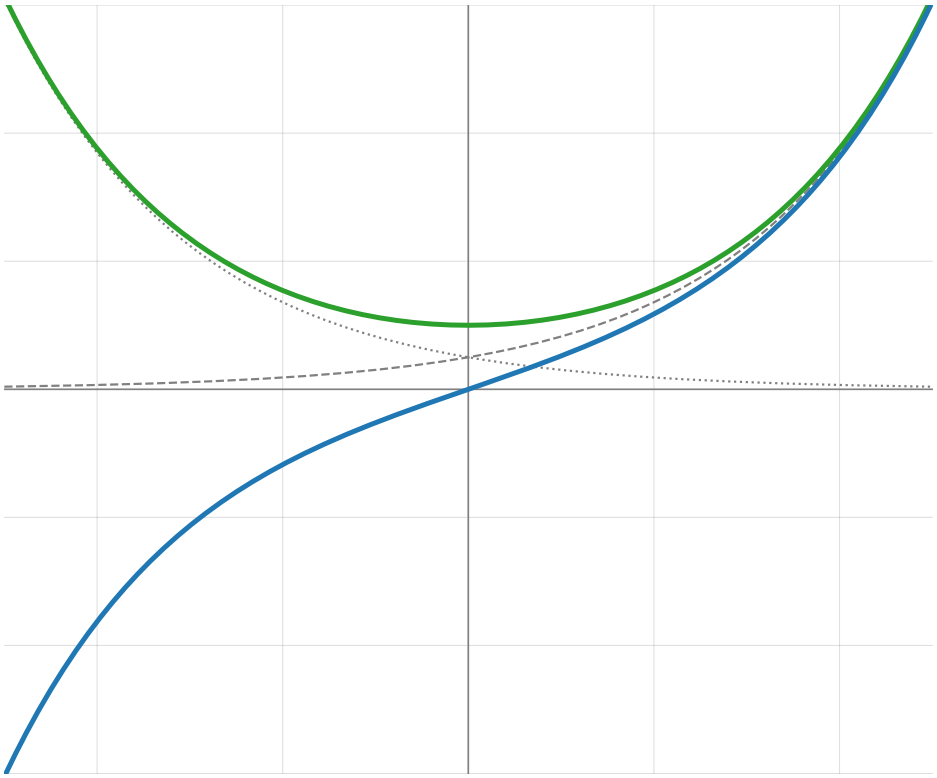
Fonctions Usuelles

Énoncés 2
Propriétés du cours 2
Autour de l'exponentielle et Cie 3
Trigonométrie, trigonométrie réciproque et surtout arctangente 5
Un peu de trigonométrie hyperbolique 9
Exemples et représentations graphiques 11
Autres calculs 13
Indications 16
Solutions 21



$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

Énoncés

Propriétés du cours

Exercice 1 (◔★♣ Parité)
Montrer les propriétés suivantes (sous réserve de bonne définition)

1. **1.1.** La somme de deux fonctions paires est paire.
   1.2. La somme de deux fonctions impaires est impaire.
2. **2.1.** Le produit de deux fonctions paires est pair.
   2.2. Le produit de deux fonctions impaires est pair.
3. **3.1.** L'inverse d'une fonction paire ne s'annulant pas est pair.
   3.2. L'inverse d'une fonction impaire ne s'annulant pas est impair.
4. **4.1.** La dérivée d'une fonction dérivable paire est impaire.
   4.2. La dérivée d'une fonction dérivable impaire est paire.
5. **5.1.** La composée de deux fonctions impaires est impaire.
   5.2. Soit f une fonction paire et g une fonction quelconque. Montrer que $g \circ f$ est paire.
6. **6.1.** La bijection réciproque d'une fonction bijective impaire est impaire.
   6.2. Une fonction paire définie sur un ensemble contenant plus d'un point peut-elle être bijective ?

Indication p. 16

Exercice 2 (◔★♣ Périodicité)
Soit $T > 0$. Montrer les propriétés suivantes (sous réserve de bonne définition)

1. La somme de deux fonctions T-périodiques est T-périodique.
2. Le produit de deux fonctions T-périodiques est T-périodique.
3. L'inverse d'une fonction T-périodique ne s'annulant pas est T-périodique.
4. La dérivée d'une fonction dérivable et T-périodique est T-périodique.
5. Soit f une fonction T-périodique et g une fonction quelconque. Montrer que $g \circ f$ est T-périodique.

Indication p. 16

Exercice 3 (◔★♣ Fonctions bornées)
Montrer les propriétés suivantes:

1. La somme de deux fonctions bornées est bornée.
2. Le produit de deux fonctions bornées est borné.
3. Donner un exemple de fonction bornée ne s'annulant pas dont l'inverse n'est pas bornée.
4. Donner un exemple de fonction dérivable et bornée dont la dérivée n'est pas bornée.
5. Soit g une fonction bornée et f une fonction quelconque. Montrer que $g \circ f$ est bornée.

Indication p. 16

Exercice 4 (◔★♣ Fonctions croissantes)

1. Montrer que la somme de deux fonctions croissantes est croissante.
2. Le produit de deux fonctions croissantes est-il croissant ?
3. La différence de deux fonctions croissantes est-elle croissante ?
4. Montrer que la composée de deux fonctions croissantes est croissante.
5. Énoncer des règles similaires pour les fonctions décroissantes.

Indication p. 16

Exercice 5 (◑★♣ Formulaire de trigonométrie réciproque)
Démontrer le formulaire de trigonométrie réciproque.

Indication p. 16

Autour de l'exponentielle et Cie

Exercice 6 (◔★♣ Logarithme en base quelconque)
Soit $a > 1$.

On définit le logarithme en base a, noté $\log_a$ par

$$\log_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{\ln(t)}{\ln(a)}.$$

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(y).$$
2. Étudier la fonction $\log_a$: déterminer sa monotonie éventuelle, sa dérivée et tracer le graphe d'équation $y = \log_a(x)$.
3. Montrer que
$$\forall (s,t) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \log_a(st) = \log_a(s) + \log_a(t).$$
$$\log_a(a) = 1 \ \ \log_a(1) = 0$$
$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}, \log_a(t^\eta) = \eta \log_a(t).$$
4. Commenter

Indication p. 16

Exercice 7 (◔★ Encadrement de l'exponentielle par des puissances)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout n à partir d'un certain rang,

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \leq e^a \leq \frac{1}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^n}.$$

Indication p. 16

Exercice 8 (◔★♣ Approximation de l'exponentielle par des puissances)
Soit $a \in \mathbb{R}$.

Justifier que les limites suivantes existent et les déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^n}.$$

Indication p. 16

Exercice 9 (◔★ Une petite équation)
Déterminer selon la valeur de $y \in]0,+\infty[$ le nombre de solutions de l'équation

$$x^y = y^x$$

d'inconnue $x \in]0,+\infty[$.

Indication p. 16

Exercice 10 (◔★ Fonctions lipschitziennes)

1. Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.
2. Montrer que la composée de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.
3. Donner un exemple de deux fonctions lipschitziennes dont le produit n'est pas lipschitzien.

Indication p. 17

Exercice 11 (◔★ Fonctions lipschitziennes bornées)
Soit $A \subset \mathbb{R}$.

Montrer que l'ensemble des fonctions sur A lipschitziennes et bornées est stable par somme et par produit.

Indication p. 17

Exercice 12 (◔☆ Un avant goût de la liberté)
Soient $(\alpha_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts.

Montrer que

$$\forall (\lambda_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n, \left(\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{\alpha_k t} = 0\right) \Rightarrow (\forall k \in [\![1,n]\!], \lambda_k = 0).$$

Indication p. 17

Exercice 13 (◔☆ Une inégalité de puissances)

1. Soit $\alpha > 1$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ x^\alpha + y^\alpha \leq (x+y)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha).$$

2. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha) \leq (x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha.$$

3. Soit $\alpha < 0$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ x^\alpha + y^\alpha \leq (x+y)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha).$$

Indication p. 17

Trigonométrie, trigonométrie réciproque et surtout arctangente

Exercice 14 (◔★♣ Une des formules essentielle de l'arctangent)
Soit $x \in \mathbb{R}^*$, montrer que

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} \text{ si } & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } & x < 0. \end{cases}$$

Indication p. 17

Exercice 15 (◔★♠ Une méthode pour plein d'exos d'arctangente)
On note dans cet exercice arg la fonction argument principal.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que

$$\arg((1+ix)) = \arctan(x).$$

Faire un schéma.

Indication p. 17

Exercice 16 (◔★ Un petit calcul d'intégrale)
Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Indication p. 17

Exercice 17 (◑★ Un peu de simplification d'arctangente)

1. Déterminer, si elle existe, la limite quand $x \to +\infty$ de

$$x\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\Big).$$

2. On considère la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Expliquer brièvement pourquoi f est dérivable sur son ensemble de définition, et calculer sa dérivée.

En déduire une simplification pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ de l'expression

$$\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

3. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que l'expression

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$$

soit bien définie et déterminer une simplification de cette expression.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right).$$

Indication p. 17

Exercice 18 (◑★ Somme d'arctangentes)

Soient a et b deux réels.

1. Montrer que si $ab < 1$ alors

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right).$$

2. Montrer que si $ab > 1$ et a, b positifs alors

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi.$$

3. Montrer que si $ab > 1$ et a, b négatifs alors

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) - \pi.$$

Indication p. 18

Exercice 19 (◑★ Formule de Machin)

1. Montrer que

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

2. Montrer que

$$4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Indication p. 18

Exercice 20 (◑☆ Une somme télescopique)

Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right).$$

Indication p. 18

Exercice 21 (◔☆ Encore une formule de trigonométrie réciproque en vrac)

Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right).$$

Indication p. 18

Exercice 22 (◔★ Une équation trigonométrique)

Discuter selon la valeur de $n \in \mathbb{N}$ de l'ensemble des solutions de l'équation

$$(\cos(x))^n + (\sin(x))^n = 1$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Indication p. 18

Un peu de trigonométrie hyperbolique

Exercice 23 (◔★♣ Un bout du formulaire de trigonométrie hyperbolique)

1. Soient a et b deux réels. Montrer que

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \quad \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) \quad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$$
$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th}(a)+\operatorname{th}(b)}{1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)} \quad \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th}(a)-\operatorname{th}(b)}{1-\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))^n = \operatorname{ch}(nx) + \operatorname{sh}(nx).$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\gamma = \operatorname{th}(\frac{x}{2})$. Exprimer $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$ en fonction de γ.

Indication p. 18

Exercice 24 (◔★♣ Trigonométrie hyperbolique réciproque)

1. Expliquer brièvement pourquoi pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'équation

$$\operatorname{sh}(x) = y$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une et unique solution et expliciter cette solution en fonction de y.

2. Expliquer brièvement pourquoi pour tout $y \in [1, +\infty[$ l'équation

$$\operatorname{ch}(x) = y$$

d'inconnue $x \in [0, +\infty[$ admet une et unique solution et expliciter cette solution en fonction de y.

3. Expliquer brièvement pourquoi pour tout $y \in]-1, 1[$ l'équation

$$\operatorname{th}(x) = y$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une et unique solution et expliciter cette solution en fonction de y.

Indication p. 18

Exercice 25 (◔★ Sommes usuelles again)
Soient a et b deux réels et $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer les sommes

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(ak+b)$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(ak+b)$$

ainsi que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{ch}(ak+b)$$

Indication p. 18

Exercice 26 (◔★ Linéarisation again)
Calculer

$$\int_0^{\ln(2)} (\operatorname{sh}(t))^4 \, \mathrm{d}t.$$

Indication p. 18

Exercice 27 (◔★ Tchebychev again)
Déterminer un polynôme T_5 tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, T_5(\operatorname{ch}(t)) = \operatorname{ch}(5t).$$

Indication p. 19

Exercice 28 (◔☆ Dérivées en plus du cahier de calculs)
Déterminer les ensembles de définitions et les dérivées éventuelles des fonctions suivantes

1. $x \mapsto a^x$ où $a > 0$.
2. $x \mapsto x^x$.
3. $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
4. $\theta \mapsto \cos(\theta)^3$
5. $x \mapsto \ln\left(x\sqrt{x^2+1}\right)$
6. $t \mapsto e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t)$ où $\tau > 0$ et $\omega > 0$
7. $t \mapsto t^{2\ln(t)}$
8. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$
9. $y \mapsto y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right)$
10. $x \mapsto x\ln(x)e^x$
11. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
12. $x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
13. $\xi \mapsto \cos\left(e^\xi\right)^2 + \sin\left(e^\xi\right)^2$
14. $\theta \mapsto \cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta)^2 - 2\cos(\theta)$

Indication p. 19

Exemples et représentations graphiques

Exercice 29 (◔★♠ La fonction cotangente)
On définit la fonction *cotangente* par

$$\text{cotan} : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Énoncer sans justification des propriétés de cette fonction (domaine de définition, variations, dérivées, périodicité, etc.) et tracer une représentation graphique.

Indication p. 19

Exercice 30 (◔★ Attention à la définition)
Déterminer l'ensemble de définition puis représenter graphiquement les fonctions

1. $x \mapsto \cos(\arccos(x))$.
2. $x \mapsto \arccos(\cos(x))$.

Indication p. 19

Exercice 31 (◑★ Contre-exemples usuels)
Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elles acceptent un prolongement par continuité en 0, puis représenter graphiquement ce prolongement.

Commenter chaque exemple.

1. $f_0 : \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^{\frac{1}{\ln(x)}}.$$

2. $f_1 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}.$$

3. $f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^3 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

4. $f_3 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Indication p. 19

Exercice 32 (◔★ Inégalités I)
Démontrer les inégalités suivantes et les illustrer par des schémas.

1. $\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x.$

2. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, \tan(x) \geq x.$

3. $\forall x < 1, \frac{1}{1-x} \geq 1 + x.$

4. Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq e^a + e^a(x - a).$$

Indication p. 19

Exercice 33 (◔★ Inégalité du sinus dans l'autre sens)
Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$$

et faire un schéma.

Indication p. 19

Exercice 34 (◔★ Autre symétries)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants interpréter les propriétés suivantes sur le graphe de la fonction f.

1. Pour $a \in \mathbb{R}$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(2a - x).$$
2. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2b - f(2a - x).$$

Indication p. 19

Exercice 35 (◔★ Attention aux quantificateurs)
Faire le schéma d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que f n'est ni paire ni impaire et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \pm f(x)$.

Indication p. 19

Autres calculs

Exercice 36 (◔☆ Un mélange d'un peu tout)
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$\arctan(\mathrm{sh}(x)) = \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right).$$

Indication p. 19

Exercice 37 (◑★ Comparaison aux sommes partielles)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que
$$\forall x \in [0, 1[, \frac{1}{1-x} \geq \sum_{k=0}^{n} x^k.$$
2. Montrer que
$$\forall x \geq 0, e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Indication p. 19

Exercice 38 (◑★ Développement de la réciproque)
On considère

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^3 + x.$$

1. Montrer que f est bijective.
2. On admet que f^{-1} est dérivable une infinité de fois. Calculer $\left(f^{-1}\right)^{(k)}(0)$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Indication p. 20

Exercice 39 (◔☆ Une miette d'un oral X)
Déterminer tous les $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} a + b + c &= 0 \\ e^a + e^b + e^c &= 3. \end{cases}$$

Indication p. 20 · Solution p. 21

Exercice 40 (◔★ Équation fonctionnelle de Cauchy: premiers cas)
On considère l'équation fonctionnelle

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{1}$$

d'inconnue $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions **dérivables** sur $\mathbb{R}$ de (1).
2. Déterminer l'ensemble des solutions **continues** sur $\mathbb{R}$ de (1).
3. Déterminer l'ensemble des solutions **continues** en 0 de (1).

Indication p. 20

Exercice 41 (◑★ Périodicité II)
La somme de deux fonctions périodiques est-elle périodique ?

Indication p. 20

Exercice 42 (◔★ Il faut mener les calculs efficacement)
Déterminer l'ensemble de définition de

$$f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée.

Indication p. 20

Exercice 43 (◑☆ Comment mener un calcul efficacement ?)
Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{\sqrt{x^2+1} - x}. \end{aligned}$$

Montrer que f est deux fois dérivable et que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, 4(1+x^2)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0.$$

Indication p. 20

Exercice 44 (◔★ Une formule générale ?)
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables un nombre quelconque de fois.

1. Exprimer $(f \circ g)^{(k)}$ en fonction des dérivées de f et g pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.
2. ▯ Renseignez vous sur la «formule de Faà di Bruno» et commenter.

Indication p. 20

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Parité)
Rédaction automatique.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Périodicité)
Rédaction automatique.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Fonctions bornées)
Se rappeler de la définition de bornée: $\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in I, |f(x)| \leq C$.

1. Inégalité triangulaire.
2. Produit de modules/valeurs absolues.
3. Prendre une fonction qui tend vers 0.
4. Méditer sur $t \mapsto A\cos(\omega t)$ et adapter.
5. Rédaction automatique.

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Fonctions croissantes)

1. Somme d'inégalités.
2. Pour faire un produit d'inégalités il faut un **signe**.
3. Idem.
4. Rédaction automatique.
5. Idem.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Formulaire de trigonométrie réciproque)
Comme toujours, soit une dérivation brute force, soit utiliser la trigonométrie directe. Ou encore mieux: faire des schémas.

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Logarithme en base quelconque)
RAS.

Indication 7 · Énoncé p. 4 (Encadrement de l'exponentielle par des puissances)
Remarquer que $e^a = \left(e^{\frac{a}{n}}\right)^n$ et que pour n assez grand tous les termes sont strictement positifs d'où une possibilité du ln.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Approximation de l'exponentielle par des puissances)
On a

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right)$$

et

$$\ln'(1) = 1.$$

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Une petite équation)
Utiliser un ln et étudier $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$.

Indication 10 · Énoncé p. 4 (Fonctions lipschitziennes)

1. Montrer par inégalité triangulaire que si f_1 est k_1-lipschitzienne et f_2 est k_2-lipschitzienne alors $f_1 + f_2$ est $k_1 + k_2$-lipschitzienne.
2. Montrer par rédaction automatique que si f_1 est k_1-lipschitzienne et f_2 est k_2-lipschitzienne alors $f_1 \circ f_2$ est $k_2 \times k_1$-lipschitzienne.
3. Que dire de $x \mapsto x \times x$?

Indication 11 · Énoncé p. 5 (Fonctions lipschitziennes bornées)
Pour le produit, montrer que si f_1 est k_1-lipschitzienne et f_2 est k_2-lipschitzienne alors $f_1 \times f_2$ est $k_1 \times C_2 + k_2 \times C_1$-lipschitzienne.

Pour cela se rappeler que l'on peut faire un «détour»:

$$a_{11} - a_{22} = a_{11} - a_{12} + a_{12} - a_{22}.$$

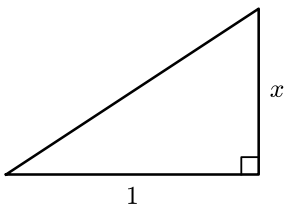
Indication 12 · Énoncé p. 5 (Un avant goût de la liberté)
Plusieurs options, par exemple dériver et évaluer pour obtenir un système de Vandermonde.

Ou bien regarder à l'infini et déduire que le λ correspondant au α le plus grand est nul et faire une récurrence bien choisie.

Indication 13 · Énoncé p. 5 (Une inégalité de puissances)
Remarquer que par *homogénéité* on peut par exemple prendre $x = 1$.

Indication 14 · Énoncé p. 5 (Une des formules essentielle de l'arctangent)
Plusieurs méthodes, comme pour tout exercice de ce type:

- ▷ Étudier en dérivant.
- ▷ Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ et regarder les ensembles de définitions.
- ▷ Regarder l'exercice 15.
- ▷ Faire un triangle malin:



Indication 15 · Énoncé p. 6 (Une méthode pour plein d'exos d'arctangente)
Pour le schéma, prendre un triangle de base 1 et de hauteur x.

Indication 16 · Énoncé p. 6 (Un petit calcul d'intégrale)
Forme canonique.

Indication 17 · Énoncé p. 7 (Un peu de simplification d'arctangente)

1. Utiliser l'exercice 14 et la dérivée de arctan en 1.

2. Calculer.

3. De même dériver et conclure.

4. Regarder l'exercice 18 ou bien simplement dériver.

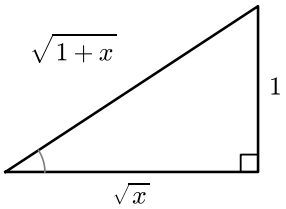
Indication 18 · Énoncé p. 7 (Somme d'arctangentes)
Comme pour l'exercice 14, on peut:

- ▷ Faire une étude de fonction.
- ▷ Utiliser les formules de tangente d'une somme.
- ▷ Utiliser l'exercice 15.

Indication 19 · Énoncé p. 8 (Formule de Machin)
Utiliser l'exercice 18 ou bien simplement calculer $(i+5)^4(i+239)^{-1}$

Indication 20 · Énoncé p. 8 (Une somme télescopique)
Exercice à astuce. L'astuce est dans l'exercice 17.

Indication 21 · Énoncé p. 8 (Encore une formule de trigonométrie réciproque en vrac)
Comme toujours: réfléchir, dériver ou triangle malin



Indication 22 · Énoncé p. 8 (Une équation trigonométrique)
Traiter les cas $n=0$, $n=1$, $n=2$ à part.

Pour $n \geq 3$ remarquer que $1 = (\cos(x))^2 + (\sin(x))^2$.

Indication 23 · Énoncé p. 9 (Un bout du formulaire de trigonométrie hyperbolique)
Juste la définition.

Indication 24 · Énoncé p. 9 (Trigonométrie hyperbolique réciproque)
Déjà vu dans le TD de trinômes.

Indication 25 · Énoncé p. 10 (Sommes usuelles again)
Somme géométrique et formule du binôme.

Indication 26 · Énoncé p. 10 (Linéarisation again)
Tout est dans le titre.

Indication 27 · Énoncé p. 10 (Tchebychev again)
Tout est dans le titre.

Indication 28 · Énoncé p. 11 (Dérivées en plus du cahier de calculs)
RAS sinon de **simplifier** avant de calculer.

Indication 29 · Énoncé p. 11 (La fonction cotangente)
Faire une étude de fonction. Ou bien observer une symétrie bien choisie: pour tout x de l'ensemble de définition de la cotangente, $\operatorname{cotan}(x) = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$.

Indication 30 · Énoncé p. 11 (Attention à la définition)
On rappelle que cos est définie sur $\mathbb{R}$ et que arccos est définie sur $[-1, 1]$.

Indication 31 · Énoncé p. 12 (Contre-exemples usuels)
Ne pas faire confiance à la calculatrice pour cet exercice.

Indication 32 · Énoncé p. 12 (Inégalités I)
Inégalités de tangence.

Indication 33 · Énoncé p. 12 (Inégalité du sinus dans l'autre sens)
Corde entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

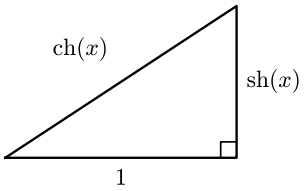
Indication 34 · Énoncé p. 13 (Autre symétries)
On obtient (à démontrer):

1. Une symétrie axiale par rapport à la droite d'équation $x = a$.
2. Une symétrie centrale de centre (a, b).

Indication 35 · Énoncé p. 13 (Attention aux quantificateurs)
Comme la fonction doit être continue faire le « changement de signe » en passant par 0.

Indication 36 · Énoncé p. 13 (Un mélange d'un peu tout)
Par exemple dériver.

Ou bien triangle malin:



Indication 37 · Énoncé p. 13 (Comparaison aux sommes partielles)
Faire une étude de fonction par récurrence.

Indication 38 · Énoncé p. 14 (Développement de la réciproque)
1. TVI pour l'existence, stricte monotonie pour l'unicité.
2. Écrire $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$.

Indication 39 · Énoncé p. 14 (Une miette d'un oral X)
Remarquer qu'une somme de termes positifs est nulle ssi chaque terme est nul.

Que dire de $e^x - 1 - x$?

Solution p. 21

Indication 40 · Énoncé p. 14 (Équation fonctionnelle de Cauchy: premiers cas)
1. Par exemple dériver par rapport à une variable.
2. Commencer par montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = f(1)r$. Puis conclure par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Utiliser la continuité en 0 pour montrer la continuité sur $\mathbb{R}$.

Bonus: traiter le cas où la seule hypothèse est f est bornée au voisinage de 0.

Rebonus: montrer qu'il existe des solutions qui ne sont pas continues en 0.

Indication 41 · Énoncé p. 14 (Périodicité II)
Que dire de

$$x \mapsto \cos(x) + \cos\left(\sqrt{2}x\right)$$

?

Indication 42 · Énoncé p. 15 (Il faut mener les calculs efficacement)
On peut remarquer que f est argth.

Ou bien sans remarquer cela constater que dériver $x \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{u(x)}{v(x)}}\right)$ est compliqué tandis que dériver $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln(u(x)) - \ln(v(x)))$ est simple.

Indication 43 · Énoncé p. 15 (Comment mener un calcul efficacement ?)
On peut faire le calcul brutalement.

Ou bien le $\sqrt{x^2+1}$ pousse à considérer plutôt $f \circ \mathrm{sh}$.

Indication 44 · Énoncé p. 15 (Une formule générale ?)
La formule générale existe mais est peu utile.

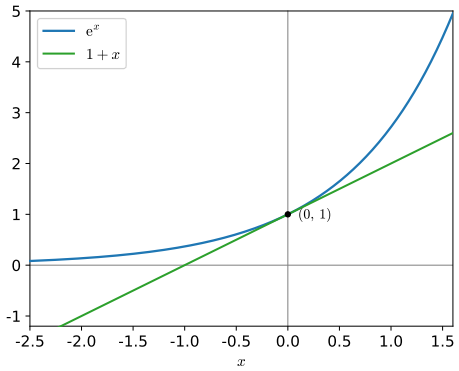
Solutions

Solution pour l'exercice 39 · Énoncé p. 14 · Indication p. 20 (Une miette d'un oral X)
On a (inégalité de tangence de l'exponentielle),

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x - 1 - x \geq 0$$

avec égalité ssi $x = 0$.

/



Par conséquent, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, comme une somme de termes positifs est nulle ssi chaque terme est nul, on a

$$\underbrace{(e^a - 1 - a)}_{\geq 0} + \underbrace{\left(e^b - 1 - b\right)}_{\geq 0} + \underbrace{(e^c - 1 - c)}_{\geq 0} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^a - 1 - a = 0 \\ e^b - 1 - b = 0 \\ e^c - 1 - c = 0 \end{cases}$$

c'est à dire par le cas d'égalité précédent

$$(e^a - 1 - a) + \left(e^b - 1 - b\right) + (e^c - 1 - c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \\ c = 0 \end{cases}$$

Procédons maintenant par analyse-synthèse.

- ▷ **Si $a + b + c = 0$ et $e^a + e^b + e^c = 3$** alors en particulier

$$e^a + e^b + e^c - 3 - (a + b + c) = 0$$

et donc par ce qui précède $a = b = c = 0$.

- ▷ **Si $a = b = c = 0$** alors on a bien $a + b + c = 0$ et $e^a + e^b + e^c = 3$.

On conclut donc que l'unique solution est $\boxed{(a, b, c) = (0, 0, 0)}$.