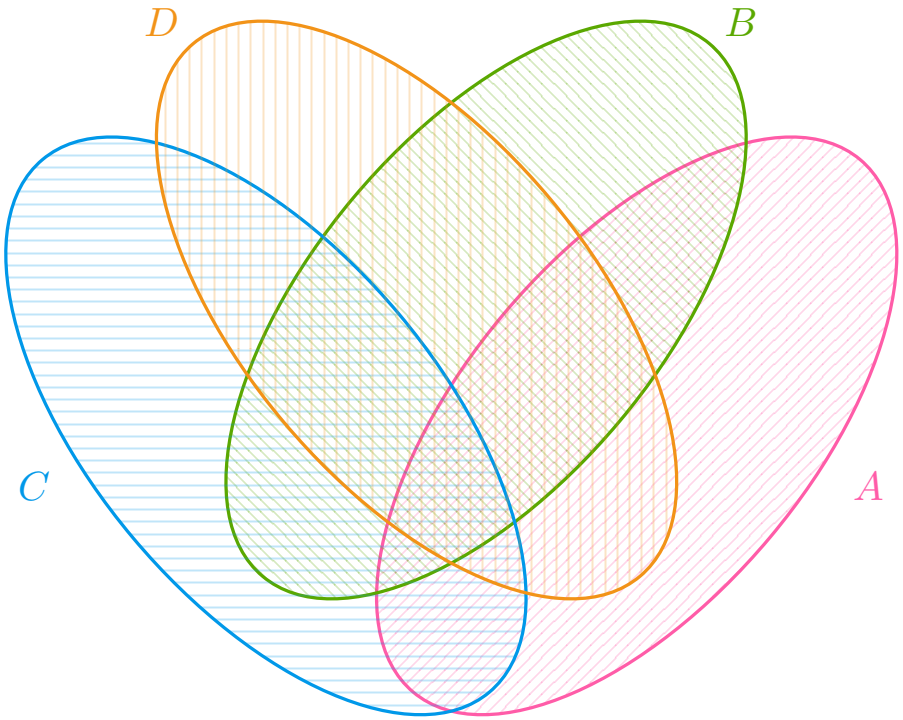
Ensembles et Applications

Énoncés 2
Indications 21
Solutions 28



$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ A & \longmapsto & \left(\begin{array}{rcl} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} & x \in A \\ 0 & \text{sinon.} & \end{cases} \end{array}\right) \end{array}$$

Énoncés

On rappelle que les notations $f^{\rightarrow}$ pour l'application image directe et $f^{\leftarrow}$ pour l'application image réciproque sont des notations **locales** et **provisoires**.

Exercice 1 (◔★♣ Fonction indicatrice et opérations)
Soit E un ensemble. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ on rappelle que la *fonction indicatrice de* A, notée $\mathbb{1}_A$ est l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

1. Soient A et B des sous-ensembles de E. Montrer que $A \subset B$ **ssi** $\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.
2. Soient A et B des sous-ensembles de E. Exprimer les fonctions suivantes en fonction de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$:
   - ▷ $\mathbb{1}_{E\setminus A}$,
   - ▷ $\mathbb{1}_{A\cap B}$,
   - ▷ $\mathbb{1}_{A\cup B}$.
3. Redémontrer les règles du calcul ensembliste à l'aide de fonctions indicatrices.

Indication p. 21 · Solution p. 28

Exercice 2 (◔★♣ Fonction indicatrice et identité)
Soit E un ensemble.

Montrer que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(E) &\to \{0,1\}^E \\ A &\mapsto \mathbb{1}_A \end{aligned}$$

est bijective.

Indication p. 21 · Solution p. 31

Exercice 3 (◔★♣ Composée et image directe/réciproque)
Soient E, F, G trois ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$.

1. Montrer que
$$(g \circ f)^{\rightarrow} = g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}.$$
2. Montrer que
$$(g \circ f)^{\leftarrow} = f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}.$$

Indication p. 21

Exercice 4 (◔★♣ Composée et réciproque)
Soient E, F, G trois ensembles. Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$. On suppose que f et g sont bijectives.

Montrer que $g \circ f$ est bijective et que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Indication p. 21

Exercice 5 (◔★♣ Injectivité/surjectivité et composée)
1. Montrer que la composée de deux fonctions injectives est injective.
2. Montrer que la composée de deux fonctions surjectives est surjective.
3. Que dire de la composée de deux fonctions bijectives ?

Indication p. 21

Exercice 6 (◔★ Épimorphisme et monomorphisme)
Soient E et F des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

- ▹ On dit que f est un *épimorphisme* (d'ensembles) ssi pour tout ensemble G et toutes applications $g_1, g_2 \in \mathcal{F}(F,G)$ on a
$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Rightarrow g_1 = g_2.$$
- ▹ On dit que f est un *monomorphisme* (d'ensembles) ssi pour tout ensemble G et toutes applications $g_1, g_2 \in \mathcal{F}(G,E)$ on a
$$f \circ g_1 = f \circ g_2 \Rightarrow g_1 = g_2.$$

Montrer que
1. Une application est un épimorphisme (d'ensembles) **ssi** elle est surjective.
2. Une application est un monomorphisme (d'ensembles) **ssi** elle est injective.

Indication p. 21

Exercice 7 (◔★♣ Un des deux)
Soient E, F, G des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $g \in \mathcal{F}(F,G)$.

1. Montrer que **si** $g \circ f$ est injective **alors** f est injective.
2. Montrer que **si** $g \circ f$ est surjective **alors** g est surjective.
3. Donner des contre-exemples à toutes les autres implications.

Indication p. 21

Exercice 8 (◔★ Inversibilité à gauche et à droite)
Soient E, F des ensembles (E non vide) et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Montrer que f est injective **ssi** il existe $g \in \mathcal{F}(F,E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ (on dit alors que f est *inversible à gauche* ou que f est une *section*).
2. Montrer que f est surjective **ssi** il existe $g \in \mathcal{F}(F,E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ (on dit alors que f est *inversible à droite* ou que f est une *rétraction*).

Indication p. 21

Exercice 9 (◔★ Aller-retour)
Soient E, F des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Montrer
$$(\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A)) = A) \Leftrightarrow (f \text{ est injective}).$$
2. Montrer
$$(\forall B \in \mathcal{P}(F), f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B)) = B) \Leftrightarrow (f \text{ est surjective}).$$

Indication p. 22

Exercice 10 (◔★ De recouvrement disjoint à partition)
Soit E un ensemble.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement disjoint de E.

Expliquer succinctement pourquoi il existe un unique ensemble $\tilde{I}$ tel que $(A_i)_{i\in\tilde{I}}$ est une partition de E.

Indication p. 22

Exercice 11 (◔★ Traces d'un recouvrement disjoint)
Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement disjoint de E.

Soit $B \subset E$.

Montrer que $(B \cap A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement disjoint de B.

Faire un schéma.

Indication p. 22 · Solution p. 32

Exercice 12 (◔★ Différence symétrique)
Soit E un ensemble.

Pour $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$, on appelle la *différence symétrique* de A et B, noté $A\Delta B$, le sous-ensemble de E

$$A\Delta B = (A \cup B) \cap (E \setminus (A \cap B)).$$

1. Représenter sur un schéma la définition précédente.
2. Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Exprimer $\mathbb{1}_{(A\Delta B)}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$.
3. Montrer les propriétés suivantes
   - $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad A\Delta B = B\Delta A$.
   - $\forall A \in \mathcal{P}(E)$,
     - $A\Delta A = \varnothing$
     - $A\Delta\left(\overline{A}\right) = E$
     - $A\Delta\varnothing = A$
     - $A\Delta E = \overline{A}$
   - $\forall (A,B,C) \in \mathcal{P}(E)^3, \quad A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

Indication p. 22

Exercice 13 (◔★ Images directes et réciproques d'union et d'intersections)
Soient E, F des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E et $\left(B_j\right)_{j\in J}$ une famille de parties de F.

1. Montrer que

$$f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j)$$

et que

$$f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j).$$

2. Montrer que

$$f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$$

et que

$$f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i).$$

Indication p. 22

Exercice 14 (◔★ Un petit contre-exemple infini)
On considère les fonctions

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n+1 \end{array}$$

et pour $a \in \mathbb{N}$

$$g_a : \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto \begin{cases} n-1 & \text{si } \ n \geq 1 \\ a & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Étudier l'injectivité et surjectivité éventuelles de f et de g_a pour $a \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer $g_a \circ f$ et $f \circ g_a$ pour $a \in \mathbb{N}$.
3. Commenter.

Indication p. 22

Exercice 15 (◔★ Un petit exercice formel)
Soit E un ensemble.

Soient A et B des sous-ensembles de E.

On suppose qu'il existe $C \in \mathcal{P}(E)$ tel que $A \cap C = B \cap C$ et $A \cup C = B \cup C$.

Montrer que $A = B$.

Indication p. 22

Exercice 16 (◑★ Injectivité surjectivité images directes et réciproques)
Soient E, F des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Montrer les équivalences suivantes

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f^{\rightarrow} \text{ injective } \Leftrightarrow f^{\leftarrow} \text{ surjective .}$$

2. Montrer les équivalences suivantes

$$f \text{ surjective } \Leftrightarrow f^{\rightarrow} \text{ surjective } \Leftrightarrow f^{\leftarrow} \text{ injective .}$$

Indication p. 23

Exercice 17 (◔★ Un théorème de Cantor)
Soit E un ensemble.

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il n'existe **pas** de surjection de E vers $\mathcal{P}(E)$.

Soit f une application de E vers $\mathcal{P}(E)$.

En considérant $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ montrer que f n'est pas surjective.

Indication p. 23

Exercice 18 (◔★ $\liminf \leq \limsup$)
Soit E un ensemble. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de E.

Montrer que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{k\in[\![n,+\infty[\![} A_k\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{k\in[\![n,+\infty[\![} A_k\right).$$

Indication p. 23

Exercice 19 (◔☆ Ensembles transitifs)
Un ensemble E est dit *transitif* **ssi**

$$\forall x \in E,\ x \subset E.$$

1. Montrer que $\varnothing$ est transitif.
2. Soit A un ensemble transitif. Montrer que $A \cup \{A\}$ est transitif.
3. Soit A un ensemble transitif. Montrer que $\mathcal{P}(A)$ est transitif.

Indication p. 23

Exercice 20 (◔★ Application de double trace)
Soit E un ensemble et $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$.

On considère l'application φ définie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

1. Montrer que φ est injective **ssi** $A \cup B = E$.
2. Montrer que φ est surjective **ssi** $A \cap B = \varnothing$.

Indication p. 23

Exercice 21 (◔★ Cas particulier d'images directest d'intersections)
Soient E, F des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E (avec I non vide).

1. Donner un exemple où $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \neq \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.
2. Montrer que si f est injective alors $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.
3. Montrer que si pour toutes parties A_1 et A_2 de E on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ alors f est injective.

Indication p. 23

Exercice 22 (◑★ Construction de factorisations)
Soient E, F, G des ensembles (G non vide) et $f \in \mathcal{F}(E,G)$.

1. Soit $g \in \mathcal{F}(F,G)$. Montrer
$$(\exists h \in \mathcal{F}(E,F), f = g \circ h) \Leftrightarrow f^{\rightarrow}(E) \subset g^{\rightarrow}(F).$$
2. Soit $g \in \mathcal{F}(E,F)$. Montrer
$$(\exists h \in \mathcal{F}(F,G), f = h \circ g) \Leftrightarrow \forall x \in E, g^{\leftarrow}(\{g(x)\}) \subset f^{\leftarrow}(\{f(x)\}).$$

Indication p. 23

Exercice 23 (◔★ Curryfication)
Soient E, F et G trois ensembles.

Expliciter une bijection entre $\mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F,G))$ et $\mathcal{F}(E \times F, G)$.

Commenter.

Indication p. 23 · Solution p. 32

Exercice 24 (◔★ Sera appliqué à $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{D}^k$)
Soit F un ensemble.

Soient $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(D_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux familles de parties de F

- ▷ La famille $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, c'est à dire
$$\forall k \in \mathbb{N}, C_{k+1} \subset C_k.$$
- ▷ La famille $(D_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, c'est à dire
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, D_{k+1} \subset D_k.$$
- ▷ On a l'inclusion
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, C_k \subset D_k.$$

On note
$$C_\infty = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k,$$
$$D_\infty = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} D_k.$$

Montrer que
$$C_\infty \subset D_\infty.$$

Indication p. 24

Exercice 25 (◔★ Propriétés universelles diluées)
Soient E, F, G trois ensembles.

1. Expliciter une bijection entre $\mathcal{F}(G, E) \times \mathcal{F}(G, F)$ et $\mathcal{F}(G, E \times F)$.
2. On suppose $E \cap F = \varnothing$. Expliciter une bijection entre $\mathcal{F}(E, G) \times \mathcal{F}(F, G)$ et $\mathcal{F}(E \sqcup F, G)$.
3. Commenter.

Indication p. 24

Exercice 26 (◔★ Deux équations ensemblistes)
Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E.

1. On considère l'équation

$$X \cup A = B \tag{1}$$

d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

1.1. Montrer que (1) admet des solutions **ssi** $A \subset B$.

1.2. Montrer que, cette condition étant vérifiée, l'ensemble des solutions est alors

$$\{(B \setminus A) \cup T, T \in \mathcal{P}(A)\}.$$

2. On considère l'équation

$$X \cap A = B \tag{2}$$

d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

2.1. Montrer que (2) admet des solutions **ssi** $A \supset B$.

2.2. Montrer que, cette condition étant vérifiée, l'ensemble des solutions est alors

$$\left\{B \cup T, T \in \mathcal{P}\left(\overline{A}\right)\right\}.$$

Indication p. 24 · Solution p. 32

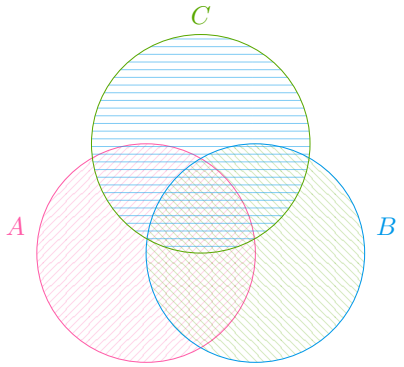
Exercice 27 (◔★ Ensemble des parties et opérations)
Soit E un ensemble.

Soient A et B des sous-ensembles de E.

- ▷ Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
- ▷ Montrer que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. A-t-on égalité ?
- ▷ A-t-on $\mathcal{P}(A \times B) \supset \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$?

Indication p. 24

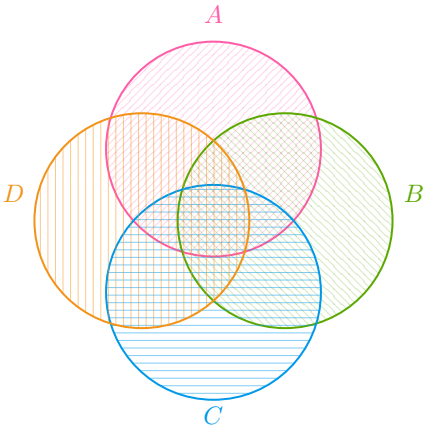
Exercice 28 (◔★ Attention aux diagrammes de Venn)
Soit E un ensemble.

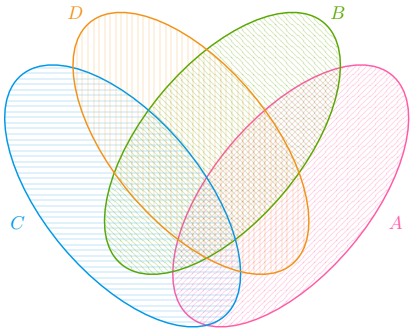


1. Soient A, B, C des parties de E.

   Étant donné $x \in E$, combien y a-t-il de disjonctions de cas pour l'appartenance de x à A, à B et à C ?
2. Recopier le schéma à droite sur votre feuille et annoter ce schéma pour représenter tous les différents cas.
3. Soient A, B, C, D des parties de E.

   Étant donné $x \in E$, combien y a-t-il de disjonctions de cas pour l'appartenance de x à A, à B, à C et à D ?
4. Recopier les schémas ci-dessous sur votre feuille et annoter ces schémas pour représenter tous les différents cas.





5. Commenter.

Indication p. 24

Exercice 29 (◔☆ Un petit tour)
Soit E un ensemble.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, ..., A_n) \in \mathcal{P}(E)^n$.

Montrer que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (A_k \setminus A_{k+1}) \right) \cup (A_n \setminus A_1) \cup \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Indication p. 24

Exercice 30 (◔★ Image directe et réciproques de complémentaires)
Soient E, F des ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Montrer que,

$$\forall B \in \mathcal{P}(F), f^{\leftarrow}(F \setminus B) = E \setminus f^{\leftarrow}(B).$$

2. Montrer que,

$$(\forall\ A \in \mathcal{P}(E), f^{\rightarrow}(E \setminus A) \subset F \setminus f^{\rightarrow}(A)) \Leftrightarrow f \text{ injective .}$$

3. Montrer que,

$$(\forall\ A \in \mathcal{P}(E), f^{\rightarrow}(E \setminus A) \supset F \setminus f^{\rightarrow}(A)) \Leftrightarrow f \text{ surjective .}$$

Indication p. 24

Exercice 31 (◑★ Tiré en arrière et poussé en avant, le début)
Soient E_1, E_2 et F trois ensembles, et $f \in \mathcal{F}(E_1, E_2)$.

On note $f^* \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(E_2, F), \mathcal{F}(E_1, F))$ l'application

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{F}(E_2, F) &\to \mathcal{F}(E_1, F) \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

et $f_* \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(F, E_1), \mathcal{F}(F, E_2))$ l'application

$$\begin{aligned} f_* : \mathcal{F}(F, E_1) &\to \mathcal{F}(F, E_2) \\ \varphi &\mapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

1. Montrer que **si** f est surjective **alors** f^* est injective.
2. Montrer que **si** f est injective **alors** f_* est injective.
3. Montrer que **si** f est injective **alors** f^* est surjective.
4. Montrer que **si** f est surjective **alors** f_* est surjective.

Indication p. 24

Exercice 32 (◔★ Applications de restrictions et recollements)
Soit E un ensemble, et A, B deux parties de E.

Soit F un ensemble ayant au moins 2 éléments.

On considère l'application

$$\begin{aligned}\Phi : F^E &\to F^A \times F^B \\ f &\mapsto \left(f_{|A}, f_{|B}\right).\end{aligned}$$

1. Montrer que Φ est surjective **ssi** $A \cap B = \varnothing$.
2. Montrer que Φ est injective **ssi** $A \cup B = E$.

Indication p. 24

Exercice 33 (◔☆ Écriture d'ensembles)
Dans chacun des cas suivants écrire « formellement » les ensembles suivants:

1. L'ensemble des rationnels.
2. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.
3. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité (pour $n \in \mathbb{N}^*$).
4. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paires.
5. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ périodiques.

Indication p. 25

Exercice 34 (◔☆ Exemples d'applications)
Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est injective, si elle est surjective, si elle est bijective.

1. $\begin{aligned}f_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$
2. $\begin{aligned}f_2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$
3. $\begin{aligned}f_3 : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$
4. $\begin{aligned}f_4 : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$
5. $\begin{aligned}f_5 : \mathbb{R}_-^* &\to \mathbb{R}^* \\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$
6. $\begin{aligned}f_6 : [-1,1] &\to [0,2] \\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$

Indication p. 25

Exercice 35 (◔☆ Exemples de partitions)
Les familles suivantes sont-elles des recouvrements disjoints (resp. des partitions) de $\mathbb{N}$?

1. $(\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$
2. $(\{n \in \mathbb{N} \mid p \text{ divise } n\})_{\substack{p\in\mathbb{N} \\ p \text{ premier}}}$
3. $(\llbracket n, 2n \llbracket)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $\left(\llbracket 0, 2^k \rrbracket\right)_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ k \text{ est un carré}}}$

Exercice 36 (◑☆ Propriété universelle du produit $\prod$)
Soient E, F deux ensembles.

Exhiber un ensemble H et des applications $\pi_E \in \mathcal{F}(H, E)$, $\pi_F \in \mathcal{F}(H, F)$ tels que pour tout ensemble G et applications $f_E \in \mathcal{F}(G, E)$, $f_F \in \mathcal{F}(G, F)$ il existe une et unique application $u \in \mathcal{F}(G, H)$ telle que $f_E = \pi_E \circ u$ et $f_F = \pi_F \circ u$.

Commenter.

Indication p. 25

Exercice 37 (◑☆ Propriété universelle de l'union disjointe $\coprod$)
Soient E, F deux ensembles disjoints.

Exhiber un ensemble H et des applications $\iota_E \in \mathcal{F}(E, H)$, $\iota_F \in \mathcal{F}(F, H)$ tels que pour tout ensemble G et applications $f_E \in \mathcal{F}(E, G)$, $f_F \in \mathcal{F}(F, G)$ il existe une et unique application $u \in \mathcal{F}(H, G)$ telle que $f_E = u \circ \iota_E$ et $f_F = u \circ \iota_F$.

Commenter.

Indication p. 25

Exercice 38 (◔☆ Fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ sous contraintes)

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjectives et strictement croissantes.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injectives telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$.

Indication p. 25

Exercice 39 (◔☆ Une chaîne d'équivalence parmi d'autres)
Soient E, F des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

Montrer l'équivalence entre

(i) $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A)) = A$
(ii) $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, f^{\rightarrow}(A \cap B) = f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$
(iii) $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ t.q $A \cap B = \varnothing, f^{\rightarrow}(A \cap B) = f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$
(iv) $\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ t.q $A \subset B, f^{\rightarrow}(B \setminus A) = f^{\rightarrow}(B) \setminus f^{\rightarrow}(A)$.

Indication p. 25

Exercice 40 (◑☆ Applications en vrac d'exercices précédents)
Soit E un ensemble.

1. Soient $f, g \in \mathcal{F}(E,E)$ tels que $g \circ f \circ g$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.
2. Soit $f \in \mathcal{F}(E,E)$ telle que $f \circ f = f$.
  2.1. Donner un exemple où f n'est ni injective ni surjective.
  2.2. Montrer que si f est injective ou surjective alors $f = \mathrm{Id}_E$.
3. Soit $f \in \mathcal{F}(E,E)$ et $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$.

  On suppose que $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m \text{ fois}}$.

  Montrer que f est surjective ssi f est injective.
4. Soient $f, g, h \in \mathcal{F}(E,E)$ telles que $f \circ g$ et $g \circ h$ sont bijectives. Montrer que f,g et h sont bijectives.

Indication p. 25

Exercice 41 (◔☆ Juste appliquer la définition)
Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$.

Indication p. 26 · Solution p. 34

Exercice 42 (◔☆ Un des exercices les plus inintéressants)
Soit E un ensemble.

Soient A et B deux parties de E.

Montrer que si $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$ alors $A \subset B$.

Indication p. 26

Exercice 43 (◔☆ Injectivité et union croissante)
Soient E, F des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de E *croissante* c'est à dire telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}.$$

On pose

$$A_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Montrer que

$$f_{|A_\infty} \text{ injective } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, f_{|A_n} \text{ injective .}$$

Indication p. 26

Exercice 44 (◔☆ Aller-retour bis)
Soient E, F des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1. Soit A une partie de E. Montrer que

$$f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A)) \supset A$$

et que

$$f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A)))) = f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(A)).$$

2. Soit B une partie de F. Montrer que

$$f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(B)) = f^{\rightarrow}(E) \cap B.$$

Indication p. 26

Exercice 45 (◑☆ Un peu de localité)

1. Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$.

On suppose que

$$\forall x \in E, \exists g \in E^F, g(f(x)) = x,$$
$$\forall y \in F, \exists g \in E^F, f(g(y)) = y.$$

Que dire de f ?

2. Soit E un ensemble et $f \in E^E$.

On suppose que

$$\forall x \in E, \exists n \in \mathbb{N}^*, \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{ fois}}(x) = x.$$

Montrer que f est bijective.

Indication p. 26

Exercice 46 (◔★ Encore des composées d'injections et de surjections)
Soient E, F, G des ensembles, $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$.

1. Montrer que **si** $g \circ f$ injective et f surjective **alors** g est injective.

2. Montrer que **si** $g \circ f$ surjective et g injective **alors** f est surjective.

Indication p. 26

Exercice 47 (◕☆ Quelques exemples de dénombrabilité)

1. Exhiber une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

2. Exhiber une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$.

3. Montrer qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $2^{\mathbb{N}}$.

4. Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$.

Indication p. 26

Exercice 48 (◔☆ Calculs ensemblistes en vrac)
Soit E un ensemble.

1. Soient A, B, C des parties de E telles que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$.

   Montrer que $B \subset C$.
2. Soient A, B, C, D des parties de E telles que $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \varnothing$ et $A \cup B = C \cup D$.

   Montrer que $A = C$ et $B = D$.
3. Soient A, B, C des parties de E.

   Montrer que $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset A \cup (B \setminus C)$.

Indication p. 26

Exercice 49 (◔☆ Produit cartésien, union et intersection)
Soient E et F deux ensembles.

Soient A_1, A_2 et B_1, B_2 des sous-ensembles de E et F respectivement.

Montrer que

- $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) = (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$,
- $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = (A_1 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2) \cup (A_2 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$.

Faire un schéma.

Indication p. 27

Exercice 50 (◔☆ Peut-on simplifier les produits cartésiens ?)
Soient A et B des ensembles.

Montrer que pour tout ensemble X non vide, on a

$$A \times X = B \times X \Leftrightarrow A = B.$$

Indication p. 27 · Solution p. 35

Exercice 51 (◔☆ Un exercice pas si tordu)
Soit E un ensemble et A, B deux parties de E.

Montrer que

$$(\forall (a,b) \in A \times B, (a \in B \text{ ou } b \in A)) \Leftrightarrow ((\forall a \in A, a \in B) \text{ ou } (\forall b \in B, b \in A)).$$

Indication p. 27 · Solution p. 35

Exercice 52 (◑☆ Mini-problème: introduction à la finesse d'une partition)
Soit E un ensemble. On note $\mathrm{Part}(E)$ l'ensemble des partitions de E.

Étant données $\alpha = (A_i)_{i\in I}$ et $\beta = \left(B_j\right)_{j\in J}$ des partitions de E, on dit que α est *plus fine* que β ssi

$$\forall i \in I, \exists j \in J, A_i \subset B_j.$$

On note alors $\alpha \prec \beta$.

1. Soient $\alpha = (A_i)_{i\in I}$ et $\beta = \left(B_j\right)_{j\in J}$ des partitions de E. Montrer que $\alpha \prec \beta$ ssi

$$\forall j \in J, \exists I_j \in \mathcal{P}(I), (A_i)_{i\in I_j} \text{ est une partition de } B_j.$$

2. Faire un schéma illustrant cette notion.

3. On s'intéresse à certaines propriétés de la relation $\prec$.

3.1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathrm{Part}(E)$,

$$\alpha \prec \alpha.$$

3.2. Montrer que pour tous α, β, $\gamma \in \mathrm{Part}(E)$,

$$(\alpha \prec \beta \text{ et } \beta \prec \gamma) \Rightarrow \alpha \prec \gamma.$$

3.3. Soient α, β des partitions. Que dire si $\alpha \prec \beta$ et $\beta \prec \alpha$? Commenter.

4. Expliciter

4.1. Une partition ω telle que pour toute partition α, on a $\alpha \prec \omega$.

4.2. Une partition ε telle que pour toute partition α, on a $\varepsilon \prec \alpha$.

5. Soient α et β des partitions. Montrer qu'il existe une partition γ telle que

$$(\gamma \prec \alpha \text{ et } \gamma \prec \beta) \text{ et } (\forall \delta \in \mathrm{Part}(E), (\delta \prec \alpha \text{ et } \delta \prec \beta) \Rightarrow \delta \prec \gamma)$$

6. Commenter.

Indication p. 27

Exercice 53 (◕☆ Mini problème: La cinquième preuve du livre)
Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ on note

$$A_{a,b} = \{an+b, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}.$$

Pour $U \subset \mathbb{Z}$ une partie de $\mathbb{Z}$ on dit que U est **ouverte** ssi

$$\forall x \in U, \exists (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}, x \in A_{a,b} \text{ et } A_{a,b} \subset U.$$

1. Montrer que toute union (quelconque) de parties ouvertes est ouverte.
2. Montrer que toute intersection finie de parties ouvertes est ouverte.

Pour $F \subset \mathbb{Z}$ une partie de $\mathbb{Z}$ on dit que F est **fermée** ssi $\overline{F}$ est ouverte.

1. Montrer que toute intersection (quelconque) de parties fermées est fermée et que toute union finie de parties fermées est fermée.
2. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, $A_{a,b}$ est fermée.
3. En remarquant que

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1,1\} = \bigcup_{p \text{ premier}} A_{p,0}$$

conclure qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Indication p. 27

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Fonction indicatrice et opérations)

1. Double implication et disjonction de cas.
2. Au pire disjonction de cas. Par règles opératoires on peut s'épargner quelques disjonctions de cas.
3. On connaît l'associativité, commutativité et distributivité des $+$ et $\times$ usuels. Et par le premier point $A = B$ ssi pour tout $x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$.

Solution p. 28

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Fonction indicatrice et identité)
Injective et surjective ou plus simplement bijection réciproque.

Solution p. 31

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Composée et image directe/réciproque)
Rédaction automatique.

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Composée et réciproque)
Faire le calcul par associativité de $\circ$.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Injectivité/surjectivité et composée)
Rédaction automatique.

Pour les schémas on pourra procéder négativement.

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Épimorphisme et monomorphisme)

1. Dans un sens procéder par contraposée, et à l'aide d'un élément non atteint par f construire g_1 et g_2. Dans l'autre constater que g_1 et g_2 coïncident sur l'image de f.
2. Dans un sens considérer pour x_1 et x_2 fixés des applications $G \to \{x_1\}$ et $G \to \{x_2\}$ pour un G non vide. Dans l'autre sens écrire la définition de l'injectivité.

Indication 7 · Énoncé p. 3 (Un des deux)
Au choix:

- ▷ Procéder par **rédaction automatique**.
- ▷ Procéder par contraposée.
- ▷ Utiliser l'exercice 6.

On pourra faire des schémas pour les contre-exemples.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Inversibilité à gauche et à droite)
Procéder par double implication à chaque fois.

Pour le sens direct du deuxième point on pourra admettre que l'on peut choisir un élément dans un ensemble **non vide** (à méditer).

Méditer aussi le lien avec l'exercice 6

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Aller-retour)

1. Procéder par exemple par double implication.

   Pour le sens direct considérer le cas particulier des singletons.

   Pour le sens réciproque, un sens est toujours vrai. Utiliser l'injectivité pour l'autre.
2. Procéder par exemple par double implication.

   Pour le sens direct considérer le cas particulier de l'ensemble tout entier.

   Pour le sens réciproque, un sens est toujours vrai. Utiliser la surjectivité pour l'autre.

Indication 10 · Énoncé p. 4 (De recouvrement disjoint à partition)
Prendre $\tilde{I} = \{i \in I \mid A_i \neq \varnothing\}$.

Indication 11 · Énoncé p. 4 (Traces d'un recouvrement disjoint)
Rédaction automatique.

Solution p. 32

Indication 12 · Énoncé p. 5 (Différence symétrique)
Pour plus de simplicité utiliser les fonctions indicatrices pour la dernière question.

Indication 13 · Énoncé p. 5 (Images directes et réciproques d'union et d'intersections)

1. Ici on peut procéder par équivalence en « dépliant et repliant » l'appartenance à un des ensembles.
2. Faire de même. Remarquer que pour le dernier point on a $(\exists y \forall x, \mathcal{P}(x,y)) \Rightarrow (\forall x \exists y, \mathcal{P}(x,y))$ mais pas nécessairement la réciproque (problématique d'uniformité).

Indication 14 · Énoncé p. 6 (Un petit contre-exemple infini)
On peut commenter que (dans le cas E infini, on verra que dans le cas fini les résultats sont différents)

- il existe des applications de E vers E injectives non surjectives ainsi que surjectives et non injectives,
- que l'existence d'un inverse à gauche n'implique pas l'existence d'un inverse à droite,
- qu'il n'y a pas unicité des éventuels inverses à gauche.

Indication 15 · Énoncé p. 6 (Un petit exercice formel)
On peut commencer par faire un schéma.

Ensuite par exemple remarquer que par symétrie il suffit de montrer $A \subset B$. Prendre $x \in A$ et effectuer une disjonction de cas selon l'appartenance éventuelle de x à C.

Alternativement à l'aide du schéma considérer $((A \cup C) \setminus C) \cup (A \cap C)$.

Indication 16 · Énoncé p. 6 (Injectivité surjectivité images directes et réciproques)
Par exemple montrer que les deux autres propositions sont équivalentes à f injective.

Indication 17 · Énoncé p. 7 (Un théorème de Cantor)
Montrer par l'absurde que $A \notin f^{\rightarrow}(E)$.

Indication 18 · Énoncé p. 7 ($\liminf \leq \limsup$)
Déplier et replier les définitions.

Alternativement réussir à interpréter les objets, et remarquer que «à partir d'un certain rang» implique «une infinité de fois».

Indication 19 · Énoncé p. 7 (Ensembles transitifs)
Ne pas se laisser perturber par la définition et utiliser les définitions.

Indication 20 · Énoncé p. 7 (Application de double trace)
Faire des schémas.

1. Dans un sens par exemple constater que pour tout $x \in E$, $\varphi(\{x\}) \neq (\varnothing, \varnothing)$. Dans l'autre reconstruire X à partir de $X \cap A$ et $X \cap B$.
2. Dans un sens constater que l'on peut atteindre $(A, \varnothing)$ (ainsi que $(\varnothing, B)$). Dans l'autre sens pour construire explicitement un antécédent.

Indication 21 · Énoncé p. 8 (Cas particulier d'images directest d'intersections)

1. Faire un schéma.
2. Que dire si pour tout $i \in I$ il existe $x_i \in A_i$ tel que $y = f(x_i)$ et si f est injective ?
3. Prendre des singletons.

Indication 22 · Énoncé p. 8 (Construction de factorisations)
Commencer par constater qu'il s'agit de l'exercice 8. Ne pas hésiter à **faire des schémas**.

1. Un sens est immédiat. Dans l'autre sens construire explicitement h en choisissant un élément.
2. Un sens est immédiat. Dans l'autre sens on peut constater que la propriété est équivalente à

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Construire explicitement h en vérifiant la bonne définition.

Indication 23 · Énoncé p. 8 (Curryfication)
Méditer sur cette suite de symboles: $x \mapsto (y \mapsto f(x, y))$.

On constate qu'on a donc avec les notations de l'exercice 25, $\left(G^F\right)^E \simeq G^{E \times F}$.

Solution p. 32

Indication 24 · Énoncé p. 9 (Sera appliqué à $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{D}^k$)
Déplier les définitions.

Indication 25 · Énoncé p. 9 (Propriétés universelles diluées)

1. Mettre les images en couple. Ne pas oublier de montrer qu'il s'agit d'une bijection.
2. Disjoncter selon les antécédents. Ne pas oublier de montrer qu'il s'agit d'une bijection.
3. On pourrait utiliser ainsi les unions et produits cartésiens.

   Plus prosaïquement on peut commenter qu'on a donc (en notant $A \simeq B$ si il existe une bijection entre A et B)

$$E^G \times F^G \simeq (E \times F)^G \quad \text{et} \quad G^E \times G^F \simeq G^{E \sqcup F}.$$

Indication 26 · Énoncé p. 10 (Deux équations ensemblistes)
Faire un schéma et le regarder.

Solution p. 32

Indication 27 · Énoncé p. 10 (Ensemble des parties et opérations)
Faire un schéma, attention au type des objets.

Indication 28 · Énoncé p. 11 (Attention aux diagrammes de Venn)
Pour n ensembles on a 2^n cas possibles.

Constater que le schéma avec des cercles manque des cas ! Il peut donc mener à des intuitions fausses.

Indication 29 · Énoncé p. 12 (Un petit tour)
Par exemple par récurrence.

Indication 30 · Énoncé p. 12 (Image directe et réciproques de complémentaires)

1. Par exemple « déplier et replier » les définitions.
2. Procéder par double implication. Dans un sens considérer des singletons. Dans l'autre sens travailler sur les éléments.
3. Procéder par double implication. Dans un sens considérer l'ensemble vide. Dans l'autre sens travailler sur les éléments.

Indication 31 · Énoncé p. 12 (Tiré en arrière et poussé en avant, le début)
Ne pas avoir peur des définitions et remarquer le lien avec d'autres exercices du TD.

Indication 32 · Énoncé p. 13 (Applications de restrictions et recollements)

1. Dans un sens déterminer un antécédent de deux constantes différentes. Dans l'autre sens construire un antécédent par disjonction.
2. Dans un sens que dire de la constante égale à 1 et de $\mathbb{1}_{A \cup B}$. Dans l'autre reconstituer f à partir de $f_{|A}$ et $f_{|B}$.

Indication 33 · Énoncé p. 13 (Écriture d'ensembles)
Choisir entre extension et compréhension, le plus simple est probablement: extension, les deux, les deux, compréhension, compréhension.

Indication 34 · Énoncé p. 13 (Exemples d'applications)
Commencer par, dans chacun des cas, faire un petit schéma.

D'où l'importance des ensembles de départ et d'arrivée ! Les réponses sont (il faut les démontrer, avec une preuve, et donc parfois un contre-exemple)

1. Ni injective ni surjective.
2. Surjective non injective.
3. Injective non surjective.
4. Bijective.
5. Injective non surjective.
6. Ni injective ni surjective.

Indication 36 · Énoncé p. 14 (Propriété universelle du produit $\prod$)
Par exemple $H = E \times F$ muni des projections canoniques convient (à démontrer).

Beaucoup de commentaires possibles: faire un schéma, essayer de montrer que (H, π_E, π_F) est unique à bijection près, et donc qu'on a défini par un « langage catégorique » les produits.

Indication 37 · Énoncé p. 14 (Propriété universelle de l'union disjointe $\coprod$)
Par exemple $H = E \sqcup F$ muni des injections canoniques convient (à démontrer).

Beaucoup de commentaires possibles: faire un schéma, essayer de montrer que (H, ι_E, ι_F) est unique à bijection près, et donc qu'on a défini par un « langage catégorique » les unions disjointes.

On observe que le produit $\prod$ et l'union disjointe $\coprod$ sont des notions duales !

Indication 38 · Énoncé p. 14 (Fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ sous contraintes)
Par récurrence il n'y a que $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Indication 39 · Énoncé p. 15 (Une chaîne d'équivalence parmi d'autres)
Tout cela équivaut à l'injectivité.

Procéder par chaîne d'implications.

Indication 40 · Énoncé p. 15 (Applications en vrac d'exercices précédents)
1. Par l'exercice 5 en décomposant $g \circ f \circ g$ des deux façons, g est injective et surjective. Puis $f = g^{-1} \circ (g \circ f \circ g) \circ g^{-1}$ est bijective comme composée de bijections.
2. Prendre par exemple une projection comme contre-exemple. Si f injective, simplifier par l'exercice 6 la relation $f \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E$. De même pour surjective.
3. De même simplifier à gauche ou à droite puis conclure.
4. Constater que g est bijective. Composer $f \circ g$ et $g \circ h$ par g^{-1}.

Indication 41 · Énoncé p. 15 (Juste appliquer la définition)
Juste prendre son temps et appliquer la définition.

Solution p. 34

Indication 42 · Énoncé p. 15 (Un des exercices les plus inintéressants)
Remarquer que $A \in \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

Indication 43 · Énoncé p. 16 (Injectivité et union croissante)
Dans un sens la restriction d'une injection est une injection.

Dans l'autre sens montrer que si $x, y \in A_\infty$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x, y \in A_N$.

Indication 44 · Énoncé p. 16 (Aller-retour bis)
Faire des schémas.

Ensuite rédaction automatique.

Indication 45 · Énoncé p. 17 (Un peu de localité)

1. Le premier point ne dit rien (à part une non vacuité): en effet on peut toujours construire à x une telle fonction (par exemple la constante égale à x).

   Le second point permet de montrer que f est surjective.
2. On a la surjectivité. On peut récupérer l'injectivité en prenant par exemple n_x et n_y.

Indication 46 · Énoncé p. 17 (Encore des composées d'injections et de surjections)

1. Écrire la définition.
2. Idem.

Indication 47 · Énoncé p. 17 (Quelques exemples de dénombrabilité)
Ne pas oublier de vérifier qu'il s'agit bien de bijections.

1. Par exemple, $n \mapsto (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.
2. Par exemple $(n, p) \mapsto 2^p(2n+1)$ (puis $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{N}$).
3. Remarquer que par fonction indicatrice $2^{\mathbb{N}}$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Faire l'exercice 17.
4. Plusieurs méthodes.

   Exhiber deux injections $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ et utiliser le théorème de Cantor-Bernstein, cf DM Bonus.

   Ou bien regarder le premier DM Bonus.

Indication 48 · Énoncé p. 18 (Calculs ensemblistes en vrac)
Faire des schémas.

Ensuite soit procéder en travaillant avec des éléments ou bien directement par calculs ensemblistes.

Indication 49 · Énoncé p. 18 (Produit cartésien, union et intersection)
Rédaction automatique.

Pour le schéma faire le cas $E = F = \mathbb{R}$ où les ensembles sont des intervalles.

Indication 50 · Énoncé p. 18 (Peut-on simplifier les produits cartésiens ?)
Encore une rédaction automatique.

Solution p. 35

Indication 51 · Énoncé p. 18 (Un exercice pas si tordu)
Commencer par le sens $\Longleftarrow$.

Pour le sens $\Rightarrow$, faire une rédaction automatique, soit en montrant un ou soit par contraposée.

Solution p. 35

Indication 52 · Énoncé p. 19 (Mini-problème: introduction à la finesse d'une partition)

1. Par double implication. On pourra commencer par traiter l'exercice 11.
2. /
3. Vérifier les axiomes. Pour le dernier point, il s'agit de la différence entre famille et ensemble.
4. $\omega = (E)$ et $\varepsilon = (\{x\})_{x\in E}$
5. Faire un schéma et méditer sur les $A_i \cap B_j$.
6. On obtient donc une relation d'ordre avec une notion de minimum.

Indication 53 · Énoncé p. 20 (Mini problème: La cinquième preuve du livre)

1. Rédaction automatique.
2. Il « suffit » de faire pour 2 et conclure par récurrence.

   Remarquer que pour tout $\tilde{b} \in A_{a,b}$, $A_{a,b} = A_{a,\tilde{b}}$.

   Pour U_1 et U_2 deux ouverts remarquer que si $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ alors il existe $\tilde{b} \in U_1 \cap U_2$.

   Prendre ensuite tout multiple commun des deux raisons.
3. Passage au complémentaire des propriétés sur les ouverts.
4. Écrire $\overline{A_{a,b}}$ comme l'union de $a-1$ ouverts.
5. Si l'ensemble des nombres premiers est fini, alors $\{-1,1\}$ est le complémentaire d'une union finie de fermés, donc ouvert.

   Mais il est non vide fini.

Solutions

Solution pour l'exercice 1 · Énoncé p. 2 · Indication p. 21 (Fonction indicatrice et opérations)

1. On procède par double implication.

▷ $\Rightarrow$ Supposons $A \subset B$.

Soit $x \in E$.

On procède par disjonction de cas.

▷ Si $x \in A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$. De plus comme $A \subset B$ on a aussi $x \in B$ et donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$. Donc $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.
▷ Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$. De plus $\mathbb{1}_B(x) \in \{0, 1\}$. Donc $\mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.

Dans tous les cas

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x).$$

▷ Supposons maintenant que $\forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)$.

Soit $x \in A$.

Alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$. Donc $1 \leq \mathbb{1}_B(x)$ et $\mathbb{1}_B(x) \in \{0, 1\}$. Donc $\mathbb{1}_B(x) = 1$, c'est à dire $x \in B$.

On a donc $A \subset B$.

On a donc bien montré que $\boxed{A \subset B \textbf{ ssi } \forall x \in E, \mathbb{1}_A(x) \leq \mathbb{1}_B(x)}$.

2. ▷ On a

$$\boxed{\mathbb{1}_{E \setminus A} = 1 - \mathbb{1}_A}$$

c'est à dire

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_{E \setminus A}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x).$$

En effet, soit $x \in E$, on vérifie l'égalité par disjonction de cas:

▷ Si $x \in A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_{E \setminus A}(x) = 0 = 1 - 1$.
▷ Si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$ et $\mathbb{1}_{E \setminus A}(x) = 1 = 1 - 0$.

▷ On a

$$\boxed{\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B}$$

c'est à dire

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x).$$

En effet soit $x \in E$, on vérifie par disjonction de cas:

▷ Si $x \in A$ et $x \in B$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 1$ et $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 1 = 1 \times 1$.
▷ Si $x \notin A$ ou $x \notin B$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(x) = 0$ d'où $\mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x) = 0$. Et $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = 0$.

▷ On a

$$A \cup B = E \setminus ((E \setminus A) \cap (E \setminus B))$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\cup B} &= 1 - \mathbb{1}_{(E\setminus A)\cap(E\setminus B)}\\ &= 1 - \mathbb{1}_{E\setminus A} \times \mathbb{1}_{E\setminus B}\\ &= \boxed{1 - (1-\mathbb{1}_A) \times (1-\mathbb{1}_B)}\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 - (1-\mathbb{1}_A(x)) \times (1-\mathbb{1}_B(x)).$$

On peut aussi réécrire cette égalité en (développement)

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$$

ou encore (disjonction de cas)

$$\mathbb{1}_{A\cup B} = \max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B).$$

Variante

Plutôt que d'utiliser $A \cup B = E \setminus ((E \setminus A) \cap (E \setminus B))$ on aurait aussi pu utiliser une disjonction de cas.

Soit $x \in E$. On procède par disjonction de cas:

- ▷ Si $x \in A$ et $x \in B$.

  Alors $x \in A \cup B$ d'où $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$.

  De plus $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 1$ d'où $1 - (1-\mathbb{1}_A(x)) \times (1-\mathbb{1}_B(x)) = 1 - (1-1)(1-1) = 1$.
- ▷ Si $x \in A$ et $x \notin B$.

  Alors $x \in A \cup B$ d'où $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$.

  De plus $\mathbb{1}_A(x) = 1$ et $\mathbb{1}_B(x) = 0$ d'où $1 - (1-\mathbb{1}_A(x)) \times (1-\mathbb{1}_B(x)) = 1 - (1-1)(1-0) = 1$.
- ▷ Si $x \notin A$ et $x \in B$.

  Alors $x \in A \cup B$ d'où $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$.

  De plus $\mathbb{1}_A(x) = 0$ et $\mathbb{1}_B(x) = 1$ d'où $1 - (1-\mathbb{1}_A(x)) \times (1-\mathbb{1}_B(x)) = 1 - (1-0)(1-1) = 1$.
- ▷ Si $x \notin A$ et $x \notin B$.

  Alors $x \notin A \cup B$ d'où $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 0$.

  De plus $\mathbb{1}_A(x) = 0$ et $\mathbb{1}_B(x) = 0$ d'où $1 - (1-\mathbb{1}_A(x)) \times (1-\mathbb{1}_B(x)) = 1 - (1-0)(1-0) = 0$.

Dans tous les cas

$$\forall x \in E, \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 - (1-\mathbb{1}_A(x)) \times (1-\mathbb{1}_B(x)).$$

3. Pour démontrer les règles du calcul ensembliste, on constate que d'après la première question on a pour deux parties A et B,

$$\boxed{(A = B) \Leftrightarrow (\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B)}.$$

Pour montrer que deux parties $\boxed{\text{sont égales}}$ il suffit donc de montrer qu'elles ont $\boxed{\text{la même fonction indicatrice}}$.

Démontrons à titre d'exemple quelques règles du calcul ensembliste à l'aide des fonctions indicatrices (si vous souhaitez voir les autres, n'hésitez pas à demander).

▷ **Double négation**

Soit A une partie de E.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{E\setminus(E\setminus A)} &= 1 - \mathbb{1}_{E\setminus A}\\ &= 1 - (1 - \mathbb{1}_A)\\ &= \mathbb{1}_A.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E \setminus (E \setminus A) = A}$.

▷ **Associativité de l'intersection**

Soient A, B et C des parties de E.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\cap(B\cap C)} &= \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{B\cap C}\\ &= \mathbb{1}_A \times (\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C)\\ &= (\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B) \times \mathbb{1}_C\\ &= \mathbb{1}_{A\cap B} \times \mathbb{1}_C\\ &= \mathbb{1}_{(A\cap B)\cap C}.\end{aligned}$$

D'où $\boxed{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$.

▷ **Distributivité de l'intersection sur l'union**

Soient A, B et C des parties de E.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\cap(B\cup C)} &= \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{B\cup C}\\ &= \mathbb{1}_A \times (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C)\\ &= \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C\end{aligned}$$

tandis que (comme $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$ car $\mathbb{1}_A$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$)

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{(A\cap B)\cup(A\cap C)} &= \mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap C} - \mathbb{1}_{A\cap B} \times \mathbb{1}_{A\cap C}\\ &= \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_C\\ &= \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C.\end{aligned}$$

Ces deux fonctions indicatrices sont donc égales, d'où

$$\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}.$$

Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 2 · Indication p. 21 (Fonction indicatrice et identité)

Remarque préliminaire

L'injectivité n'est rien d'autre que le constat que $A = B$ **ssi** $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

Pour la surjectivité il faut, étant donné une fonction $f : E \to \{0,1\}$, montrer qu'il existe un ensemble A tel que $\mathbb{1}_A = f$.

Mais construire un tel ensemble revient à exhiber la réciproque de l'application et donc à montrer directement la bijectivité.

Notons

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{P}(E) &\to \{0,1\}^E \\ A &\mapsto \mathbb{1}_A\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi : \{0,1\}^E &\to \mathcal{P}(E) \\ f &\mapsto \{x \in E \mid f(x) = 1\}\end{aligned}$$

c'est à dire avec les notations d'images réciproques et directes $\Psi : f \mapsto f^{\leftarrow}(\{1\})$.

Montrons que Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre.

- On a bien $\Phi : \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$ et $\Psi : \{0,1\}^E \to \mathcal{P}(E)$.
- Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

  On a

  $$\begin{aligned}\Psi(\Phi(A)) &= \Psi(\mathbb{1}_A) \\ &= \{x \in E \mid \mathbb{1}_A(x) = 1\} \\ &= A.\end{aligned}$$

  Et donc on a bien

  $$\boxed{\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}}.$$

- Soit $f \in \{0,1\}^E$.

  On a

  $$\begin{aligned}\Phi(\Psi(f)) &= \Phi(\{x \in E \mid f(x) = 1\}) \\ &= \mathbb{1}_{(\{x \in E \mid f(x)=1\})}.\end{aligned}$$

  On a bien
  - f et $\Phi(\Psi(f))$ ont le même ensemble de départ (E) et le même ensemble d'arrivée ($\{0,1\}$).
  - Pour tout $\xi \in E$, par disjonction de cas
    - Si $f(\xi) = 1$ alors $\xi \in \{x \in E \mid f(x) = 1\}$ et donc $\mathbb{1}_{(\{x \in E \mid f(x)=1\})}(\xi) = 1$.
    - Sinon, comme f est à valeurs dans $\{0,1\}$ on a $f(\xi) = 0$. Et comme $\xi \notin \{x \in E \mid f(x) = 1\}$ on a $\mathbb{1}_{(\{x \in E \mid f(x)=1\})}(\xi) = 0$.

    Et donc dans tous les cas $f(\xi) = \mathbb{1}_{(\{x \in E \mid f(x)=1\})}(\xi)$.

  D'où $\Phi(\Psi(f)) = f$.

Et donc

$$\boxed{\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\{0,1\}^E}}.$$

On a donc Φ et Ψ réciproques l'une de l'autre et en particulier $\boxed{\Phi \text{ est bijective}}$.

Solution pour l'exercice 11 · Énoncé p. 4 · Indication p. 22 (Traces d'un recouvrement disjoint)
$(B \cap A_i)_{i\in I}$ est bien une famille de parties de B (car pour tout $i \in I$, $B \cap A_i \subset B$).

De plus

- ▷ Comme $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de E,

  $$E = \bigcup_{i\in I} A_i$$

  d'où on déduit

  $$B = B \cap E = B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i).$$

  c'est à dire que $(B \cap A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de B.
- ▷ Soient $i_1, i_2 \in I$ tels que $\left(A_{i_1} \cap B\right) \cap \left(A_{i_2} \cap B\right) \neq \varnothing$.

  Alors en particulier $A_{i_1} \cap A_{i_2} \supset \left(A_{i_1} \cap B\right) \cap \left(A_{i_2} \cap B\right)$ est non vide.

  Comme les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints, on en déduit que $i_1 = i_2$.

  Donc les $(B \cap A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints.

On a donc bien montré que $\boxed{(B \cap A_i)_{i\in I} \text{ est un recouvrement disjoint de } B}$.

Solution pour l'exercice 23 · Énoncé p. 8 · Indication p. 23 (Curryfication)
Posons

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F, G)) &\to \mathcal{F}(E \times F, G)\\ f &\mapsto ((x, y) \mapsto (f(x))(y))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Psi : \mathcal{F}(E \times F, G) &\to \mathcal{F}(E, \mathcal{F}(F, G))\\ g &\mapsto (x \mapsto (y \mapsto g(x, y))).\end{aligned}$$

Il suffit alors de vérifier que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(E\times F,G)}$ et $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(E,\mathcal{F}(F,G))}$.

[À rédiger par rédaction automatique.]

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 10 · Indication p. 24 (Deux équations ensemblistes)

1. **1.1.** On procède par double implication.

- ▷ Si (1) admet des solutions, avec X une telle solution, on a $A \subset X \cup A = B$ et donc $A \subset B$.

▷ Si $A \subset B$ alors en particulier on a

$$A \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \cup B) \cap \underbrace{\left(A \cup \overline{A}\right)}_{E} = A \cup B = B.$$

Et donc par exemple $B \cap \overline{A} = B \setminus A$ est une solution de (1).

On a donc bien

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow (1) \text{ admet des solutions}}.$$

1.2. On procède par exemple par double inclusion.

▷ Soit $T \in \mathcal{P}(A)$. En particulier $T \subset A \subset B$.

Alors

$$\begin{aligned}((B \setminus A) \cup T) \cup A &= ((B \setminus A) \cup A) \cup T \\ &= B \cup T = B,\end{aligned}$$

et donc $(B \setminus A) \cup T$ est une solution de (1).

▷ Soit X une solution de (1).

Posons

$$T = X \cap A.$$

On a bien $T \subset A$ i.e $T \in \mathcal{P}(A)$.

De plus, comme $X \subset B$,

$$\begin{aligned}X &= (X \cap A) \cup \left(X \cap \overline{A}\right) \\ &= T \cup \left((X \cap B) \cap \overline{A}\right) \\ &= T \cup (X \cap (B \setminus A)).\end{aligned}$$

Or $B \setminus A \subset X$: en effet, si $x \in B \setminus A$, alors $x \in B = X \cup A$ et $x \notin A$, donc $x \in X$. Ainsi $X \cap (B \setminus A) = B \setminus A$ et finalement

$$X = (B \setminus A) \cup T.$$

Ainsi on a bien montré que l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\{(B \setminus A) \cup T, T \in \mathcal{P}(A)\}}.$$

2. On peut faire exactement de même. Proposons une variation qui revient à passer au complémentaire la question précédente.

En effet

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E) &\to \mathcal{P}(E) \\ X &\mapsto \overline{X}\end{aligned}$$

est **bijective** (par exemple car elle est sa propre réciproque) et donc on obtient:

2.1. L'équation (2) admet des solutions ssi l'équation

$$\overline{X \cap A} = \overline{B}$$

admet des solutions, c'est à dire ssi l'équation

$$\overline{X} \cup \overline{A} = \overline{B}$$

en admet et (toujours par bijectivité de l'application complémentaire), par la question précédente cela équivaut à

$$\overline{A} \subset \overline{B}.$$

Or on a

$$\left(\overline{A} \subset \overline{B}\right) \iff (A \supset B)$$

et donc

$$\boxed{A \supset B \Leftrightarrow (2) \text{ admet des solutions}}.$$

2.2. Par la question précédente et le raisonnement que l'on vient d'effectuer, la condition étant vérifiée, l'ensemble des solutions est alors

$$\left\{\overline{Y},\ Y \in \left\{\left(\overline{B} \setminus \overline{A}\right) \cup T, T \in \mathcal{P}\left(\overline{A}\right)\right\}\right\}.$$

Il s'agirait ensuite de faire un travail ensembliste pour réécrire cet ensemble.

Ou bien, plus directement, par double inclusion :

- Soit $T \in \mathcal{P}\left(\overline{A}\right)$. Comme $B \subset A$ et $T \cap A = \varnothing$,
$$(B \cup T) \cap A = (B \cap A) \cup (T \cap A) = B \cup \varnothing = B,$$
donc $B \cup T$ est une solution de (2).
- Soit X une solution de (2).

  Posons
$$T = X \cap \overline{A}.$$
  On a bien $T \subset \overline{A}$ i.e $T \in \mathcal{P}\left(\overline{A}\right)$, et
$$X = (X \cap A) \cup \left(X \cap \overline{A}\right) = B \cup T.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est bien

$$\boxed{\left\{B \cup T, T \in \mathcal{P}\left(\overline{A}\right)\right\}}.$$

Solution pour l'exercice 41 · Énoncé p. 15 · Indication p. 26 (Juste appliquer la définition)
On a

- $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$,
- $\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,
- $\mathcal{P}(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

Et donc

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}}.$$

Solution pour l'exercice 50 · Énoncé p. 18 · Indication p. 27 (Peut-on simplifier les produits cartésiens ?)
Soit X un ensemble non vide.

On procède par double implication.

▷ $\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $A = B$. Alors $A \times X = B \times X$.

▷ $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons $A \times X = B \times X$.

Soit $a \in A$.

Fixons $x \in X$ (possible car $X \neq \varnothing$).

Alors $(a, x) \in A \times X = B \times X$.

Il existe donc $(b, \tilde{x}) \in B \times X$ tel que $(a, x) = (b, \tilde{x})$.

En particulier $a = b \in B$.

Donc $A \subset B$.

De même, par symétrie $B \subset A$.

Donc $A = B$.

Par double implication on a donc bien

$$\boxed{A \times X = B \times X \Leftrightarrow A = B}.$$

Remarque: Si $X = \varnothing$ alors $A \times X = B \times X = \varnothing$ quels que soient A et B.

Solution pour l'exercice 51 · Énoncé p. 18 · Indication p. 27 (Un exercice pas si tordu)
On procède par double implication.

▷ $\boxed{\Longleftarrow}$

Supposons $((\forall a \in A, a \in B)$ ou $(\forall b \in B, b \in A))$ (c'est à dire $A \subset B$ ou $B \subset A$).

On procède par disjonction de cas.

▷ Si $\forall a \in A, a \in B$.

Soit $(a, b) \in A \times B$. En particulier $a \in A$ donc $a \in B$.

Par conséquent on a bien $(\forall (a, b) \in A \times B, (a \in B$ ou $b \in A))$.

▷ De même si $\forall b \in B, b \in A$.

Soit $(a, b) \in A \times B$. En particulier $b \in B$ donc $b \in A$.

Par conséquent on a bien $(\forall (a, b) \in A \times B, (a \in B$ ou $b \in A))$.

Dans tous les cas $(\forall (a, b) \in A \times B, (a \in B$ ou $b \in A))$.

▷ $\boxed{\Rightarrow}$

On procède par contraposée.

Supposons que $\neg((\forall a \in A, a \in B) \text{ ou } (\forall b \in B, b \in A))$ c'est à dire $\exists a \in A, a \notin B$ et $\exists b \in B, b \notin A$.

Fixons de tels a et b.

Alors $(a, b) \in A \times B$ et $a \notin B$ et $b \notin A$.

On a donc bien $\neg(\forall (a, b) \in A \times B, (a \in B \text{ ou } b \in A))$.

On a donc bien

$$\boxed{(\forall (a, b) \in A \times B, (a \in B \text{ ou } b \in A)) \Leftrightarrow ((\forall a \in A, a \in B) \text{ ou } (\forall b \in B, b \in A))}.$$