2} & \frac{3^{n+1}-1}{2} \\ \frac{3^{n+1}-1}{2} & \frac{3^{n+1}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat au rang $n+1$.

▷ **Conclusion**

Par récurrence on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}}$$

▷ **Par binôme I**

Posons $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

- ▷ Si k est pair, $S^k = (S^2)^{\frac{k}{2}} = I_2$.
- ▷ Si k est impair, $S^k = S(S^2)^{\frac{k-1}{2}} = S$.

De plus S et I_2 <u>commutent</u> d'où par la formule du binôme

$$\begin{aligned} (2I_2 + S)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S^k (2I_2)^{n-k} \\ &= \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_2 + \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} S \end{aligned}$$

Or comme

$$3^n = (2+1)^n \qquad = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} + \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

$$1^n = (2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k = \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} - \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

en résolvant le système somme-différence on obtient

$$\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \frac{3^n+1}{2}$$

$$\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} = \frac{3^n-1}{2}$$

et par conséquent

$$\boxed{A^n = (2I_2+S)^n = \tfrac{3^n+1}{2} I_2 + \tfrac{3^n-1}{2} S}.$$

c'est à dire

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}}$$

▷ **Par binôme II** Posons

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $J^2 = 2J$ d'où par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}^k$,
- ▷ Si $k = 0$ alors $J^k = I_2$.
- ▷ Si $k \geq 0$ alors $J^k = 2^{k-1}J$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

De plus I_2 et J commutent d'où par la formule du binôme

$$\begin{aligned}(I_2+J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I_2^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} J^0 I_2^{n-0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} J I_2^{n-k} \\ &= I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} J.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k - 1\right) \\ &= \frac{3^n-1}{2}\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{A^n = (I_2+J)^n = I_2 + \tfrac{3^n-1}{2} J}$$

c'est à dire

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}}$$

▷ **Par polynôme annulateur**

On observe que

$$A^2 = 4A - 3I_2$$

(De manière générale pour les matrices 2×2, $A^2 = \mathrm{tr}(A)A - \det(A)I_2$).

Posons

$$P = X^2 - 4X + 3 = (X-3)(X-1).$$

Alors $P(A) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ il existe $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_1[X]$ tels que

$$X^n = Q_n P + R_n$$
$$\deg(R_n) < \deg(P) = 2$$

On a alors R_n un polynôme affine et

▷ En évaluant en 3,

$$3^n = Q_n(3)\underbrace{P(3)}_{0} + R_n(3)$$

i.e

$$R_n(3) = 3^n$$

▷ En évaluant en 1,

$$1^n = Q_n(1)\underbrace{P(1)}_{0} + R_n(1)$$

i.e

$$R_n(1) = 1^n$$

par conséquent (équation de la droite passant pas $(1, 1^n)$, $(3, 3^n)$)

$$R_n(X) = \frac{3^n - 1^n}{3-1}(X-1) + 1^n$$

i.e

$$R_n(X) = \frac{3^n-1}{2}X - \frac{3^n-3}{2}.$$

Donc comme

$$A^n = Q_n(A)\underbrace{P(A)}_{=0_2} + R_n(A)$$

on en déduit

$$\boxed{A^n = \frac{3^n-1}{2}A - \frac{3^n-3}{2}I_2}$$

c'est à dire

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}}$$

▷ **Par diagonalisation éventuelle**

Posons

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

d'inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On observe que [faire le calcul]

$$A = PDP^{-1}$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

c'est à dire

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

ou encore [faire le calcul]

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n+1}{2} & \frac{3^n-1}{2} \\ \frac{3^n-1}{2} & \frac{3^n+1}{2} \end{pmatrix}}$$

Solution pour l'exercice 11 · Énoncé p. 5 (Autonomie II)

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

▷ Par récurrence (remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ a_k & k & 1 \end{pmatrix}$ et écrire la relation de récurrence vérifiée par $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.)

▷ Par binôme bien choisi.

▷ Par polynôme annulateur (ici $(X-1)^3$ admettant une racine triple).

Procédons par exemple **par récurrence**.

Posons

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$N^3 = 0_3.$$

D'où pour tout $k \geq 3$, $N^k = N^3 N^{k-3} = 0_3$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Comme I_3 et N commutent on a par la formule du binôme

$$\begin{aligned}(I_3 + N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} N^0 I_3^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 I_3^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 I_3^{n-2} + \sum_{k \in [\![3,n]\!]} \binom{n}{k} 0_3 \\ &= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & n & 1 \end{pmatrix}}$$

Solution pour l'exercice 14 · Énoncé p. 6 (Équations matricielles sans solution)

1. Faire un calcul explicite ou utiliser le cours d'algèbre linéaire.

2. Supposons par l'absurde qu'il existe de telles matrices.

Alors comme (par linéarité de la trace et trace d'un produit)

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(AB) = 0$$

et comme

$$\operatorname{tr}(I_n) = n$$

on obtient une $\boxed{\text{contradiction}}$.

Solution pour l'exercice 19 · Énoncé p. 8 (Un aperçu de produit scalaire matriciel)

On a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AA^\top) &= \sum_{i=1}^{n} \left(AA^\top\right)_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(A^\top)_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (A)_{ij}(A)_{ij} \\ &= \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \left((A)_{ij}\right)^2\end{aligned}$$

Or une somme de coefficients positifs est positive d'où

$$\boxed{\operatorname{tr}(AA^\top) \geq 0}$$

et une somme de coefficients positifs est nulle ssi tous les coefficients positifs sont nuls d'où

$$\boxed{\operatorname{tr}(AA^\top) = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (A)_{ij} = 0 \Leftrightarrow A = 0_n}.$$

Solution pour l'exercice 20 · Énoncé p. 8 (Seulement la trace)
Constater qu'il suffit de connaître l'image des $\left(E_{ij}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.

Étudier l'image de $E_{ij}E_{kl}$.

Solution pour l'exercice 25 · Énoncé p. 10 (TD Structure algébriques: Une construction matricielle des complexes)

1. ▷ On a $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbb{C}}$.

D'où l'appartenance de l'unité.

▷ Soit $Z \in \tilde{\mathbb{C}}$.

Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Alors $-Z = \begin{pmatrix} (-a) & -(-b) \\ (-b) & (-a) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbb{C}}$. D'où la la stabilité par opposé.

▷ Soient $Z_1, Z_2 \in \tilde{\mathbb{C}}$.

Il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $Z_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ et $Z_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$.

Alors

$$Z_1 + Z_2 = \begin{pmatrix} (a_1+a_2) & -(b_1+b_2) \\ (b_1+b_2) & (a_1+a_2) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbb{C}}.$$

D'où la stabilité par somme.

Et de plus

$$Z_1 Z_2 = \begin{pmatrix} (a_1a_2 - b_1b_2) & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ (a_1b_2 + a_2b_1) & (a_1a_2 - b_1b_2) \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbb{C}}.$$

D'où la stabilité par produit.

Ainsi $\boxed{\tilde{\mathbb{C}} \text{ est un sous-anneau de } \mathrm{M}_2(\mathbb{R})}$.

2. Il reste à montrer que $\tilde{\mathbb{C}}$ est commutatif et que tout élément non nul est inversible.

▷ Soient $Z_1, Z_2 \in \tilde{\mathbb{C}}$.

Il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $Z_1 = \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$ et $Z_2 = \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$.

Alors

$$Z_1 Z_2 = \begin{pmatrix} (a_1a_2 - b_1b_2) & -(a_1b_2 + a_2b_1) \\ (a_1b_2 + a_2b_1) & (a_1a_2 - b_1b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_2a_1 - b_2b_1) & -(a_2b_1 + a_1b_2) \\ (a_2b_1 + a_1b_2) & (a_2a_1 - b_2b_1) \end{pmatrix} = Z_2 Z_1.$$

D'où la commutativité.

▷ Soit $Z \in \tilde{\mathbb{C}}$ non nul. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Comme $Z \neq 0_2$ on a $(a, b) \neq (0, 0)$ et donc (somme d'éléments positifs non tous nuls) $a^2 + b^2 \neq 0$.

On constate que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Et donc

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} Z = I_2$$

et comme $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \in \tilde{\mathbb{C}}$ on a que Z est inversible à gauche et donc par commutativité Z est inversible.

Remarque: on reconnaît ici la construction de l'inverse de $z \neq 0$ par $\frac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

D'où $\boxed{\tilde{\mathbb{C}} \text{ est un corps}}$.

3. On observe qu'il s'agit d'une construction possible des $\boxed{\text{nombres complexes}}$ $\mathbb{C}$.

En effet en notant $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a que $\tilde{\mathbb{C}} = \{a + bi, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ avec les règles de calculs sur un anneau commutatif et $i^2 = -1$.

On peut interpréter sous cet angle:

▷ Le **déterminant** $a^2 + b^2$ comme le **module au carré**.
▷ La **transposée** comme le **conjugué**.
▷ La **trace** $2a$ comme la **deux fois la partie réelle**.

Solution pour l'exercice 28 · Énoncé p. 11 (Bloc de Jordan)

1. Posons

$$N = J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

On a pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$,

$$(N)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{i+1=j}.$$

Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \left(N^k\right)_{ij} = \delta_{i+k=j}.$$

Autrement dit si $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$N^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où tous les coefficients sont nuls sauf les 1 sur la k-ième sur-diagonale, et si $k \geq n$, $N^k = 0_n$.

- **Initialisation**: pour $k = 0$ on a $N^0 = I_n$ et on a bien
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \left(N^0\right)_{ij} = \delta_{i=j}.$$
- **Hérédité**: Soit $k \in \mathbb{N}$.

  Supposons que pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\left(N^k\right)_{ij} = \delta_{i+k=j}$.

  Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

  On a
$$\begin{aligned} \left(N^{k+1}\right)_{ij} &= \left(N^k N\right)_{ij} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left(N^k\right)_{il} N_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \delta_{i+k=l} \delta_{l+1=j} \\ &= \delta_{i+k+1=j}. \end{aligned}$$
  D'où le résultat au rang $k+1$.
- **Conclusion**: par récurrence on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \left(N^k\right)_{ij} = \delta_{i+k=j}.$$

Ensuite comme λI_n et N **commutent**, par formule du binôme on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(\lambda I_n + N)^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (\lambda I_n)^{k-l} N^l$$

On en déduit que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}\left(J_n(\lambda)^k\right)_{i,j} &= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \lambda^{k-l} \delta_{i+l=j} \\ &= \delta_{j\geq i} \binom{k}{j-i} \lambda^{k-(j-i)}\end{aligned}$$

avec la convention que $\binom{k}{l} = 0$ si $l > k$.

Ainsi

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \left(J_n(\lambda)^k\right)_{i,j} = \delta_{j\geq i}\binom{k}{j-i}\lambda^{k-(j-i)}}.$$

Ce qui peut s'écrire

$$J_n(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \binom{k}{l}\lambda^{k-l} & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & \cdots & \binom{k}{l}\lambda^{k-l} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

[Faire encore plus de schémas.]

2. On a $J_n(\lambda)$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à λ.

D'où $\boxed{J_n(\lambda) \text{ est inversible ssi } \lambda \neq 0}$.

Si $\lambda \neq 0$ on a alors

$$(\lambda I_n + N)^{-1} = \lambda^{-1}\left(I_n - (-\lambda^{-1}N)\right)^{-1}$$

De plus on a vu avec les notations précédentes que N est nilpotente et $N^{n+1} = 0_n$, d'où $\lambda^{-1}N$ est nilpotente et $\left(\lambda^{-1}N\right)^{n+1} = 0_n$.

Par formule de Bernoulli, comme I_n et $\lambda^{-1}N$ **commutent**,

$$\begin{aligned} I_n &= \left(I_n^{n+1} - \left(-\lambda^{-1}N\right)^{n+1}\right) \\ &= \left(I_n - (-\lambda^{-1}N)\right) \sum_{k=0}^{n} \left(-\lambda^{-1}N\right)^k I_n^{n-k} \\ &= \left(I_n - (-\lambda^{-1}N)\right) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \lambda^{-k} N^k \end{aligned}$$

et de même à gauche.

Par conséquent

$$\boxed{(\lambda I_n + N)^{-1} = \lambda^{-1} \textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \lambda^{-k} N^k}.$$

Ce qui peut s'écrire

$$J_n(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} & \cdots & (-1)^{n-1}\lambda^{-n} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \cdots & (-1)^{n}\lambda^{-(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Solution pour l'exercice 29 · Énoncé p. 12 (Matrices de Pascal)

1. On a

$$\boxed{T_4(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 \\ 0 & 1 & 2\alpha & 3\alpha^2 & 4\alpha^3 \\ 0 & 0 & 1 & 3\alpha & 6\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

De même

$$\boxed{T_6(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Il s'agit d'une matrice dont la transposée est le $\boxed{\text{triangle de Pascal}}$.

2. On a pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, si $i > j$ alors $\binom{j}{i} = 0$ et si $i < j$ alors $0^{j-i} = 0$.

Et si $i = j$ alors $\binom{j}{i}0^{j-i} = 1$.

D'où

$$\boxed{T_n(0) = I_n}.$$

3. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]$.

On a

$$\begin{aligned} (T_n(\alpha)T_n(\beta))_{ij} &= \sum_{k=0}^{n} (T_n(\alpha))_{ik}(T_n(\beta))_{kj} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{i}\alpha^{k-i}\binom{j}{k}\beta^{j-k} \end{aligned}$$

Par formule des capitaines on a de plus pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\binom{k}{i}\binom{j}{k} = \binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i}.$$

(Cf cours sur les coefficients binomiaux).

Ainsi, avec le changement d'indice $l = k - i$

$$\begin{aligned}
\left(T_n(\alpha)T_n(\beta)\right)_{ij} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i}\alpha^{k-i}\beta^{j-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{j}{i}\binom{j-i}{k-i}\alpha^{k-i}\beta^{j-k} \\
&= \binom{j}{i}\sum_{k=0}^{n}\binom{j-i}{k-i}\alpha^{k-i}\beta^{j-k} \\
&= \binom{j}{i}\sum_{l=0}^{j-i}\binom{j-i}{l}\alpha^{l}\beta^{j-i-l} \\
&= \binom{j}{i}(\alpha+\beta)^{j-i} \\
&= \left(T_n(\alpha+\beta)\right)_{ij}.
\end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{T_n(\alpha)T_n(\beta) = T_n(\alpha+\beta)}.$$

4. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

On a par la question précédente $T_n(\alpha)T_n(-\alpha) = T_n(\alpha+(-\alpha)) = T_n(0) = I_n$.

Donc $\boxed{T_n(\alpha) \text{ est inversible et son inverse est } T_n(-\alpha)}$.

Remarque: on a en fait montré que

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R},+) &\to (\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\times) \\
\alpha &\mapsto T_n(\alpha)
\end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

Solution pour l'exercice 31 · Énoncé p. 13 · Indication p. 17 (Matrice de Vandermonde)

▷ **Première méthode**: par noyau.

Soit $X \in \mathrm{Ker}(V)$.

Avec

$$X = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \vdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

on a

$$AX = 0_n$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} \\ a_0 + a_1x_2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j = 0.$$

Avec

$$P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$$

on a donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], P(x_i) = 0.$$

Par conséquent P est un polynôme de degré strictement inférieur à n ayant n racines distinctes, donc $P = 0$.

Donc $\forall j \in [\![0, n-1]\!], a_j = 0$, i.e $X = 0_n$.

Donc $\mathrm{Ker}(V) = \{0_n\}$ et donc $\boxed{V \text{ est inversible}}$.

▷ **Deuxième méthode**: Par image (cette méthode repose en fait sur les polynômes d'interpolation de Lagrange qui seront vus plus tard dans l'année).

Soit $Y \in \mathbb{R}^n$.

Avec $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, pour tout $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ on a

$$AX = Y$$

ssi (même calcul)

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j = y_i.$$

Posons pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

On constate que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

D'où avec

$$P = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i$$

on a P de degré strictement inférieur à n.

En notant $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ on a alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_i^j = P(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} y_j = y_i.$$

Et donc $AX = Y$.

D'où V est surjective et donc $\boxed{V \text{ est inversible}}$.

▷ **Troisième méthode**: Par pivot sur les colonnes.

Soient $a_0, ..., a_{n-2} \in \mathbb{C}$.

En effectuant les opérations élémentaires

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!], C_n \leftarrow C_n + a_j C_j$$

on obtient que V est équivalente par colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^j \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^j \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^j \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout polynôme P_{n-1} de degré $n-1$ et unitaire, c'est à dire s'écrivant

$$P_{n-1} = X^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j X^j$$

on a V équivalent par colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & P_{n-1}(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}.$$

De même que précédemment, avec $P_{n-2} = X^{n-2} + \sum_{j=0}^{n-3} b_j X^j$ un polynôme unitaire de degré $n-2$, en effectuant $\forall j \in [\![1, n-2]\!], C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} + b_j C_j$ on obtient que V est équivalente par colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-3} & P_{n-2}(x_1) & P_{n-1}(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-3} & P_{n-2}(x_2) & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-3} & P_{n-2}(x_n) & P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}.$$

Et en faisant de même pour P_{n-3}, P_{n-4}, etc. on obtient que:

Pour toute famille $(P_0, P_1, ..., P_{n-1})$ de polynômes unitaires vérifiant pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, $\deg(P_j) = j$ on a V est équivalent par colonne à

$$\begin{pmatrix} P_0(x_1) & P_1(x_1) & \cdots & P_{n-1}(x_1) \\ P_0(x_2) & P_1(x_2) & \cdots & P_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_0(x_n) & P_1(x_n) & \cdots & P_{n-1}(x_n) \end{pmatrix}.$$

Il suffit ensuite de poser pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$,

$$P_j = \prod_{i<j}(X - x_i)$$

qui est bien unitaire de degré j, pour obtenir que V est équivalent par colonnes à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ * & (x_2 - x_1) & \cdots & \cdots & 0 & \\ * & * & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ * & * & * & \cdots & \prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i) & \end{pmatrix}$$

qui est une matrice triangulaire (inférieure) de coefficients diagonaux non nuls, donc $\boxed{V \text{ est inversible}}$.

▹ **Quatrième méthode**: Par pivot sur les lignes (et par colonnes) et récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $\mathcal{P}_n$ l'hypothèse de récurrence:

« Pour tous réels $x_1, ..., x_n$ deux à deux distincts $V(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible».

▹ **Initialisation** Pour $n = 1$, on a bien pour tout réel x_1, la matrice (1) est inversible.

▹ **Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}_{n-1}$.

Soient $x_1, ..., x_n$ deux à deux distincts et

$$V = V(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

En effectuant les opérations élémentaires

$$\forall i \in [\![2, n]\!] L_i \leftarrow L_i - L_1$$

on obtient que V est équivalente par ligne à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1}-x_1^{n-1} \\ 0 & x_3-x_1 & x_3^2-x_1^2 & \cdots & x_3^{n-1}-x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1}-x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

En effectuant les dilatations

$$\forall i \in [\![2,n]\!] L_i \leftarrow \frac{1}{x_i-x_1} L_i$$

par la formule de Bernoulli on obtient que V est équivalente par ligne à

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & 1 & x_2+x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_2^k x_1^{n-2-k} \\ 0 & 1 & x_3+x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_3^k x_1^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & x_n+x_1 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_n^k x_1^{n-2-k} \end{pmatrix}$$

On effectue la transvection par colonne

$$C_3 \leftarrow C_3 - x_1 C_2$$

on obtient que V est équivalente par lignes et colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & x_2 & x_1^2+x_1x_2+x_2^2 \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_2^k x_1^{n-2-k} & \\ 0 & 1 & x_3 & x_1^2+x_1x_3+x_3^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_3^k x_1^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & x_n & x_1+x_nx_1+x_n^2 \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_n^k x_1^{n-2-k} & \end{pmatrix}$$

on effectue ensuite

$$C_4 \leftarrow C_4 - x_1 C_3 - x_1^2 C_2$$

on obtient que V est équivalente par lignes et colonnes à

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_2^k x_1^{n-2-k} \\ 0 & 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_3^k x_1^{n-2-k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & \sum_{k=0}^{n-2} x_n^k x_1^{n-2-k} \end{pmatrix}$$

et en continuant on a donc V équivalente par ligne et par colonne à la matrice par blocs

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & V(x_2,...,x_n) \end{pmatrix}.$$

Or par hypothèse de récurrence $V(x_2,...,x_n)$ est inversible car $x_2,...,x_n$ deux à deux distincts, d'où $\tilde{V}$ est inversible (car d'inverse par blocs $\begin{pmatrix} 1 & -LV(x_2,...,x_n)^{-1} \\ 0 & V(x_2,...,x_n)^{-1} \end{pmatrix}$) et donc V est inversible.

- ▷ **Conclusion** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x_1,...,x_n$ sont deux à deux distincts, alors $\boxed{V(x_1,...,x_n) \text{ est inversible}}$.

▷ **Autres méthodes**: on verra plus tard dans l'année d'autres preuves que V est inversible, par exemple par son calcul de déterminant (plusieurs preuves possibles ici), par étude de l'application $\begin{array}{ccc} \text{eval} : \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C}^n \\ P & \mapsto & (P(x_1),...,P(x_n)) \end{array}$, par des choix de base de $C_n[X]$.

Solution pour l'exercice 33 . Énoncé p. 14 (Matrices compagnons)

Notons pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où le 1 est en position j.

On rappelle que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, AE_j est la j-ème colonne de A.

On a par produit matriciel (produit d'une matrice par un vecteur de la base canonique)

$$\forall j \in [\![1,n-1]\!], \mathcal{C}_P E_j = E_{j+1}$$

et

$$\mathcal{C}_P E_n = \sum_{i=1}^{n} -a_{i-1} E_{i-1}.$$

Par récurrence finie sur k on obtient donc

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \mathcal{C}_P^k E_1 = E_{k+1}.$$

- ▷ **Initialisation**: on a $I_n E_1 = E_{1+0}$.
- ▷ **Hérédité**: soit $k \in [\![0,n-2]\!]$ et supposons que $\mathcal{C}_P^k E_1 = E_{k+1}$.

  Alors

$$\mathcal{C}_P^{k+1} E_1 = \mathcal{C}_P \mathcal{C}_P^k E_1 = \mathcal{C}_P E_{k+1} = E_{k+2}.$$

- ▷ **Conclusion**: par récurrence finie

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n-1]\!], \mathcal{C}_P^k E_1 = E_{k+1}}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}_P) E_1 &= \mathcal{C}_P^n E_1 + \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{C}_P^k E_1 \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} a_i E_{i+1} + \sum_{k=0}^{n-1} E_{k+1} \\ &= 0_n. \end{aligned}$$

Et pour $j \in [\![1, n]\!]$

$$P(\mathcal{C}_P)E_j = P(\mathcal{C}_P)\mathcal{C}_P^{j-1}E_1 = \mathcal{C}_P^{j-1}P(\mathcal{C}_P)E_1 = 0_n.$$

Comme toutes les colonnes de $P(\mathcal{C}_P)$ sont nulles, on a $\boxed{P(\mathcal{C}_P) = 0_n}$.

Montrons en fait le résultat suivant plus fort que l'énoncé:

Pour tout polynôme $T \in \mathbb{K}[X]$, $T(\mathcal{C}_P) = 0_n$ ssi P divise T (c'est à dire il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tq $T = PQ$).

Soit $T \in \mathbb{K}[X]$

- ▷ $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons T divise P.

  Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $T = PQ$.

  D'où $T(\mathcal{C}_P) = \underbrace{P(\mathcal{C}_P)}_{0_{n,n}} Q(\mathcal{C}_P) = 0_{n,n}$ et donc $\boxed{T \text{ annule } \mathcal{C}_P.}$
- ▷ $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que T annule $\mathcal{C}_P$.

  Soient Q, R le quotient et le reste de la division euclidienne de T par P.

  Alors $T = PQ + R$ et $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

  En particulier $T(\mathcal{C}_P) = P(\mathcal{C}_P)Q(\mathcal{C}_P) + R(\mathcal{C}_P)$ et comme P et T annulent $\mathcal{C}_P$ on en déduit

  $$R(\mathcal{C}_P) = 0_{n,n}.$$

  Avec $R = \sum_{k=0}^{n-1} r_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on a donc

  $$\sum_{k=0}^{n-1} r_k \mathcal{C}_P^k = 0_{n,n}$$

  et en particulier

  $$\sum_{k=0}^{n-1} r_k \mathcal{C}_P^k E_1 = 0_n$$

  c'est à dire

  $$\sum_{k=0}^{n-1} r_k E_{k+1} = 0_n.$$

  D'où (en considérant chaque coordonnées)

  $$\forall j \in [\![1, n]\!], r_{j-1} = 0.$$

  Donc $R = 0$.

  Le reste étant nul on a bien $\boxed{P \text{ divise } T}$.

En particulier on a

$$\boxed{\forall T \in \mathbb{K}[X], \deg(T) < n \Rightarrow T(\mathcal{C}_P) \neq 0_n}.$$