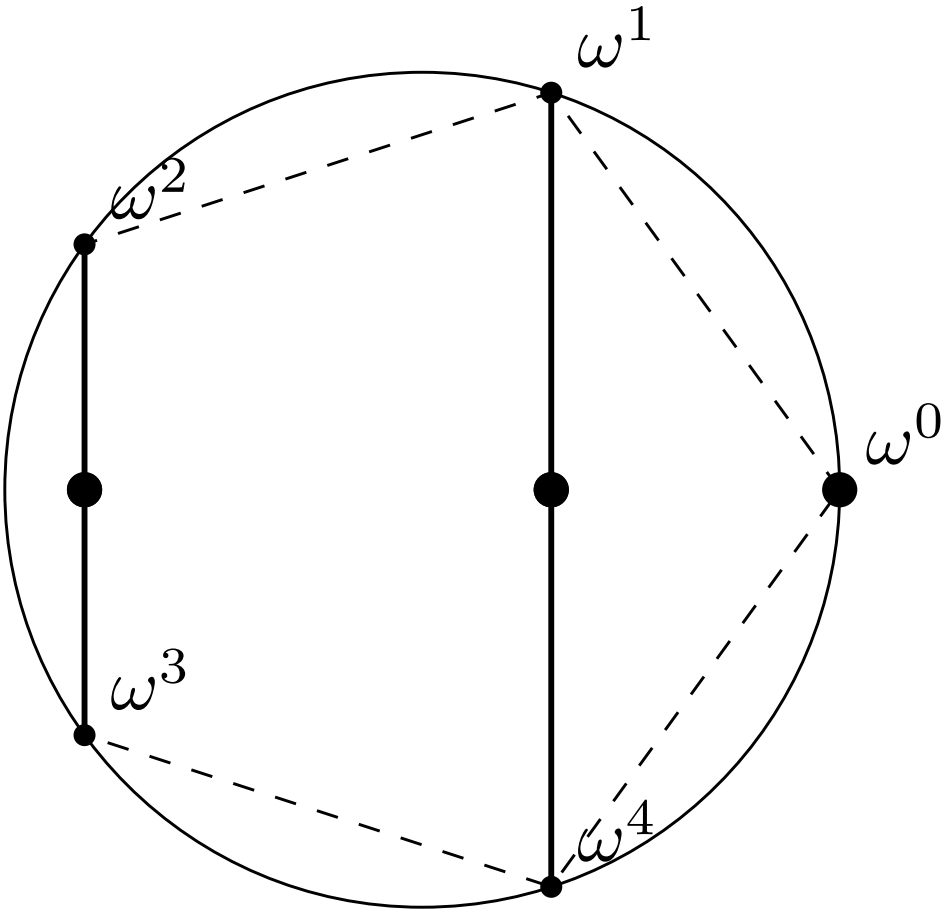
Nombres Complexes

Énoncés 2
Indications 14
Solutions 20



$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

Énoncés

Exercice 1 (◔★ Encore un trinôme pour la route)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Déterminer l'ensemble des racines complexes du trinôme $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.

Indication p. 14

Exercice 2 (◔★ Identité du parallélogramme)
Montrer que pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2.$$

Interpréter géométriquement cette égalité.

Indication p. 14 · Solution p. 20

Exercice 3 (◔★ Sommes usuelles)
Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

1. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta + \varphi).$$

2. Calculer pour $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta + \varphi).$$

Indication p. 14

Exercice 4 (◔★♣ Angle moitié et tangente)
Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. On pose $t = \tan(\frac{\theta}{2})$.

1. Montrer que
$$\frac{1+it}{1-it} = e^{i\theta}.$$
2. En déduire les formules de la tangente de l'angle moitié (c'est à dire les expressions de $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ et $\tan(\theta)$ en fonction de t).
3. En déduire que pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, l'argument de z (pris dans $]-\pi, \pi[$) est
$$\arg(z) = 2\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) + |z|}\right).$$
4. Interpréter géométriquement ce résultat.

Indication p. 14

Exercice 5 (◔★ Autour de j)
On pose
$$j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

1. Calculer les formes exponentielles et algébriques de j, j^2, j^3, $\frac{1}{j}$ et $\bar{j}$ et les représenter dans le plan complexe.
2. Calculer $1 + j + j^2$.
3. Simplifier selon les valeurs de $k \in \mathbb{Z}$ le nombre complexe j^k.
4. Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. Simplifier le produit
$$(u+v)(u+jv)(u+j^2v)$$
5. Soit $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$.

   Résoudre le système
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + jx_2 + j^2x_3 = y_2 \\ x_1 + j^2x_2 + jx_3 = y_3. \end{cases}$$

Indication p. 14

Exercice 6 (◔★ Sommes et racines n-ièmes)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega.$$

Interpréter géométriquement.

Indication p. 14

Exercice 7 (◔★♣ Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire)
Soit $(z_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{C}^n$. Dans cet exercice on dira qu'ils ont un **argument commun** si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $z_k = |z_k|\, e^{i\theta}$.

1. Redémontrer que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

2. Montrer que **si** il existe un argument commun à $z_1, ..., z_n$ **alors** $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

3. On suppose dans cette question que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

3.1. Que dire dans le cas où $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$?

On suppose désormais que ce n'est pas le cas.

3.2. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} z_k e^{-i\theta} \in \mathbb{R}_+^*.$$

3.3. En déduire que, avec un tel choix de θ,

$$\sum_{k=1}^{n} \big(|z_k e^{-i\theta}| - \mathrm{Re}\big(z_k e^{-i\theta}\big)\big) = 0.$$

3.4. Conclure qu'il existe un argument commun à $z_1, ..., z_n$.

Indication p. 14

Exercice 8 (◑★ Encore Cauchy-Schwarz)
Soient $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(\zeta_1, ..., \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$. Montrer que

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \overline{\zeta_k}\right) \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2}.$$

Indication p. 14

Exercice 9 (◑★ Trois petits calculs)

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que

$$\mathrm{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0 \iff (|z| = 1 \ \text{ ou } \ \mathrm{Im}(z) = 0).$$

2. Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$.

Montrer que

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1.$$

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Montrer que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) > \frac{1}{2} \iff |z| < 1.$$

Indication p. 14

Exercice 10 (◔☆ Produit et racines n-ièmes ?)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

Indication p. 15

Exercice 11 (◔★ Cercle unité et arithmétique)
Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Montrer que

1. $\mathbb{U}_a \subset \mathbb{U}_b \Leftrightarrow a \mid b$.

2. $\mathbb{U}_a \cap \mathbb{U}_b = \mathbb{U}_{a \wedge b}$.

Indication p. 15

Exercice 12 (◑★ $\cos(\frac{2\pi}{5})$)
Expliciter la valeur de

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Indication p. 15

Exercice 13 (◔★ Équations de cercles et de droites)
On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ de points du plan admet comme *équation complexe* $P(z) = 0$ si $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $P(z) = 0$.

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle. Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{C}$ et $\gamma \in]-|\omega|^2, +\infty[$ tels que $\mathcal{C}$ admet comme équation complexe

$$z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z - \gamma = 0.$$

2. Soit $\mathcal{D}$ une droite. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{D}$ admet comme équation complexe

$$\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + \beta = 0.$$

Indication p. 15

Exercice 14 (◔★ Somme nulle de trois nombres de même module)
Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes non nuls tels que

$$|z_1| = |z_2| = |z_3|$$
$$z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

Montrer qu'il existe $\xi \in \mathbb{C}^*$ tel que $\{z_1, z_2, z_3\} = \{\xi, \xi j, \xi j^2\}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Indication p. 15

Exercice 15 (◑★ Fejér et Dirichlet)
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

On fixe désormais $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0[2\pi]$.

1. Déterminer une expression fermée (c'est à dire sans symbole $\sum$) de $D_n(x)$.

On pose aussi

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ikx}.$$

2. Montrer que

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

3. En déduire une expression fermée de $F_n(x)$ puis que $F_n(x) \in \mathbb{R}_+$.

Indication p. 15 · Solution p. 20

Exercice 16 (◔★ Somme de deux carrés)
On note

$$K = \{n \in \mathbb{N} \text{ t.q } \exists (a,b) \in \mathbb{N}^2, n = a^2 + b^2\}.$$

1. Traduire en français la définition de K.
2. Montrer que K est stable par produit, c'est à dire,
$$\forall (n,m) \in K^2, n \times m \in K.$$
3. **Bonus**: L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \text{ t.q } \exists (a,b,c) \in \mathbb{N}^3, n = a^2 + b^2 + c^2\}$ est-il stable par produit ?

Indication p. 15

Exercice 17 (◑★ Homographie et cercles/droites)
1. Montrer que l'image directe d'un cercle par une similitude directe est un cercle.
2. On définit une inversion f_0 par:
$$f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{z} \end{array}.$$
Montrer que l'image directe par f_0 d'un cercle ne contenant pas 0 est un cercle ne contenant pas 0, et que l'image d'une droite ne contenant pas 0 est une droite ne contenant pas 0.
3. Énoncer et démontrer une proposition similaire pour
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{-d}{c}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$
où $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ sont tels que $ad - bc \neq 0$.
4. Que dire des cercles ou droites passant par $\frac{-d}{c}$ et de leur image par f ?

Indication p. 16

Exercice 18 (◔★ On se ramène aux racines)
Déterminer selon $n \in \mathbb{N}$, les solutions de l'équation

$$z^n = \overline{z}.$$

Indication p. 16

Exercice 19 (◔★ Symétries axiales)

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{2i\theta}\overline{z} \end{aligned}$$

est une symétrie axiale (que l'on précisera).

2. Soient $\alpha \in \mathbb{U}$ et $\beta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\alpha\overline{\beta} + \beta = 0.$$

Montrer

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \alpha\overline{z} + \beta \end{aligned}$$

est une symétrie axiale.

Montrer que réciproquement toute symétrie axiale peut s'écrire sous cette forme.

3. Que dire de la composée de plusieurs symétries ?

Indication p. 16

Exercice 20 (◑★ Triangles équilatéraux)

Soient A, B, C trois points du plan, d'affixes respectives a, b et c.

Montrer que le triangle ABC est équilatéral ssi

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0.$$

Indication p. 16

Exercice 21 (◔★ Un exemple du cours d'algèbre générale)

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on définit

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[j] &= \left\{a + bj, (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\} \\ \mathbb{Q}[j] &= \left\{a + bj, (a,b) \in \mathbb{Q}^2\right\} \end{aligned}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ et $\mathbb{Q}[j]$ sont stables par somme et par produit.

2. Montrer que l'inverse de tout élément de $\mathbb{Q}[j]$ non nul est dans $\mathbb{Q}[j]$.

Indication p. 16

Exercice 22 (◕☆ Théorème de Napoléon)
Soient A, B, C trois points du plan non alignés, d'affixes respectives a, b et c.

On construit les points D, E et F tels que les triangles ABF, BCD et CAE soient équilatéraux et extérieurs au triangle ABC.

1. Faire un schéma.

On note G, H et I les centres des triangles BCD, CAE et ABF.

2. Montrer que GHI est un triangle équilatéral.

Indication p. 16

Exercice 23 (◑☆ Un point fixe de exp)
1. Montrer qu'il existe $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que

$$\exp\left(\frac{b}{\tan(b)}\right)\sin(b) = b$$

2. Soit $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant l'égalité précédente. On pose $a = \frac{b}{\tan(b)}$.

Montrer que le nombre complexe $z = a + ib$ vérifie

$$e^z = z.$$

Indication p. 17

Exercice 24 (◑☆ Sommes et racines n-ièmes II)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes:
1. $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1+\omega)^n$.
2. $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |1-\omega|$.
3. $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-\omega}$.

Indication p. 17

Exercice 25 (◕☆ Une intuition géométrico-mécanique)
Soit $n \geq 2$.

Déterminer

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k}, (\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Indication p. 17

Exercice 26 (◑★ Puissance d'un point par rapport à un cercle)
Soient $\mathcal{C}$ un cercle et A un point du plan.

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par A.

1. Montrer que l'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ est constituée de 0, 1 ou 2 points.

On suppose désormais que l'intersection est non vide.

On note M et N les points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ (avec $M = N$ dans le cas où il y a un unique point).

2. Montrer que le produit des distances $AM \cdot AN$ ne dépend pas de la droite $\mathcal{D}$ choisie.

Indication p. 17 · Solution p. 22

Exercice 27 (◔☆ Vers le birapport)
Soit θ un angle tel que $\theta \not\equiv 0[\pi]$.

Montrer que l'ensemble des points d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant

$$e^{-i\theta}\left(1 + \frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R}$$

est un cercle passant par l'origine, privé de l'origine.

Indication p. 18 · Solution p. 24

Exercice 28 (◑★ Vers le birapport bis)
Soient A et B deux points distincts du plan.

Soit θ un angle tel que $\theta \not\equiv 0[\pi]$.

Déterminer le lieu des points M (distincts de A et B) tels que

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \theta[\pi].$$

Indication p. 18

Exercice 29 (◕★ Cocyclicité et birapport)
Soient A, B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives a, b, c et d.

Montrer que A, B, C et D sont **cocycliques** (i.e il existe un cercle passant par ces quatre points) ou alignés ssi

$$\frac{\left(\frac{d-a}{d-b}\right)}{\left(\frac{c-a}{c-b}\right)} \in \mathbb{R}.$$

Indication p. 18

Exercice 30 (◕☆ Inégalité et théorème de Ptolémée)
Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan, d'affixes respectives a, b, c, d.

1. Montrer que

$$AC \times BD \leq AB \times CD + AD \times BC.$$

2. Montrer que

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$$

ssi A, B, C, D sont cocycliques ou alignés, dans l'ordre A, B, C, D.

Indication p. 18

Exercice 31 (◕☆ Un exercice à astuce)

1. Soit $z \in \mathbb{C}$.

Montrer qu'il existe $\omega \in \mathbb{U}_3$ tel que $\mathrm{Re}(z\omega) \geq \frac{1}{2}\,|z|$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Montrer qu'il existe $K \subset [\![1, n]\!]$ tel que

$$\left|\sum_{k\in K} z_k\right| \geq \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}|z_k|.$$

Indication p. 18

Exercice 32 (◔☆ Une petite équation trigonométrique)
Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\mathrm{Re}((1+i)z^3) = \mathrm{Im}\left(\sqrt{2}\bar{z}^3\right)$$

Indication p. 19

Exercice 33 (◔☆ La conjugaison n'est pas affine)
Existe-t-il $a, b \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait $\overline{z} = az + b$?

Indication p. 19

Exercice 34 (◑☆ Un triangle inscrit caché)
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) = 0$ et $\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) = 0$.

Montrer que $\cos(2\alpha) + \cos(2\beta) + \cos(2\gamma) = 0$.

Indication p. 19

Exercice 35 (◑☆ Une somme de certaines racines 7-ièmes)
Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

On pose

$$Z = \omega + \omega^2 + \omega^4.$$

Déterminer Z.

Indication p. 19

Exercice 36 (◔☆ En plus du cahier de calculs: Mise sous forme algébrique)
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants:

1. $\frac{2-i}{2+i}$
2. $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$
3. $\frac{i}{i+1}$
4. $\frac{\sqrt{2}i}{1+i\sqrt{3}}$
5. $(3+3i)^3$
6. $\frac{1}{-i} - i$
7. $(2-i)(1+2i)\left(\frac{1}{i-3} - \frac{1}{i+3}\right)$

Indication p. 19

Exercice 37 (◔☆ En plus du cahier de calculs: Mise sous forme exponentielle)
Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants:

1. i
2. -3
3. $\frac{1}{5-5i}$
4. $\left(-\sqrt{3}+i\right)^5$
5. $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{6}}$
6. $\frac{1+i}{\sqrt{6}+\sqrt{2}i}$
7. $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}i\right)^2$

Indication p. 19

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Encore un trinôme pour la route)
$e^{\pm i\theta}$

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Identité du parallélogramme)
Utiliser Al-Kashi.

Solution p. 20

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Sommes usuelles)
Les fonctions trigonométriques sont des parties réelles ou imaginaires d'exponentielle complexe.

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Angle moitié et tangente)

1. Par exemple écrire $t = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et simplifier la fraction.
2. Prendre les parties réelles et imaginaires.
3. Passer de t à z.
4. Formule de l'angle au centre/angle inscrit.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Autour de j)
Voir aussi le DM sur les formules de Cardan.

Indication 6 · Énoncé p. 4 (Sommes et racines n-ièmes)
Paramétrer les racines de l'unité comme les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Barycentre d'un polygone régulier est le centre du cercle circonscrit.

Indication 7 · Énoncé p. 4 (Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire)

1. Cf cours.
2. Factoriser par $e^{i\theta}$.
3. **3.1.** Égalité.
   3.2. Cela revient à montrer que $\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)e^{-i\theta} \in \mathbb{R}_+^*$.
   3.3. Propriété d'un nombre réel positif.
   3.4. Somme de réels positifs est nulle ssi …

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Encore Cauchy-Schwarz)
Reprendre une des preuves de Cauchy-Schwarz réel en remplaçant la valeur absolue au carré $|\cdot|^2$ par le module au carré $|\cdot|^2$.

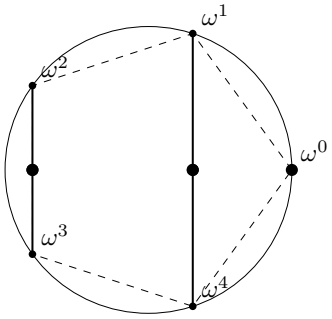
Indication 9 · Énoncé p. 5 (Trois petits calculs)
Pour chacun des calculs choisir entre forme complexe, exponentielle ou algébrique.

Indication 10 · Énoncé p. 5 (Produit et racines n-ièmes ?)
Paramétrer les racines de l'unité comme les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Indication 11 · Énoncé p. 5 (Cercle unité et arithmétique)
Écrire au choix $z \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow z^n = 1$ ou $z \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Indication 12 · Énoncé p. 5 ($\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$)
Il y a de nombreuses façons de procéder:

- ▹ Polynômes de Tchebychev
- ▹ Centre du pentagone projeté



- ▹ Polynôme palindromique
- ▹ Etc.

Dans tous les cas montrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est racine du trinôme

$$4X^2 + 2X - 1.$$

Indication 13 · Énoncé p. 6 (Équations de cercles et de droites)

1. Un cercle de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points à distance R de Ω.
2. On peut caractériser une droite à l'aide d'un point et d'un vecteur directeur ou bien d'un point et un vecteur normal.

Indication 14 · Énoncé p. 6 (Somme nulle de trois nombres de même module)
Se ramener à $z_1 = 1$.

Ensuite par exemple les parties réelles et imaginaires.

Indication 15 · Énoncé p. 6 (Fejér et Dirichlet)

1. Somme d'une suite géométrique.
2. Somme double ou Abel.
3. Somme d'une suite géométrique.

Solution p. 20

Indication 16 · Énoncé p. 7 (Somme de deux carrés)

1. Tout est dans le titre.
2. Le module du produit est le produit des modules.

3. 15

Indication 17 · Énoncé p. 7 (Homographie et cercles/droites)
Se rappeler l'équation d'un cercle.

Pour le dernier point, au lieu de faire de nombreux calculs, interpréter f comme une composée de similitudes directes et de f_0.

Indication 18 · Énoncé p. 7 (On se ramène aux racines)
Forme exponentielle (après avoir traité $z = 0$).

Indication 19 · Énoncé p. 8 (Symétries axiales)
1. C'est la symétrie par rapport à l'axe faisant un angle θ par rapport à l'horizontale et passant par l'origine.
2. Faire comme les similitudes directes.
3. Distinguer selon la parité du nombre de symétries (et dans le cas pair distinguer le cas particulier de la translation).

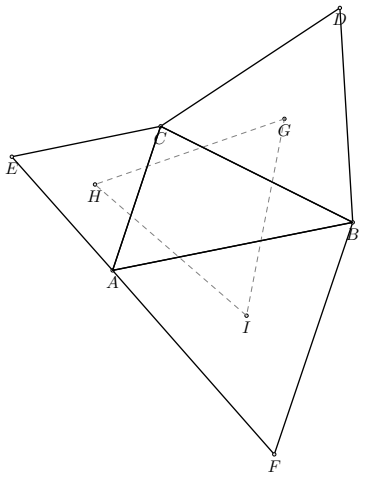
Indication 20 · Énoncé p. 8 (Triangles équilatéraux)
On peut commencer par se ramener à $a = 1$.

On peut même par translation, rotation et dilatation se ramener à $(a, b) = (1, j)$.

On remarque que si les trois points sont confondus, c'est bien un triangle équilatéral.

Indication 21 · Énoncé p. 8 (Un exemple du cours d'algèbre générale)
1. Pour le produit remarque que $j^2 = -1 - j$.
2. On rappelle que pour tout z non nul $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Indication 22 · Énoncé p. 9 (Théorème de Napoléon)
1. On obtient le schéma ci-dessous.



2. Commencer par faire l'exercice 20.

Montrer que si z_1 et z_2 sont deux affixes, alors les deux affixes correspondant à un troisième sommet de triangle équilatéral sont $\frac{z_1+z_2}{2} \pm i\sqrt{3}\frac{z_1-z_2}{2}$.

Terminer les calculs.

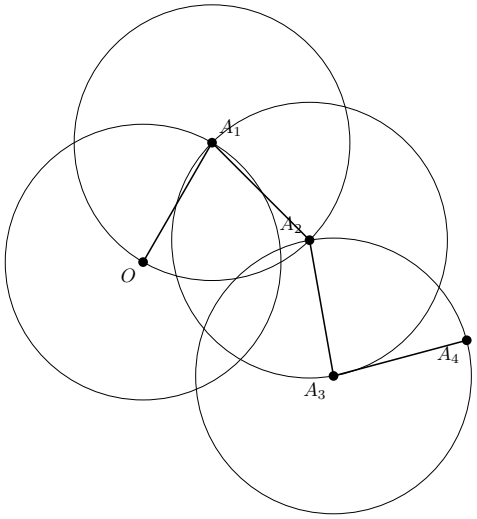
Indication 23 · Énoncé p. 9 (Un point fixe de exp)
Par exemple étude de fonction.

Indication 24 · Énoncé p. 9 (Sommes et racines n-ièmes II)

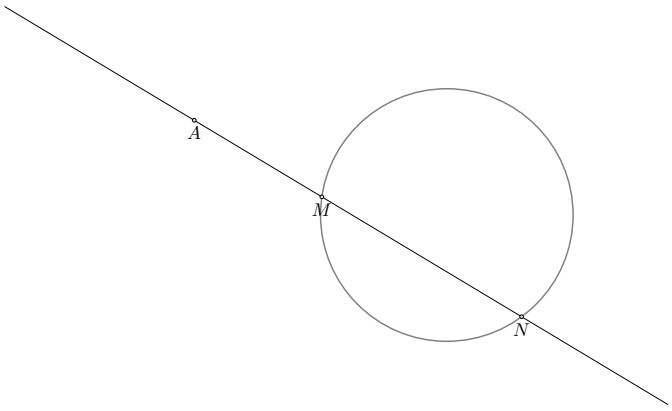
1. Par exemple développer et somme double.
2. Par exemple angle moitié.
3. Par exemple décomposer $\frac{X-1}{X^n-1}$. Alternativement c'est un réel, et chaque terme est de partie réelle $\frac{1}{2}$.

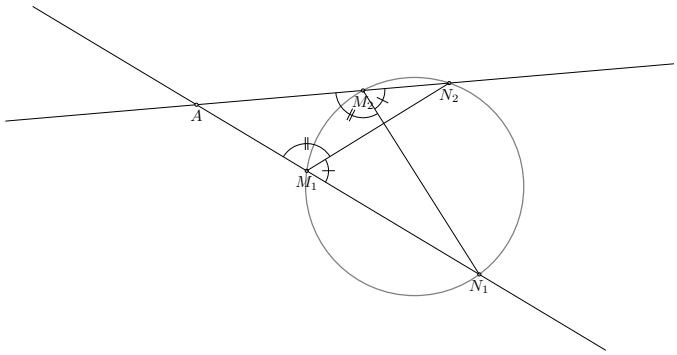
Indication 25 · Énoncé p. 9 (Une intuition géométrico-mécanique)
Il s'agit d'un disque (cf schéma ci-dessous).

Dans un sens l'inégalité triangulaire, dans l'autre faire le cas $n = 2$ et une récurrence.



Indication 26 · Énoncé p. 10 (Puissance d'un point par rapport à un cercle)
On commence évidemment, comme pour tout exercice de géométrie, par **faire un schéma !**





1. Par exemple établir une équation du second degré.
2. Par exemple remarquer que pour l'équation du second degré précédente, on peut se ramener à rechercher le produit des racines.

   Alternativement, utiliser le théorème de Thalès, c'est à dire des triangles semblables.

Solution p. 22

Indication 27 · Énoncé p. 10 (Vers le birapport)
Paramétrer par ce réel.

Ou bien constater que $z \in \mathbb{R}$ ssi $z = \overline{z}$.

Dans tous les cas il peut être intéressant de traiter l'exercice 13.

Solution p. 24

Indication 28 · Énoncé p. 10 (Vers le birapport bis)
Comme tout problème de géométrie: faire un schéma, bien choisir un repère. Puis ici juste calculer un argument.

Indication 29 · Énoncé p. 11 (Cocyclicité et birapport)
Par exemple commencer par montrer que A, B, C et D sont cocycliques ou alignés ssi

$$\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB} \ [\pi].$$

Indication 30 · Énoncé p. 11 (Inégalité et théorème de Ptolémée)

1. Remarquer que

$$(b-a)(d-c) + (c-b)(d-a) = (d-b)(c-a).$$

2. Faire d'abord l'exercice 29.

Indication 31 · Énoncé p. 11 (Un exercice à astuce)

1. Par exemple interpréter géométriquement.
2. Découper $[\![1, n]\!]$ en trois parties à l'aide de la question précédente.

Prendre celle maximisant la somme des modules.

Indication 32 · Énoncé p. 11 (Une petite équation trigonométrique)
Forme exponentielle (après avoir traité $z = 0$).

Indication 33 · Énoncé p. 12 (La conjugaison n'est pas affine)
Non. Il faut maintenant le montrer.

Indication 34 · Énoncé p. 12 (Un triangle inscrit caché)
Interpréter comme $e^{i\alpha} + e^{i\beta} + e^{i\gamma} = 0$.

Indication 35 · Énoncé p. 12 (Une somme de certaines racines 7-ièmes)
On pourra déterminer $Z + \bar{Z}$ et $Z\bar{Z}$.

Indication 36 · Énoncé p. 12 (En plus du cahier de calculs: Mise sous forme algébrique)
RAS. Parfois un passage par forme exponentielle peut être plus rapide, parfois pas.

Indication 37 · Énoncé p. 13 (En plus du cahier de calculs: Mise sous forme exponentielle)
RAS. Ne pas oublier que le module est positif, et ne pas hésiter à faire des schémas.

Solutions

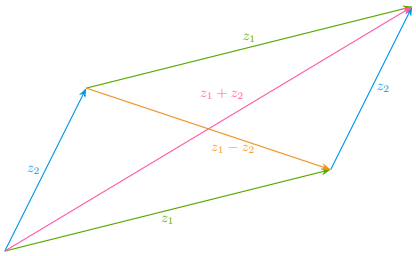
Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 2 · Indication p. 14 (Identité du parallélogramme)
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

On a par Al-Kashi

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_1|^2+|z_2|^2-2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

et donc

$$\boxed{2(|z_1|^2+|z_2|^2) = |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2}.$$



L'interprétation géométrique est la suivante: «la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés».

Solution pour l'exercice 15 · Énoncé p. 6 · Indication p. 15 (Fejér et Dirichlet)

1. Comme $e^{ix} \neq 1$, on a par somme d'une suite géométrique

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} \left(e^{ix}\right)^k \\ &= e^{-inx}\frac{1-e^{(2n+1)ix}}{1-e^{ix}} \\ &= \frac{e^{-inx}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \\ &= \frac{-2i\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)e^{i\frac{x}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}} \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

2. Il s'agit d'inverser une « somme triangulaire » mais avec un triangle qui n'est pas rectangle.

Dans le doute on peut par exemple se ramener à l'utilisation de symboles de Kronecker.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=-k}^{k} e^{i\ell x}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=-n}^{n} \delta_{-k\leq\ell\leq k} e^{i\ell x}\\ &= \sum_{\ell=-n}^{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{-k\leq\ell\leq k} e^{i\ell x}\\ &= \sum_{\ell=-n}^{n} e^{i\ell x}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{-k\leq\ell\leq k}\\ &= \sum_{\ell=-n}^{n} e^{i\ell x}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{|\ell|\leq k}\\ &= \sum_{\ell=-n}^{n} e^{i\ell x}(n-|\ell|)\end{aligned}$$

et par conséquent on a bien

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = \sum_{\ell=-n}^{n}\left(1-\frac{|\ell|}{n}\right)e^{i\ell x}}.$$

3. Ainsi, par les deux questions précédentes

$$\begin{aligned}F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left((k+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{ix}\right)^k\right)\\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\right)\\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{x}{2}}\frac{-2ie^{i\frac{nx}{2}}\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2ie^{i\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\operatorname{Im}\left(e^{i\frac{nx}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2\end{aligned}$$

et donc,

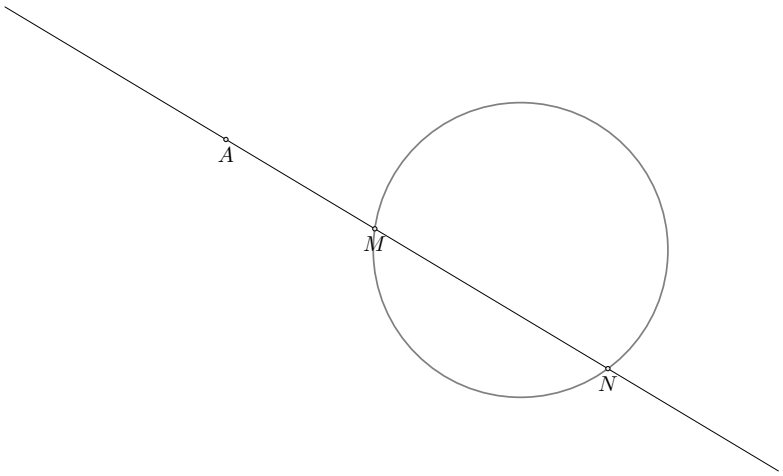
$$\boxed{F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2}$$

et comme le carré d'un nombre réel est un réel positif, on a bien $\boxed{F_n(x)\in\mathbb{R}_+}$.

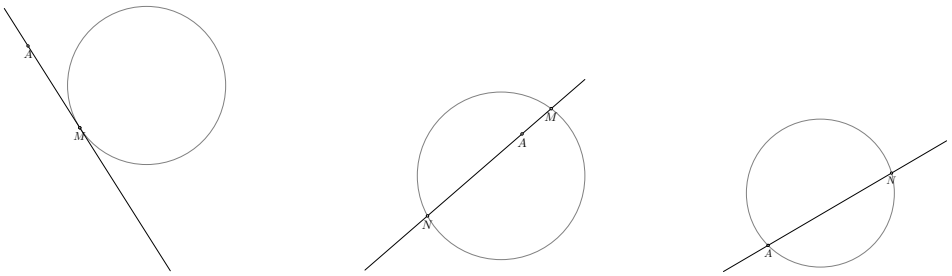
Remarque culturelle: D_n s'appelle le noyau de Dirichlet et F_n le noyau de Fejér, qui comme on le voit est une moyenne « triangulaire » des noyaux de Dirichlet.

Une propriété essentielle du noyau de Fejér est sa **positivité**, que l'on vient de trouver. Voir par exemple les cours de séries de Fourier que vous suivrez dans quelques années.

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 10 · Indication p. 17 (Puissance d'un point par rapport à un cercle)
Comme il s'agit d'un exercice de géométrie, on commence évidemment par faire un schéma générique:



Sachant que d'autres cas sont possibles, mais que pour un schéma mieux vaut choisir une configuration générique.



1. On choisit un repère d'origine le centre du cercle $\mathcal{C}$.

Remarque: on pourrait aussi choisir comme unité de longueur le rayon du cercle et même choisir le repère pour obtenir par exemple A sur l'axe réel.

Notons R le rayon de $\mathcal{C}$ et α l'affixe du point A.

Une représentation *cartésienne* de $\mathcal{C}$ est alors

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = R^2\}$$

et étant donné $\omega \in \mathbb{U}$ représentant l'affixe d'un vecteur directeur normalisé de la droite $\mathcal{D}$, une représentation *paramétrique* de $\mathcal{D}$ est

$$\{\alpha + t\omega, t \in \mathbb{R}\}.$$

On cherche donc les $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$|\alpha + t\omega|^2 = R^2$$

c'est à dire

$$t^2 + 2t\,\mathrm{Re}(\alpha\overline{\omega}) + |\alpha|^2 - R^2 = 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré, de discriminant

$$\Delta = 4\mathrm{Re}(\alpha\overline{\omega})^2 - 4(|\alpha|^2 - R^2).$$

On a donc

- si $\Delta < 0$, alors l'intersection est vide,
- si $\Delta > 0$, alors l'intersection est constituée de deux points,
- si $\Delta = 0$, alors l'intersection est constituée d'un point.

2. On se place donc dans le cas où le discriminant est positif.

On garde de plus les mêmes notations qu'à la question précédente.

Soient t_1 et t_2 les deux racines (éventuellement confondues) de $X^2 + 2\,\mathrm{Re}(\alpha\overline{\omega})X + |\alpha|^2 - R^2$.

Alors, par la question précédente, les affixes des points d'intersection sont $\alpha + t_1\omega$ et $\alpha + t_2\omega$.

Les distances AM et AN sont alors $|\alpha - (\alpha + t_1\omega)|$ et $|\alpha - (\alpha + t_2\omega)|$ c'est à dire $|t_1|$ et $|t_2|$.

Par conséquent on a

$$AM \cdot AN = |t_1 t_2|$$

et donc par relations coefficients racines

$$\boxed{AM \cdot AN = \big||\alpha|^2 - R^2\big|}$$

qui ne dépend que de $\mathcal{C}$ et de A, et ne dépend pas de $\mathcal{D}$.

Remarque: on peut même montrer que le produit des distances algébriques est constant, et cette quantité, nommée puissance de A par rapport au cercle $\mathcal{C}$ est très utile en géométrie.

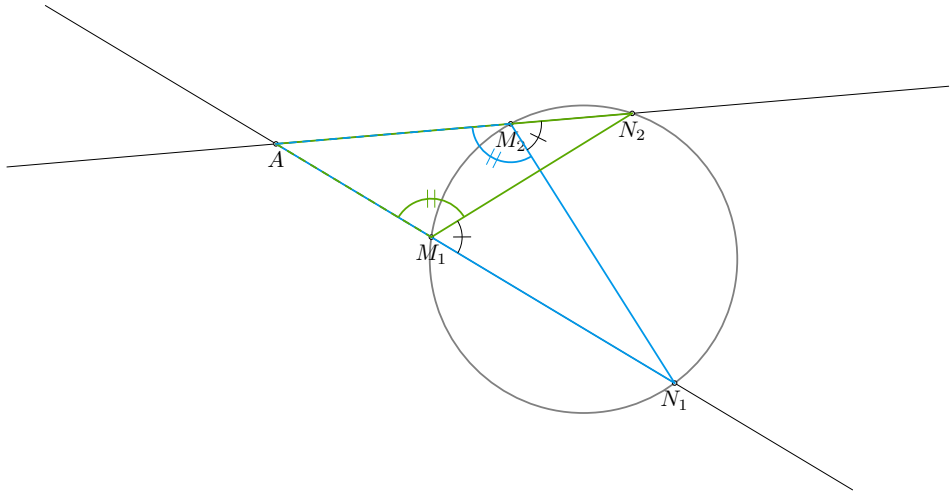
Remarque: une variante est de remarquer (cas particulier de l'angle moitié) que les angles $N_1\widehat{M_2}N_2$ et $N_1\widehat{M_1}N_2$ sont égaux et par conséquent les angles $A\widehat{M_2}N_1$ et $A\widehat{M_1}N_2$ sont aussi égaux.

Par conséquent les triangles AM_2N_1 et AM_1N_2 sont semblables (car deux angles égaux) et par conséquent on a

$$\frac{AM_2}{AN_1} = \frac{AM_1}{AN_2}$$

d'où l'égalité entre $AM_2 \cdot AN_2$ et $AM_1 \cdot AN_1$.

(Preuve à rédiger en détails et ne pas oublier de traiter aussi le cas de tangence).



Solution pour l'exercice 27 · Énoncé p. 10 · Indication p. 18 (Vers le birapport)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

On a la chaîne d'équivalences (en multipliant par $z\overline{z} \neq 0$):

$$\begin{aligned}
e^{-i\theta}\left(1+\frac{1}{z}\right) \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow e^{-i\theta}\left(1+\frac{1}{z}\right) = \overline{e^{-i\theta}\left(1+\frac{1}{z}\right)} \\
&\Leftrightarrow e^{-i\theta} + e^{-i\theta}\frac{1}{z} = e^{i\theta} + e^{i\theta}\frac{1}{\overline{z}} \\
&\Leftrightarrow |z|^2\ e^{-i\theta} + e^{-i\theta}\overline{z} = |z|^2\ e^{i\theta} + e^{i\theta} z \\
&\Leftrightarrow \left(e^{-i\theta} - e^{i\theta}\right)\ |z|^2 + \left(e^{-i\theta}\overline{z} - e^{i\theta} z\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow -2i\sin(\theta)\left(|z|^2 - \left(\frac{e^{-i\theta}}{2i\sin(\theta)}\overline{z} + \overline{\frac{e^{-i\theta}}{2i\sin(\theta)}} z\right)\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-ie^{-i\theta}}{2\sin(\theta)}\overline{z}\right) + \left|\frac{-ie^{-i\theta}}{2\sin(\theta)}\right|^2 = \left|\frac{-ie^{-i\theta}}{2\sin(\theta)}\right|^2 \\
&\Leftrightarrow \left|z - \frac{-ie^{-i\theta}}{2\sin(\theta)}\right|^2 = \frac{1}{(2\sin(\theta))^2}
\end{aligned}$$

et on obtient bien l'équation d'un $\boxed{\text{cercle}}$ (de centre $\frac{-ie^{-i\theta}}{2\sin(\theta)} = -\frac{1}{2} - \frac{i\cos(\theta)}{2\sin(\theta)}$ et de rayon $\frac{1}{2|\sin(\theta)|}$) privé de l'origine.

Ce cercle passe bien par l'origine : le module du centre est égal au rayon.