Relations

Énoncés 2
Indications 17
Solutions 22

Énoncés

Exercice 1 (◔★♣ Relation induite)
Soient E un ensemble, $\mathcal{R}$ une relation sur E.

Soit $A \subset E$. On appelle relation induite par $\mathcal{R}$ sur A la relation $\mathcal{R}_{|A}$ définie par

$$\forall (x,y) \in A^2, x\mathcal{R}_{|A}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y.$$

Montrer que si $\mathcal{R}$ est réflexive (resp. transitive, symétrique, antisymétrique) alors $\mathcal{R}_{|A}$ l'est aussi.

Indication p. 17

Exercice 2 (◔★ Égalité)
Déterminer toutes les relations qui sont des relations d'ordre et des relations d'équivalence.

Indication p. 17

Exercice 3 (◔★ Un peu de relations formelles)
Soit E une ensemble.

1. Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E réflexive et transitive.

   On définit une relation $\mathcal{S}$ sur E par

   $$\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{S}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x).$$

   Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.
2. Une relation $\mathcal{R}$ sur E est dite circulante ssi

   $$\forall (x,y,z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow (z\mathcal{R}x).$$

   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence **ssi** c'est une relation circulante et réflexive.
3. Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations sur E.

   On définit une relation sur E par $\mathcal{S}$ sur E par

   $$\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{S}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}_1y \text{ et } x\mathcal{R}_2y).$$

   Montrer que **si** $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont réflexives (resp. transitives/symétriques/antisymétriques) **alors** $\mathcal{S}$ est réflexive (resp. transitive/symétrique/antisymétrique)

Indication p. 17

Exercice 4 (◔★ Tiré en arrière d'une relation)
Soient E et F deux ensembles, $\mathcal{R}$ une relation sur F et $\varphi : E \to F$.

On définit une relation sur $\mathcal{R}^\varphi$ par

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \mathcal{R}^\phi x_2 \Leftrightarrow \phi(x_1)\mathcal{R}\phi(x_2).$$

1. Montrer que **si** $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence **alors** $\mathcal{R}^\varphi$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que **si** φ est injective et $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre **alors** $\mathcal{R}^\varphi$ est une relation d'ordre.

Indication p. 17

Exercice 5 (◔★ Tiré en arrière d'une relation II)
On utilise dans cet exercice les mêmes notations que dans l'exercice 4. Soit E un ensemble. On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'ordre $\subset$ et de la relation d'équivalence $=$.

1. Soit $\lhd$ une relation d'ordre sur E. On définit

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to \mathcal{P}(E) \\ x &\mapsto \{y \in E \mid y \lhd x\} \end{aligned}$$

   Montrer que $\lhd = (\subset^\varphi)$.
2. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E. On définit

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to \mathcal{P}(E) \\ x &\mapsto \{y \in E \mid y \sim x\} \end{aligned}$$

   Montrer que $\sim = (=^\varphi)$.

Solution p. 22

Exercice 6 (◔★ Relation inverse, relation contraire)
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E. On définit

- ▷ La relation inverse de $\mathcal{R}$, notée $\mathcal{R}^\top$ par

$$\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R}^\top y) \Leftrightarrow (y \mathcal{R} x).$$

- ▷ La relation contraire de $\mathcal{R}$, notée $\overline{\mathbb{R}}$ par

$$\forall (x, y) \in E^2, \left(x \overline{R} y\right) \Leftrightarrow \neg(x \mathcal{R} y).$$

1. Soit $\leq$ l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. Expliciter $\leq^\top$ et $\overline{\leq}$. Commenter.
2. Montrer que **si** $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, **alors** $\mathcal{R}^\top$ est une relation d'ordre.
3. Que dire de $\mathcal{R}^\top$ **si** $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence ?

Indication p. 17

Exercice 7 (◔★ Un tout petit peu de comptage)
Soit E un ensemble de n éléments.

- ▷ Combien existe-t-il de relations sur E ?
- ▷ Combien existe-t-il de relations réflexives sur E ?
- ▷ Combien existe-t-il de relations symétriques sur E ?

Indication p. 17

Exercice 8 (◑★ Composée de relations)
Soit E un ensemble.

Étant données $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux relations sur E, on définit la relation composée de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, notée $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ par

$$\forall (x,z) \in E^2, (x\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 z) \Leftrightarrow (\exists y \in E, x\mathcal{R}_1 y \text{ et } y\mathcal{R}_2 z).$$

1. Montrer que **si** $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont réflexives **alors** $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ est réflexive.
2. Montrer que **si** $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont symétriques et que $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ **alors** $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ est symétrique.
3. Donner un exemple où $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont symétriques (resp. antisymétriques) et $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ n'est pas symétrique (resp. antisymétrique).
4. Montrer que **si** $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence **alors** $\mathcal{R}\mathcal{R} = \mathcal{R}$.
5. Montrer que **si** $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre **alors** $\mathcal{R}\mathcal{R} = \mathcal{R}$.

Indication p. 17

Exercice 9 (◔★ Relation d'ordre sur les relations)
Soit E un ensemble. On note $\mathrm{Rel}(E)$ l'ensemble des relations sur E.

On munit $\mathrm{Rel}(E)$ de la relation $\subset$ définie

$$\forall (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \in \mathrm{Rel}(E),\ \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2 \Leftrightarrow \big(\forall (x,y) \in E^2, x\mathcal{R}_1 y \Rightarrow x\mathcal{R}_2 y\big).$$

Montrer que $\subset$ est une relation d'ordre.

Indication p. 17 · Solution p. 22

Exercice 10 (◑★ Fermeture transitive)
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E.

On définit une relation $\mathcal{R}^\star$ sur E par

$$\forall (x,y)\in E^2,\ x\mathcal{R}^\star y \quad\Leftrightarrow\quad \exists n\in\mathbb{N}^*, \exists(\xi_0,...,\xi_n)\in E^{n+1}, \begin{cases} \xi_0 = x \\ \forall k\in[\![0,n-1]\!], \xi_k\mathcal{R}\xi_{k+1} \\ \xi_n = y \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathcal{R}^\star$ est transitive.
2. Montrer que **si** $\mathcal{R}$ est réflexive **alors** $\mathcal{R}^\star$ est réflexive.
3. Montrer que **si** $\mathcal{R}$ est symétrique **alors** $\mathcal{R}^\star$ est symétrique.
4. Montrer que $\mathcal{R}^\star$ est la plus petite (au sens de l'exercice 9) relation transitive majorant $\mathcal{R}$.

Indication p. 18

Exercice 11 (◔☆ Attention à l'existence)
Existe-t-il des relations symétriques, transitives et non réflexives ?

Indication p. 18

Exercice 12 (◔★ Décomposition symétrique/antisymétrique)
Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E.

Montrer qu'il existe deux relations $\mathcal{R}^S$ et $\mathcal{R}^T$ telles que
- ▷ $\mathcal{R}^S$ symétrique,
- ▷ $\mathcal{R}^T$ antisymétrique,
- ▷ $\forall (x,y)\in E^2, (x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow \big(x\mathcal{R}^S y \ \text{ ou } \ x\mathcal{R}^T y\big)$.

Que dire de l'unicité de $\mathcal{R}^T$ et $\mathcal{R}^S$?

Indication p. 18

Exercice 13 (◔★ Un petit plongement et tiré en arrière)
Soit $(E, \lhd)$ un ensemble ordonné.

On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'ordre $\subset$.

Montrer que

$$\begin{aligned}\sigma : E &\to \mathcal{P}(E)\\ x &\mapsto \{y \in E \mid y \lhd x\}\end{aligned}$$

est croissante.

Indication p. 18 · Solution p. 23

Exercice 14 (◔★ Un exemple d'ordre)
On définit une relation $\lhd$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \; x \blacktriangleleft y \;\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, y = x^n.$$

1. Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre.
2. Est-ce un ordre total ?

Indication p. 18 · Solution p. 23

Exercice 15 (◔★ Quelques propriétés des infs et sups)
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.

1. Soit A une partie E non vide.

   On suppose que A admet une borne supérieure et une borne inférieure.

   Montrer que $\inf(A) \leq \sup(A)$.
2. Pour $(x,y) \in E^2$, on note $x < y$ ssi $x \leq y$ et $x \neq y$.

   Soient A et B deux parties de E.

   On suppose que A admet une borne supérieure et B admet une borne inférieure.

   Montrer que **si** $\sup(B) < \inf(A)$ **alors** $A \cap B = \varnothing$.
3. Soient A et B des ensembles admettant tous les deux des bornes supérieures et inférieures.

   Montrer que **si** $A \subset B$ **alors** $\sup(A) \leq \sup(B)$ et $\inf(A) \geq \inf(B)$.

Indication p. 18

Exercice 16 (◔★ Minmax et maxmin)
Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice à n lignes et p colonnes.

1. Calculer

$$\max_{i\in[\![1,n]\!]}\left(\min_{j\in[\![1,p]\!]}\left(a_{i,j}\right)\right)$$

et

$$\min_{j\in[\![1,p]\!]}\left(\max_{i\in[\![1,n]\!]}\left(a_{i,j}\right)\right)$$

dans le cas $n=p=2$ et avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que de manière générale

$$\max_{i\in[\![1,n]\!]}\left(\min_{j\in[\![1,p]\!]}\left(a_{i,j}\right)\right) \leq \min_{j\in[\![1,p]\!]}\left(\max_{i\in[\![1,n]\!]}\left(a_{i,j}\right)\right).$$

Indication p. 18

Exercice 17 (◔★ Infsup et supinf)
Soit $(E,\leq)$ un ensemble ordonné.

On suppose que toute partie de E admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Soient I et J deux ensembles d'indices et $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de E.

Montrer que

$$\sup_{i\in I}\left(\inf_{j\in J}\left(a_{i,j}\right)\right) \leq \inf_{j\in J}\left(\sup_{i\in I}\left(a_{i,j}\right)\right).$$

Indication p. 18

Exercice 18 (◔★ Prolongement)
Soit E un ensemble.

On appelle application partielle de E vers F un couple (I, f) où $I \subset E$ et $f \in \mathcal{F}(I, F)$.

Étant données deux applications partielles (I, f) et (J, g) on note

$$f \prec g \text{ ssi } I \subset J \text{ et } g_{|I} = f.$$

Montrer la relation $\preceq$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des applications partielles.

Indication p. 18

Exercice 19 (◔★ Relation d'inclusion sur les segments)
On considère $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel $\leq$.

Étant donnés a et b deux réels on rappelle que le **segment** $[a, b]$ est défini par

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des segments de $\mathbb{R}$,que l'on munit de la relation d'ordre de l'inclusion $\subset$.

1. Soient $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$ deux segments. Montrer que
$$\sup(\{[a_1, b_1], [a_2, b_2]\}) = [\min(a_1, a_2), \max(b_1, b_2)]$$
$$\inf(\{[a_1, b_1], [a_2, b_2]\}) = [\max(a_1, a_2), \min(b_1, b_2)]$$
2. Montrer que toute partie finie non vide de $\mathcal{S}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.
3. Montrer que toute partie non vide de $\mathcal{S}$ admet une borne inférieure.

   Montrer que toute partie majorée non vide de $\mathcal{S}$ admet une borne supérieure.

Indication p. 18

Exercice 20 (◔★♣ Opérations et inf/sup)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soient f, g des fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$ et λ un réel.

1. Montrer que
   - ▷ Si $\lambda > 0$,
   $$\sup_{x\in I}(\lambda f(x)) = \lambda \sup_{x\in I}(f(x)).$$
   - ▷ Si $\lambda < 0$,
   $$\sup_{x\in I}(\lambda f(x)) = \lambda \inf_{x\in I}(f(x)).$$

   Énoncer sans démonstration des résultats similaires pour $\inf_{x\in I}(\lambda f(x))$.
2. Montrer que
   $$\sup_{x\in I}(f(x)+g(x)) \leq \sup_{x\in I}(f(x)) + \sup_{x\in I}(g(x)).$$

   Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Indication p. 18

Exercice 21 (◔★ Plus petite fonction plus grande croissante)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée.

On définit une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{f}(x) = \sup(\{f(t), t \in]-\infty, x]\})$$

1. Illustrer graphiquement cette définition.
2. Montrer que
   - ▷ $f \leq \tilde{f}$,
   - ▷ $\tilde{f}$ est croissante.
3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
   - ▷ $f \leq g$,
   - ▷ g est croissante.

   Montrer que $\tilde{f} \leq g$.

Indication p. 19

Exercice 22 (◑★ Distance à une partie)
Soit $A \subset \mathbb{C}$ une partie non vide de $\mathbb{C}$.

Pour $x \in \mathbb{C}$ on appelle la *distance de x à A* le réel $d(x, A)$ défini par

$$d(x, A) = \inf_{a \in A}(|x - a|).$$

1. Justifier l'existence de $d(x, A)$ et représenter graphiquement cette notion.
2. Montrer que **si** $x \in A$ **alors** $d(x, A) = 0$. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$$

et représenter graphiquement cette inégalité.

Indication p. 19

Exercice 23 (◔★ Trace sur une partie)
Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit une relation $\simeq_A$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{P}(E))^2, X \simeq_A Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A.$$

1. Montrer que $\simeq_A$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
2. Expliciter une bijection entre $\mathcal{P}(E)/\simeq_A$ et $\mathcal{P}(A)$.

Indication p. 19

Exercice 24 (◔★ Quelques exemples d'équivalences)
Dans cet exercice, on appelle fonction réelle toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit la relation $\equiv_A$ sur l'ensemble des fonctions réelles par
$$\forall (f,g)\ f \equiv_A g \Leftrightarrow f_{|A} = g_{|A}.$$
Montrer que $\equiv_A$ est une relation d'équivalence.
2. On définit la relation $\simeq$ sur l'ensemble des fonctions réelles par
$$\forall (f,g) \in E^2, f \simeq g \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq g(x)\} \text{ est fini.}$$
Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence.
3. On définit la relation $\sim_{+\infty}$ sur l'ensemble des fonctions réelles ne s'annulant pas par
$$\forall (f,g)\ f \sim_{+\infty} g \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \to 1 \text{ quand } x \to +\infty.$$
Montrer que $\sim_{+\infty}$ est une relation d'équivalence.
4. On définit la relation $\propto$ sur l'ensemble des fonctions réelles par
$$\forall (f,g)\ f \propto g \ \Leftrightarrow\ \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda g(x).$$
Montrer que $\propto$ est une relation d'équivalence.

Indication p. 19

Exercice 25 (◔☆ Triangles semblables)
On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ du plan sont directement semblables ssi il existe une similitude directe φ telle que $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ et $C' = \varphi(C)$.

Montrer que la relation «être directement semblable» est une relation d'équivalence sur l'ensemble des triangles.

Indication p. 19

Exercice 26 (◔★♣ Équivalence et partitions)
Soit E un ensemble.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de E.

Montrer qu'il existe une et unique relation d'équivalence $\sim$ sur E telle que
$$E/\sim = \{A_i, i \in I\}.$$

Indication p. 19 · Solution p. 24

Exercice 27 (◑★♠ Théorèmes d'isomorphismes)
Soient E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

On définit une relation $\equiv_f$ sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall (x,y) \in E^2, x \equiv_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

1. Montrer que $\equiv_f$ est une relation d'équivalence sur E.
2. On note $\pi : E \to E/\equiv_f$ l'application qui à chaque élément de E associe sa classe d'équivalence (c'est à dire pour tout $x \in \mathbb{E}$, $\pi(x) = \mathrm{Cl}(x)$).

   Montrer qu'il existe une et unique application

   $$\tilde{f} : E/\equiv_f \to F$$

   telle que

   $$f = \tilde{f} \circ \pi.$$
3. Montrer que $\tilde{f}$ est injective.
4. On définit $\hat{f} : E/\equiv_f \to f^{\to}(E)$ par $\hat{f} : \xi \mapsto \tilde{f}(\xi)$.

   Expliquer pourquoi $\hat{f}$ est bien définie et montrer que

   $$\hat{f} \text{ est une bijection entre } E/\equiv_f \text{ et } f^{\to}(E).$$
5. Faire un schéma.

Indication p. 19

Exercice 28 (◑☆ Nombre d'équivalences)
Soit E un ensemble à n éléments.

Calculer le nombre de relations d'équivalences sur E dans les cas où $n \in [\![1,6]\!]$.

Indication p. 19 · Solution p. 25

Exercice 29 (◔★ Vers équivalence et similitude)
Soient E et F des ensembles.

On note $\mathcal{S}(E)$ (resp. $\mathcal{S}(F)$) l'ensemble des bijections de E vers E (resp. de F vers F).

1. On définit une relation $\equiv$ sur $\mathcal{F}(E,F)$ par

$$\forall (u,v) \in (\mathcal{F}(E,F))^2,\ u \equiv v \ \Leftrightarrow\ \exists (p,q) \in \mathcal{S}(E)\times\mathcal{S}(F), u = q\circ v\circ p^{-1}.$$

Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence.

2. On définit une relation $\sim$ sur $\mathcal{F}(E,E)$ par

$$\forall (u,v) \in (\mathcal{F}(E,E))^2,\ u \sim v \ \Leftrightarrow\ \exists p \in \mathcal{S}(E), u = p\circ v\circ p^{-1}.$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Indication p. 19 · Solution p. 27

Exercice 30 (◔★ Égalité APCR)
On définit une relation $\simeq$ sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par

$$\forall \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}},(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in \left(\mathcal{R}^{\mathbb{N}}\right)^2, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \simeq (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, u_n = v_n.$$

1. Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence.

2. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites. On suppose

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \simeq (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \text{ et } \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \simeq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ on a

$$f(u_n,a_n) \simeq f(v_n,b_n).$$

Indication p. 20

Exercice 31 (◔★ Noyau, image, équivalence, similitude)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices (complexes) de tailles $n \times n$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices de tailles $n \times n$ inversibles.

Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalences.

1. La relation $\mathcal{R}^k$ définie par
$$\forall (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), A\mathcal{R}^k B \Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), A = PB.$$
2. La relation $\mathcal{R}^i$ définie par
$$\forall (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), A\mathcal{R}^i B \Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), A = BP.$$
3. La relation $\equiv$ définie par
$$\forall (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), A \equiv B \Leftrightarrow \exists P,Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), A = PBQ^{-1}.$$
4. La relation $\sim$ définie par
$$\forall (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), A \sim B \Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), A = PBP^{-1}.$$

Indication p. 20

Exercice 32 (◔★ Un résultat qui se révelera essentiel)
On définit une relation $\sim$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par
$$\forall (A,B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^2,\ A \sim B \Leftrightarrow (\exists U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), A = UBU^{-1})$$
(Cf exercice 31 pour vérifier que c'est bien une relation d'équivalence).

Pour $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ on pose
$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k.$$

Montrer que pour toutes matrices A et B,
$$A \sim B \Rightarrow \forall P \in \mathbb{C}[X], P(A) \sim P(B).$$

Indication p. 20 · Solution p. 29

Exercice 33 (◕☆ L'exercice 98 du livre de M. Deslandes)
On considère $b = 48$ élèves et un professeur de mathématiques. Le professeur de mathématiques choisit secrètement une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Chaque élève joue au jeu suivant:

- ▹ l'élève choisit un entier $k \in \mathbb{N}$; le professeur lui communique alors la valeur de u_k;
- ▹ l'élève peut alors recommencer, en choisissant un entier qu'il n'a pas déjà choisi et ce potentiellement une infinité de fois (ainsi il peut connaître un nombre quelconque, potentiellement infini de valeurs de la suite);
- ▹ l'élève choisit alors un entier m qu'il n'a pas déjà choisi et doit deviner la valeur de u_m. Il gagne si sa réponse est correcte et perd sinon.

Les élèves ne communiquent pas entre eux et n'entendent pas les questions des autres élèves mais peuvent mettre au point une stratégie commune avant le début du jeu.

Proposer une stratégie permettant à au moins $b-1$ élèves de gagner à coup sûr.

Indication p. 20

Exercice 34 (◕☆ Un inf de sup sur un cercle)
On munit $\mathcal{R}$ de l'ordre usuel $\leq$.

Déterminer

$$\inf_{\theta\in]0,\pi[}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(\sin(n\theta)).$$

Indication p. 20

Exercice 35 (◔★ Somme de deux ensembles et sup)
On munit $\mathcal{R}$ de l'ordre usuel $\leq$.

Soient A et B deux parties de $\mathcal{R}$.

On note

$$A \boxplus B = \{a+b, (a,b) \in A \times B\}.$$

Montrer que

$$\sup(A \boxplus B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Indication p. 20

Exercice 36 (◔★ Vérification des définitions)
Pour chacune des relations suivantes déterminer si elle est réflexive/transitive/symétrique/anti-symétrique.

Si il s'agit d'une relation d'ordre déterminer si l'ordre est total, et caractériser les éléments maximaux/minimaux.

Si il s'agit d'une relation d'équivalence, caractériser les classes d'équivalences.

1. Sur $\mathbb{R}$ la relation $\ll$ définie par: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \ll y \Leftrightarrow x \leq y - 10^{23}$.
2. Sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la relation $\bowtie$ définie par $\forall (f,g) \in \mathbb{R}^2, f \bowtie g \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$.
3. Sur $M_n(\mathbb{R})$ la relation $\rtimes$ définie par: $\forall (A,B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), A \rtimes B \Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), A = PB$.
4. Sur $\mathbb{C}$ la relation $\doteqdot$ définie par: $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, x \doteqdot y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, x^n = y^n$.
5. Sur $\mathbb{R}$ la relation $\underline{\ll}$ définie par: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \underline{\ll} y \Leftrightarrow x \leq y - 10^{23}$ ou $x = y$.
6. Sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\ltimes$ définie par $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \ltimes B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing$.
7. Sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\gtrless$ définie par: $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \lessgtr B \Leftrightarrow (A \subset B$ ou $B \subset A)$.
8. Sur $\mathbb{R}^n$ la relation $\approx$ définie par: $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, x \approx y \Leftrightarrow |\ \{i \in [\![1,n]\!] \mid x_i = y_i\}\ | \geq n-1$.
9. Sur $\mathbb{C}$ la relation $\doteq$ définie par: $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, x \doteq y \Leftrightarrow |x-y| \leq 1$.
10. Sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\sqsubset$ définie par $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E)), A \sqsubset B \Leftrightarrow$ il existe une injection de A dans B.

Indication p. 21

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Relation induite)
Rédaction automatique.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Égalité)
Remarquer que l'égalité convient.

Il faut à la fois la symétrie et l'antisymétrie, ce qui est assez contraint.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Un peu de relations formelles)
Faire des schémas et une rédaction automatique.

Notamment pour le **2**, faire des petits schémas avec trois points et des flèches pour visualiser le caractère circulant.

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Tiré en arrière d'une relation)
Rédaction automatique.

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Relation inverse, relation contraire)

1. Remarque que ce n'est pas la même chose.
2. Rédaction automatique.
3. La même.

Une remarque importante est que l'ordre « inverse » est aussi une relation d'ordre, et que par exemple une fonction décroissante n'est rien d'autre qu'une fonction croissante pour l'ordre inverse à l'arrivée.

Indication 7 · Énoncé p. 4 (Un tout petit peu de comptage)
Faire un schéma d'un tableau $n \times n$.

- ▹ Choisir une relation revient à choisir pour chaque couple $(x, y) \in E^2$ si ils sont en relation ou non, c'est à dire choisir un booléen pour chaque case du tableau.
- ▹ Cela contraint la diagonale.
- ▹ Le tableau doit être symétrique par rapport à la diagonale, compter le nombre d'éléments sur-diagonaux.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Composée de relations)
Rédaction automatique.

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Relation d'ordre sur les relations)
Que dire si on identifie une relation à son graphe, c'est à dire à l'ensemble des couples (x, y) tels que $x\mathcal{R}y$?

Solution p. 22

Indication 10 · Énoncé p. 5 (Fermeture transitive)
Faire des schémas, $\mathcal{R}^*$ revient à s'autoriser à faire des « chemins » de longueur quelconque dans le graphe orienté associé à $\mathcal{R}$.

Indication 11 · Énoncé p. 5 (Attention à l'existence)
RAS

Indication 12 · Énoncé p. 5 (Décomposition symétrique/antisymétrique)
Procéder par analyse-synthèse pour l'existence, et faire des schémas.

Indication 13 · Énoncé p. 6 (Un petit plongement et tiré en arrière)
Rédaction automatique. C'est un exercice important à méditer.

Solution p. 23

Indication 14 · Énoncé p. 6 (Un exemple d'ordre)
Encore une fois rédaction automatique, en prenant garde à ce que n dépend de x et de y.

Solution p. 23

Indication 15 · Énoncé p. 6 (Quelques propriétés des infs et sups)
1. Prendre un élément car l'ensemble est non vide.
2. Contraposée.
3. Rédaction automatique.

Indication 16 · Énoncé p. 7 (Minmax et maxmin)
Faire un schéma.

Procéder par rédaction automatique ou choisir un élément.

Indication 17 · Énoncé p. 7 (Infsup et supinf)
Procéder par rédaction automatique en remarquant que les indices sont muets.

Indication 18 · Énoncé p. 8 (Prolongement)
RAS, rédaction automatique.

Remarquer le lien avec le cours sur les fonctions usuelles, notamment sur, si il existe, le maximum d'une chaîne de fonctions partielles.

Indication 19 · Énoncé p. 8 (Relation d'inclusion sur les segments)
Encore une fois, schémas et rédaction automatique.

Indication 20 · Énoncé p. 9 (Opérations et inf/sup)
Rédaction automatique, on rappelle que les passages au sup se font toujours en deux temps.

Indication 21 · Énoncé p. 9 (Plus petite fonction plus grande croissante)
Le plus important est le schéma, puis c'est juste de la rédaction automatique.

Indication 22 · Énoncé p. 10 (Distance à une partie)
1. RAS.
2. Pour la réciproque regarder par exemple $d(1,]0, 1[)$.
3. Montrer par inégalité triangulaire et passage au sup (toujours en deux temps) que

$$d(x, A) \leq d(y, A) + |x - y|.$$

Indication 23 · Énoncé p. 10 (Trace sur une partie)
Que dire de $X \mapsto X \cap A$.

Indication 24 · Énoncé p. 11 (Quelques exemples d'équivalences)
1. RAS.
2. Un ensemble inclus dans l'union de deux ensembles finis, est fini.
3. L'inverse de 1 est 1, le produit de 1 est 1.
4. Inverse de λ, produit des λs et $\lambda = 1$.

Indication 25 · Énoncé p. 11 (Triangles semblables)
Remarquer (et c'est un point essentiel et général) que:
- ▷ l'identité est une similitude directe,
- ▷ la composée de deux similitudes directes est une similitude directe,
- ▷ la bijection réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.

Indication 26 · Énoncé p. 11 (Équivalence et partitions)
Par exemple par analyse synthèse définir la relation d'équivalence $\sim$ en fonction de l'appartenance commune à un A_i.

Solution p. 24

Indication 27 · Énoncé p. 12 (Théorèmes d'isomorphismes)
Le point important est la bonne définition de $\tilde{f}$ et $\hat{f}$, c'est à dire que cela ne dépend pas du représentant choisi, mais c'est justement la relation d'équivalence. Une fois cela compris ce n'est plus que de la rédaction automatique.

Indication 28 · Énoncé p. 12 (Nombre d'équivalences)
Ici on peut tout calculer à la main. Pour la culture ces nombres s'appellent nombre de Bell, et ne s'expriment pas facilement en fonction des expressions combinatoires usuelles.

Solution p. 25

Indication 29 · Énoncé p. 13 (Vers équivalence et similitude)
Encore de la rédaction automatique, en se rappelant que $(p_1 \circ p_2)^{-1} = p_2^{-1} \circ p_1^{-1}$.

Solution p. 27

Indication 30 · Énoncé p. 13 (Égalité APCR)
Remarquer que si un N convient alors tout plus grand convient. Et qu'il est donc toujours possible de prendre $\max(N_1, N_2)$ pour une conjonction (cf TDs de logique et de suites).

Indication 31 · Énoncé p. 14 (Noyau, image, équivalence, similitude)
RAS: rédaction automatique.

Indication 32 · Énoncé p. 14 (Un résultat qui se révelera essentiel)
Montrer d'abord pour les puissances puis remarquer que $P(A_1 + A_2)P^{-1} = PA_1P^{-1} + PA_2P^{-1}$.

Solution p. 29

Indication 33 · Énoncé p. 15 (L'exercice 98 du livre de M. Deslandes)
On suppose que les élèves sont capables d'utiliser l'axiome du choix.

À l'aide de cet axiome ils peuvent alors décider d'un système de représentant commun pour la relation d'équivalence «être égal à partir d'un certain rang».

Considérer alors les b les suites extraites b suites extraites $\left(u_{bq+r}\right)_{q\in\mathbb{N}}$ (pour $r \in [\![0, b-1]\!]$) et les b rangs $(n_1, ..., n_b)$ à partir desquels ces suites sont égales à leurs représentant.

Connaître une majoration du rang permet de gagner (pourquoi ?) et on une méthode pour que tous excepté au plus un trouve un majorant est de prendre le maximum des $b-1$ autres.

Indication 34 · Énoncé p. 15 (Un inf de sup sur un cercle)
Soit $\theta \in]0, \pi[$, faire un schéma de tous les angles $n\theta$ et de leurs sinus.

Au moins deux options:

- ▷ Procéder par disjonction de cas: **si** $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ montrer que le suprémum est 1. **Sinon** montrer que le suprémum s'exprime en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ (faire un schéma).
- ▷ Procéder par disjonction de cas selon l'appartenance de θ à un secteur angulaire $]0, \frac{\pi}{3}[$, $]\frac{\pi}{3}, 2\frac{\pi}{3}[$ ou $]2\frac{\pi}{3}, \pi[$.

En déduire $\frac{1}{2}$.

Indication 35 · Énoncé p. 15 (Somme de deux ensembles et sup)
Procéder par double inégalité.

Dans un sens il suffit de montrer que pour tous $a \in A$ et $b \in B$ on a $a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Dans l'autre sens on peut constater que montrer que $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A \boxplus B)$ revient à montrer que $\sup(A) \leq \sup(A \boxplus B) - \sup(B)$.

Indication 36 · Énoncé p. 16 (Vérification des définitions)
Ne pas oublier que pour montrer qu'une propriété universelle n'est pas vérifiée, il faut fournir un contre-exemple.

Solutions

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 3 (Tiré en arrière d'une relation II)

1. On veut montrer

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \lhd x_2 \ \Leftrightarrow\ \{y \in E \mid y \lhd x_1\} \subset \{y \in E \mid y \lhd x_2\}$$

c'est à dire

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \lhd x_2 \ \Leftrightarrow\ (\forall y \in E, y \lhd x_1 \Rightarrow y \lhd x_2)$$

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. Procédons par double implication.

▷ $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $x_1 \lhd x_2$.

Soit $y \in E$.

Par transitivité on a alors $y \lhd x_1 \Rightarrow y \lhd x_2$.

▷ $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\forall y \in E, y \lhd x_1 \Rightarrow y \lhd x_2$.

Comme en particulier $x_1 \lhd x_1$ (réflexivité) on en déduit que $x_1 \lhd x_2$.

On a donc bien montré

$$\boxed{\lhd = \binom{\varphi}{\subset}}$$

2. On veut montrer

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \sim x_2 \ \Leftrightarrow\ \{y \in E \mid y \sim x_1\} \subset \{y \in E \mid y \sim x_2\}$$

c'est un résultat du cours (cf cours): deux éléments sont équivalents ssi leurs classes d'équivalence sont égales.

Donc

$$\boxed{\sim = \binom{\varphi}{=}}.$$

Solution pour l'exercice 9 · Énoncé p. 4 · Indication p. 17 (Relation d'ordre sur les relations)

Preuve en une phrase

On peut remarquer qu'une $\subset$ est la relation d'ordre induit par $\subset$ sur $\mathrm{Rel}(E) \subset \mathcal{P}(E \times E)$, et par conséquent est $\boxed{\text{une relation d'ordre}}$.

Variante

Si on ne remarque pas cela.

▷ **Réflexivité**

Soit $\mathcal{R} \in \mathrm{Rel}(E)$.

On a bien $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{R}y$.

▷ **Transitivité**

Soient $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3 \in \mathrm{Rel}(E)$ telles que $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_3$.

Soit $(x, y) \in E^2$.

Supposons $x\mathcal{R}_1 y$. Comme $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ on en déduit $x\mathcal{R}_2 y$. Comme $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_3$ on en déduit $x\mathcal{R}_3 y$.

Donc $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_3$.

▷ **Antisymétrie**

Soient $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ deux relations d'ordre telles que $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_1$.

Soit $(x, y) \in E^2$. On a alors $x\mathcal{R}_1 y$ ssi $x\mathcal{R}_2 y$.

On a donc bien $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

Donc $\boxed{\subset \text{ est une relation d'ordre sur } \mathrm{Rel}(E).}$

Solution pour l'exercice 13 · Énoncé p. 6 · Indication p. 18 (Un petit plongement et tiré en arrière)

Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $x_1 \lhd x_2$.

Soit $y \in E$ tel que $y \lhd x_1$.

Par transitivité $y \lhd x_2$.

Par conséquent

$$\{y \in E \mid y \lhd x_1\} \subset \{y \in E \mid y \lhd x_2\}.$$

On a donc bien montré que la fonction est $\boxed{\text{croissante}}$.

Solution pour l'exercice 14 · Énoncé p. 6 · Indication p. 18 (Un exemple d'ordre)

1. Vérifions que $\lhd$ est réflexive, transitive, antisymétrique.

▷ **Réflexivité**

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Avec $n = 1 \in \mathbb{N}^*$ on a bien $x = x^1$ d'où $x \lhd x$.

▷ **Transitivité**

Soient $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 \lhd x_2$ et $x_2 \lhd x_3$.

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_1 = (x_2)^{n_1}$ (fixons le).

Il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_2 = (x_3)^{n_2}$ (fixons le).

Alors $x_1 = \left((x_3)^{n_2}\right)^{n_1} = (x_3)^{n_1 n_2}$.

Comme $n_1 n_2 \in \mathbb{N}^*$ on a donc bien $x_1 \lhd x_3$.

▷ **Antisymétrie**

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x_1 \lhd x_2$ et $x_2 \lhd x_1$.

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_1 = (x_2)^{n_1}$ (fixons le).

Il existe $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_2 = (x_1)^{n_2}$ (fixons le).

Alors $x_1 = \left((x_1)^{n_2}\right)^{n_1} = (x_1)^{n_1 n_2}$.

On procède alors par disjonction de cas.

▷ Si $x_1 = 1$ alors $x_2 = 1^{n_2}$ et donc $x_1 = x_2$.

▷ Sinon, $n_1 n_2 = 1$ (par exemple car $x_1^{n_1 n_2 - 1} = 1$).

Comme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ on en déduit $n_1 = n_2 = 1$. D'où $x_2 = (x_1)^1$.

Dans tous les cas $x_1 = x_2$.

On a donc bien montré que $\boxed{\lhd \text{ est une relation d“ordre}}$.

2. La relation d'ordre n'est $\boxed{\text{pas totale}}$. En effet par exemple 1 et 2 ne sont pas comparables : 1 n'est pas une puissance strictement positive de 2 et 2 n'est pas une puissance de 1.

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 11 · Indication p. 19 (Équivalence et partitions)
On procède par exemple par **analyse-synthèse**.

▷ **Analyse**

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E telle que

$$E/\sim \;=\; \{A_i, i \in I\}.$$

Soient $x, y \in \mathbb{E}$. On a (cf cours) $x \sim y$ ssi x et y appartiennent à une classe d'équivalence commune, et par conséquent

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists i \in A_i, (x \in A_i \;\text{ et }\; y \in A_i).$$

D'où $\boxed{\text{l'unicité}}$.

▷ **Synthèse**

Définissons une relation $\sim$ sur E par

$$\forall (x,y) \in E^2, x \sim y \Leftrightarrow \exists i \in A_i, (x \in A_i \;\text{ et }\; y \in A_i).$$

▷ Il s'agit bien d'une $\boxed{\text{relation d'équivalence}}$. En effet on a

▷ **Réflexivité**

Soit $x \in E$. Comme $(A_i)_{i\in I}$ recouvre E il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ (fixons le). Alors $x \in A_i$ et $x \in A_i$ d'où $x \sim x$.

▷ **Transitivité**

Soient $x, y, z \in E$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$.

Il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ et $y \in A_i$ (fixons le).

Il existe $j \in I$ tel que $y \in A_j$ et $z \in A_j$ (fixons le).

Alors $y \in A_i \cap A_j$ et en particulier $A_i \cap A_j \neq \varnothing$. Comme la famille $(A_i)_{i\in I}$ est composée de parties deux à deux disjointes, $i = j$.

Donc $x \in A_i = A_j$ et $z \in A_j = A_i$ c'est à dire $x \sim z$.

▷ **Symétrie**

Soient $x, y \in E$ tels que $x \sim y$.

Il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ et $y \in A_i$ (fixons le).

Donc $y \in A_i$ et $x \in A_i$ et donc $y \sim x$.

▷ De plus $\boxed{E/\sim = (A_i)_{i\in I}}$.

Procédons par double inclusion.

▷ $\boxed{\subset}$ Soit $X \in E/\sim$. Il existe $x \in E$ tel que $X = \mathrm{Cl}(x)$ (fixons le).

Alors (comme la famille recouvre E) il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$ (fixons le).

Par le même raisonnement (les $(A_i)_{i\in I}$ sont disjoints) que précédemment on a i unique et pour tout $y \in E$,

$$x \sim y \Leftrightarrow y \in A_i$$

ce qui est la définition de

$$A_i = \mathrm{Cl}(x).$$

▷ $\boxed{\supset}$ Soit $i \in I$.

Comme $A_i \neq \varnothing$, il existe $x \in A_i$ (fixons le).

Par le même raisonnement que précédemment $\mathrm{Cl}(x) = A_i$, et donc $A_i \in E/\sim$.

D'où $\boxed{\text{l'existence}}$.

Solution pour l'exercice 28 · Énoncé p. 12 · Indication p. 19 (Nombre d'équivalences)
Il y a de nombreuses façons de procéder.

Par exemple à l'aide du cours (les classes d'équivalences forment une partition de l'ensemble) et de l'exercice 26 on observe que l'ensemble des classes d'équivalences est en bijection avec l'ensemble des partitions.

On peut alors compter à « manuellement » le nombre de partitions. Quitte à numéroter les éléments, comptons le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$.

▷ Pour $n = 1$ il y a $\boxed{1}$ partition.
▷ Pour $n = 2$ il y a $\boxed{2}$ partitions possibles: $\{\{1, 2\}\}$ et $\{\{1\}, \{2\}\}$ (faire un **schéma**).
▷ Pour $n = 3$ il y a $\boxed{5}$ partitions (faire un **schéma**). Pour les énumérer on peut distinguer selon le nombre de parties:
  ▷ Il y a 1 partitions à une partie (le singleton de l'ensemble entier), $\{\{1, 2, 3\}\}$.
  ▷ Il y a 3 partitions à deux parties (en bijection avec les singletons),$\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$, $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$.
  ▷ Il y a 1 partition à trois parties, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.
▷ Pour $n = 4$ il y a $\boxed{15}$ partitions (faire un **schéma**).
  ▷ Il y a 1 partition à une partie (le singleton de l'ensemble entier).
  ▷ Il y a 5 partitions à deux parties (en bijection avec les singletons).
  ▷ Il y a 6 partions à 3 parties (en bijections avec les ensembles à 2 éléments). En effet la seule façon d'écrire 4 comme la somme de trois entiers non nuls est $4 = 1 + 1 + 2$.
  ▷ Il y a 1 partition à 4 parties.
▷ On peut ensuite continuer à faire de même pour tous les n, guidé par un **schéma**. Pour k fixé on compte le nombre de façon d'écrire n comme la somme (non ordonnée) de k

entiers et on en déduit le nombre de partitions à k éléments (en faisant attention au cas où un même chiffre apparaît plusieurs fois).

- Pour $n = 5$,
  - Comme
  $$5 = 5$$
  il y a $\binom{5}{5} = 1$ partition à une partie.
  - Comme
  $$\begin{aligned} 5 &= 1 + 4 \\ &= 2 + 3 \end{aligned}$$
  il y a $\binom{5}{1}\binom{4}{4} + \binom{5}{2}\binom{3}{3} = 15$ partitions à deux parties.
  - Comme
  $$\begin{aligned} 5 &= 1 + 1 + 3 \\ &= 1 + 2 + 2 \end{aligned}$$
  il y a $\frac{1}{2!}\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{3} + \frac{1}{2!}\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = 25$ partitions à trois parties.
  - Comme
  $$5 = 1 + 1 + 1 + 2$$
  il y a $\frac{1}{3!}\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2} = 10$ partitions à trois parties.
  - Comme
  $$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
  il y a $\frac{1}{5!}\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 1$ partitions à trois parties.

  d'où un total de $1 + 15 + 25 + 10 + 1 = \boxed{52}$ possibilités.

Alternativement, on peut rechercher une formule de récurrence forte.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$.

On a alors $B_0 = 1$.

De plus pour $n \in \mathbb{N}$, pour construire une partition de $[\![1, n+1]\!]$ on procède ainsi
- On choisit $k+1$ le cardinal de la partie contenant $n+1$.
- On choisit les k éléments de $[\![1, n]\!]$ dans la même partie que $n+1$, soit $\binom{n}{k}$ possibilités.
- On choisit une partition des $n-k$ éléments restants soit B_{n-k} possibilités.

D'où $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence forte

$$\boxed{\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}. \end{cases}}$$

Ainsi

$B_0 = \boxed{1}$

$B_1 = \binom{0}{0} B_0 = \boxed{1}$

$B_2 = \binom{1}{0} B_1 + \binom{1}{1} B_0 = \boxed{2}$

$B_3 = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 1 = \boxed{5}$

$B_4 = 1 \times 5 + 3 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 1 = \boxed{15}$

$B_5 = 1 \times 15 + 4 \times 5 + 6 \times 2 + 4 \times 1 + 1 \times 1 = \boxed{52}$

$B_6 = 1 \times 52 + 5 \times 15 + 10 \times 5 + 10 \times 2 + 5 \times 1 + 1 \times 1 = \boxed{203}$

Bonus ▫ Écrire un programme python **efficace** (par exemple de complexité au pire quadratique en temps et en espace) calculant B_n.

Solution pour l'exercice 29 · Énoncé p. 13 · Indication p. 19 (Vers équivalence et similitude)

1. On a

▷ **Réflexivité**

Soit $u \in \mathcal{F}(E,F)$.

Comme $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{S}(E)$ et $\mathrm{Id}_F \in \mathcal{S}(F)$ et $u = \mathrm{Id}_F \circ u \circ \mathrm{Id}_E^{-1}$ on a bien $u \equiv u$.

▷ **Transitivité**

Soient $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{F}(E,F)$ tels que $u_1 \equiv u_2$ et $u_2 \equiv u_3$.

Comme $u_1 \equiv u_2$ il existe $p_1 \in \mathcal{S}(E)$ et $q_1 \in \mathcal{S}(F)$ tels que

$$u_1 = q_1 \circ u_2 \circ p_1^{-1}.$$

(Fixons-les)

De même, comme $u_2 \equiv u_3$ il existe $p_2 \in \mathcal{S}(E)$ et $q_2 \in \mathcal{S}(F)$ tels que

$$u_2 = q_2 \circ u_3 \circ p_2^{-1}$$

(Fixons-les)

On a alors (règles de calculs sur la composition)

$$\begin{aligned} u_1 &= q_1 \circ u_2 \circ p_1^{-1} \\ &= q_1 \circ \left(q_2 \circ u_3 \circ p_2^{-1}\right) \circ p_1^{-1} \\ &= q_1 \circ q_2 \circ u_3 \circ p_2^{-1} \circ p_1^{-1} \\ &= (q_1 \circ q_2) \circ u_3 \circ (p_1 \circ p_2)^{-1} \end{aligned}$$

et comme (composée de bijections) $q_1 \circ q_2 \in \mathcal{S}(F)$ et $p_1 \circ p_2 \in \mathcal{S}(E)$ on a donc bien montré que $u_1 \equiv u_3$.

▷ **Symétrie**

Soient $u, v \in \mathcal{F}(E,F)$ tels que $u \equiv v$.

Alors il existe $p \in \mathcal{S}(E)$ et $q \in \mathcal{S}(F)$ tels que

$$u = q \circ v \circ p^{-1}.$$

(Fixons-les)

Alors

$$q^{-1} \circ u \circ p = v$$

c'est à dire

$$v = \left(q^{-1}\right) \circ u \circ \left(p^{-1}\right)^{-1}$$

et comme $q^{-1} \in \mathcal{S}(F)$ et $p^{-1} \in \mathcal{S}(E)$ on a bien montré que $v \equiv u$.

Donc $\boxed{\equiv \text{ est une relation d'équivalence}}$.

2. On procède de même

▷ **Réflexivité**

Soit $u \in \mathcal{F}(E, E)$.

Comme $\mathrm{Id}_E \in \mathcal{S}(E)$ et $u = \mathrm{Id}_E \circ u \circ \mathrm{Id}_E^{-1}$ on a bien $u \sim u$.

▷ **Transitivité**

Soient $u_1, u_2, u_3 \in \mathcal{F}(E, E)$ tels que $u_1 \sim u_2$ et $u_2 \sim u_3$.

Comme $u_1 \sim u_2$ il existe $p_1 \in \mathcal{S}(E)$ tel que

$$u_1 = p_1 \circ u_2 \circ p_1^{-1}.$$

(Fixons-le)

De même, comme $u_2 \sim u_3$ il existe $p_2 \in \mathcal{S}(E)$ tel que

$$u_2 = p_2 \circ u_3 \circ p_2^{-1}$$

(Fixons-le)

On a alors (règles de calculs sur la composition)

$$\begin{aligned} u_1 &= p_1 \circ u_2 \circ p_1^{-1} \\ &= p_1 \circ \left(p_2 \circ u_3 \circ p_2^{-1}\right) \circ p_1^{-1} \\ &= p_1 \circ p_2 \circ u_3 \circ p_2^{-1} \circ p_1^{-1} \\ &= (p_1 \circ p_2) \circ u_3 \circ (p_1 \circ p_2)^{-1} \end{aligned}$$

et comme (composée de bijections) $p_1 \circ p_2 \in \mathcal{S}(E)$ on a donc bien montré que $u_1 \sim u_3$.

▷ **Symétrie**

Soient $u, v \in \mathcal{F}(E, E)$ tels que $u \sim v$.

Alors il existe $p \in \mathcal{S}(E)$ tel que

$$u = p \circ v \circ p^{-1}.$$

(Fixons-le)

Alors

$$p^{-1} \circ u \circ p = v$$

c'est à dire

$$v = (p^{-1}) \circ u \circ (p^{-1})^{-1}$$

et comme $p^{-1} \in \mathcal{S}(E)$ on a bien montré que $v \sim u$.

Donc $\boxed{\sim \text{ est une relation d'équivalence}}$.

Solution pour l'exercice 32 · Énoncé p. 14 · Indication p. 20 (Un résultat qui se révelera essentiel)
On constate tout d'abord que par l'exercice 31 il s'agit bien d'une relation de similitude.

Tout d'abord pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, par récurrence sur k on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(UAU^{-1}\right)^k = UA^kU^{-1}$$

▷ **Initialisation**

On a

$$\left(UAU^{-1}\right)^0 = I_n = UA^0U^{-1}.$$

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\left(UAU^{-1}\right)^n = UA^nU^{-1}$.

Alors, par définition des puissances et hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}\left(UAU^{-1}\right)^{n+1} &= \left(UAU^{-1}\right)^n\left(UAU^{-1}\right)\\ &= UA^nU^{-1}UAU^{-1}\\ &= UA^nAU^{-1}\\ &= UA^{n+1}U^{-1}.\end{aligned}$$

▷ **Conclusion**

La propriété étant initialisée et héréditaire, on a donc par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \boxed{\left(UAU^{-1}\right)^k = UA^kU^{-1}}.$$

Remarque: on observe que ce calcul est valable dans un monoïde quelconque.

Par conséquent pour $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} P(UAU^{-1}) &= \sum_{k=0}^{m} a_k (UAU^{-1})^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} a_k U A^k U^{-1} \\ &= U\left(\sum_{k=0}^{m} a_k A^k\right) U^{-1} \\ &= UP(A)U^{-1} \end{aligned}$$

D'où étant donnés $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $A \sim B$, alors il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = UBU^{-1}$$

d'où pour tout polynôme P,

$$P(A) = UP(B)U^{-1}$$

et donc, en particulier, $P(A) \sim P(B)$.

Remarque: on obtient en fait mieux: un «U qui convient» pour la relation de similitude entre A et B convient aussi pour la relation de similitude entre $P(A)$ et $P(B)$ pour tout polynôme P.