Binôme et Trigonométrie

Énoncés 2
Indications 9
Solutions 13

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Énoncés

Avant tout, travailler les chapitres idoines du **cahier de calcul**.

Exercice 1 (◔★♣ Les fondamentaux)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer chacune des formules suivantes d'au moins trois manières différentes.

1. (symétrie)

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

2. (somme)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

3. (formule de la capitaine)

$$\forall k \in [\![1, n]\!], k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Indication p. 9

Exercice 2 (◔★ Calculs de sommes)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k+1}\binom{n}{k}.$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}.$

Indication p. 9

Exercice 3 (◔★ Formule de Vandermonde)
Soient $(n, m, r) \in \mathbb{N}^3$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

Indication p. 9

Exercice 4 (◔★ Une des sommes)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes

1. $$\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}.$$

2. $$\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k\equiv 1[3]}} \binom{n}{k}.$$

Indication p. 9

Exercice 5 (◔★ Le fameux $\cos(\varphi)$)
Soit $\omega > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. On pose $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Calculer

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 9 · Solution p. 13

Exercice 6 (◔★♠ Somme sur une colonne)
Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall n \geq p,\ \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Indication p. 9

Exercice 7 (◔★♠ Formule des capitaines)
Soient p, k, n trois entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$. Montrer que

$$\binom{k}{p}\binom{n}{k} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}.$$

Indication p. 10

Exercice 8 (◑★♠ Formules d'inversions)
Soient $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $(b_0, ..., b_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Montrer que

▷ **Première formule d'inversion de Pascal**

$$\left(\forall i \in [\![0,n]\!], a_i = \sum_{j=0}^{n} \binom{i}{j} b_j\right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in [\![0,n]\!], b_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-i} \binom{i}{j} a_j\right)$$

▷ **Seconde formule d'inversion de Pascal**

$$\left(\forall i \in [\![0,n]\!], a_i = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{i} b_j\right) \Leftrightarrow \left(\forall i \in [\![0,n]\!], b_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} a_j\right)$$

Indication p. 10

Exercice 9 (◔★ Vers Fourier)
Soit $\omega > 0$. On pose $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Soient n et m deux entiers naturels.

Calculer

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\,\mathrm{d}t.$$

Indication p. 10

Exercice 10 (◔★ Somme des carrés des coefficients binomiaux)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Indication p. 10

Exercice 11 (◔★ Somme de cosinus au carré)
Soit $\omega \not\equiv 0[\pi]$, $\varphi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} (\cos(k\omega + \varphi)^2)$$

Indication p. 10

Exercice 12 (◔★ On mélange les deux)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\sin(k\theta))^3.$$

Indication p. 10

Exercice 13 (◔★ Encadrement du sinus)

1. Montrer que
$$\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x.$$
2. Montrer que
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x.$$
3. Représenter graphiquement les deux inégalités précédentes.

Indication p. 10

Exercice 14 (◔★ Linéarisation)
Linéariser les expressions suivantes

1. $\cos(\theta)^3$
2. $\sin(\theta)^3$
3. $\cos(\theta)^4 \sin(\theta)^2$
4. $\cos(\theta)^5 \sin(\theta)$

Indication p. 10

Exercice 15 (◔★ Petites équations)
Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnues $x \in \mathbb{R}$)

1. $\cos(x)\sin(x) > \frac{\sqrt{3}}{4}$.
2. $\cos(x) + \sin(x) \leq 1$.
3. $\cos(x)^3 + \sin(x)^3 = 1$.
4. $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.

Indication p. 11 · Solution p. 13

Exercice 16 (◔☆ Généralisation des petites équations)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation
$$\sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = 0$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation
$$\cos(x)^n + \sin(x)^n = 1$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Indication p. 11

Exercice 17 (◔★ Fermat pour $n = 2$)
Montrer qu'il existe une infinité de solutions à l'équation
$$r^2 + s^2 = 1$$
d'inconnue $(r, s) \in \mathbb{Q}^2$.

Indication p. 11 · Solution p. 15

Exercice 18 (◔★ Valeur explicite)
Déterminer la valeur de
$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Indication p. 11 · Solution p. 16

Exercice 19 (◔★ Somme sur les diagonales descendantes)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $p \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{k} = \binom{n+p+1}{p}.$$
et représenter graphiquement cette égalité.

Indication p. 11 · Solution p. 17

Exercice 20 (◑★ Somme sur les diagonales montantes)
On définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$$

et représenter graphiquement cette égalité.

Indication p. 11

Exercice 21 (◑★ Polynômes de Tchebychev de seconde espèce)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un et unique polynôme de degré $n-1$, noté U_{n-1}, tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(n\theta) = U_{n-1}(\cos(\theta))\sin(\theta).$$

Indication p. 12

Exercice 22 (◔★ Une somme alternée)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}.$$

Indication p. 12

Exercice 23 (◔★ Sommes usuelles II)
Soit θ un angle tel que $\cos(\theta) \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

Calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{(\cos(\theta))^k}.$$

Indication p. 12

Exercice 24 (◔★ Somme d'inverses de coefficients binomiaux et télescopage)
Calculer pour tout $n \geq 3$,

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{k}{3}}.$$

Indication p. 12

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Les fondamentaux)
Chacune des quatre définitions possibles des coefficients donne un angle d'approche (sauf éventuellement la formule explicite):

- ▷ Combinatoire
- ▷ Polynomial
- ▷ Récurrence et Pascal
- ▷ Explicite

1. On a par exemple:
- ▷ Sélectionner k objets parmi n revient à choisir les $n-k$ «qu'on ne sélectionne pas».
- ▷ Pour tout x non nul $(1+x)^n = x^n(x^{-1}+1)^n$.
- ▷ Poser une hypothèse de récurrence sur n: «$\forall k \in [\![0,n]\!]$ … ».
- ▷ On a aussi $k!(n-k)! = (n-k)!k!$

2. On a par exemple:
- ▷ Choisir un groupe revient à choisir la taille du groupe puis le groupe.
- ▷ $1+1=2$
- ▷ Une récurrence en prenant soin des termes de bords (revient à redémontrer l'implication Pascal vers Newton).
- ▷ La formule explicite n'est pas forcément une bonne idée.

3. On a par exemple:
- ▷ Choisir une équipe avec une capitaine.
- ▷ $((1+X)^n)' = n(1+X)^{n-1}$
- ▷ Comme pour les autres récurrences faire un schéma pour se convaincre que tout marche bien.
- ▷ Ici la formule explicite fonctionne.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Calculs de sommes)
Utiliser au choix la formule de la capitaine ou bien dériver $(1+X)^n$.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Formule de Vandermonde)
Par double comptage ou bien développer $(1+X)^n(1+X)^m$.

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Une des sommes)

1. $1-1*0$

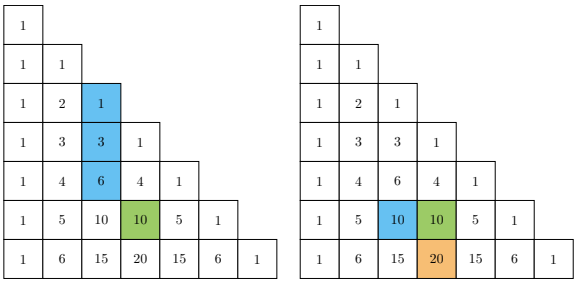
2. Méditer sur les suites 3-périodiques et les racines 3-ièmes de l'unité.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Le fameux $\cos(\varphi)$)
Linéariser !

Solution p. 13

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Somme sur une colonne)
Encore une fois, chaque définition donne une méthode de démonstration:

▷ Un schéma montre que la récurrence par Pascal est directe.
▷ Choisir un ensemble de $p+1$ éléments en commençant par choisir le plus grand élément.
▷ Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n}(1+X)^k$.



Indication 7 · Énoncé p. 3 (Formule des capitaines)
▷ La récurrence fonctionne mais nécessite un schéma
▷ Choisir une équipe de k élèves dont p capitaines.
▷ Constater que $((1+X)^n)^{(p)} = n(n-1)\cdots(n-p+1)(1+X)^{n-p}$.
▷ Il s'agit d'un des rares cas où la formule explicite fonctionne.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Formules d'inversions)
Au choix interpréter comme des translations de polynômes ou bien calculer la somme

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j-i}\binom{i}{j}\sum_{k=0}^{n}\binom{j}{k}b_k.$$

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Vers Fourier)
Linéariser.

Indication 10 · Énoncé p. 4 (Somme des carrés des coefficients binomiaux)
Constater que pour tout k,

$$\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

Indication 11 · Énoncé p. 4 (Somme de cosinus au carré)
Linéariser.

Indication 12 · Énoncé p. 5 (On mélange les deux)
Linéariser.

Indication 13 · Énoncé p. 5 (Encadrement du sinus)
Au pire, faire une étude de fonction.

Indication 14 · Énoncé p. 5 (Linéarisation)
On obtient:
1. $\cos(\theta)^3 = \frac{\cos(3\theta)+3\cos(\theta)}{4}$

2. $\sin(\theta)^3 = \frac{-\sin(3\theta)+3\sin(\theta)}{4}$
3. $\cos(\theta)^4\sin(\theta)^2 = \frac{-\cos(6\theta)-2\cos(4\theta)+\cos(2\theta)+2}{32}$
4. $\cos(\theta)^5\sin(\theta) = \frac{\sin(6\theta)+4\sin(4\theta)+5\sin(2\theta)}{32}$

Indication 15 · Énoncé p. 5 (Petites équations)
Ne pas oublier de faire des schémas de cercles trigonométriques.

Solution p. 13

Indication 16 · Énoncé p. 6 (Généralisation des petites équations)
1. Somme géométrique.
2. Distinguer $n = 1$, $n = 2$ et $n > 2$.

Indication 17 · Énoncé p. 6 (Fermat pour $n = 2$)
Il s'agit de paramétrer le cercle unité par un paramétrage rationnel.

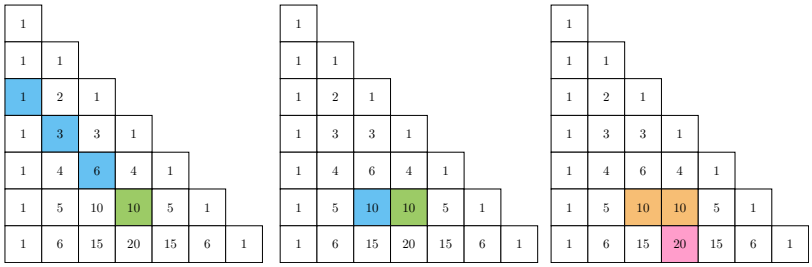
Solution p. 15

Indication 18 · Énoncé p. 6 (Valeur explicite)
Utiliser les formules d'angle double.

Solution p. 16

Indication 19 · Énoncé p. 6 (Somme sur les diagonales descendantes)
Procéder par une récurrence bien choisie (et donc en utilisant la formule de Pascal comme dans toute récurrence sur les coefficients binomiaux).

Pour s'aider dans la récurrence on pourra remarquer que cette dernière revient au schéma ci-dessous.



Solution p. 17

Indication 20 · Énoncé p. 7 (Somme sur les diagonales montantes)
Procéder par une récurrence double.

Indication 21 · Énoncé p. 7 (Polynômes de Tchebychev de seconde espèce)
Procéder exactement comme pour les polynômes de Tchebychev de première espèce.

Indication 22 · Énoncé p. 7 (Une somme alternée)
Faire un schéma et procéder par récurrence.

Indication 23 · Énoncé p. 7 (Sommes usuelles II)
Pour tout k,

$$\frac{\cos(k\theta)}{(\cos(\theta))^k} = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{e^{i\theta}}{\cos(\theta)}\right)^k\right).$$

Indication 24 · Énoncé p. 8 (Somme d'inverses de coefficients binomiaux et télescopage)
Commencer par exemple pour $p = 2$ et $p = 3$.

Remarquer un télescopage et le généraliser.

Solutions

Solution pour l'exercice 5 · Énoncé p. 3 · Indication p. 9 (Le fameux $\cos(\varphi)$)
On commence par **linéariser**.

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi) &= \frac{\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)}{2}\frac{\left(e^{i(\omega t+\varphi)}+e^{-i(\omega t+\varphi)}\right)}{2}\\ &= \frac{e^{i(2\omega t+\varphi)}+e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}+e^{-i(2\omega t+\varphi)}}{4}\\ &= \frac{1}{2}\cos(2\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}\cos(\varphi)\end{aligned}$$

Remarque: ici il aurait été légèrement plus rapide d'utiliser la formule de produit $\cos(a)\times\cos(b)=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$.

Par conséquent, en intégrant, et comme $\omega T = 2\pi$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2T}\int_0^T \cos(2\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2T}\int_0^T\cos(\varphi)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2T}\left[\frac{\sin(2\omega t+\varphi)}{2\omega}\right]_0^T+\frac{1}{2T}T\cos(\varphi)\\ &= \frac{1}{4T\omega}\underbrace{(\sin(2\omega T+\varphi)-\sin(\varphi))}_{=0}+\frac{1}{2}\cos(\varphi)\end{aligned}$$

d'où on a bien

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{\cos(\varphi)}{2}}.$$

Solution pour l'exercice 15 · Énoncé p. 5 · Indication p. 11 (Petites équations)
Il est très fortement conseillé de **faire des schémas de cercles trigonométriques**.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\cos(x)\sin(x) > \frac{\sqrt{3}}{4} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(2x) > \frac{\sqrt{3}}{4}\\ &\Leftrightarrow \sin(2x) > \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Leftrightarrow \sin(2x) > \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, 2x \in \left]\frac{\pi}{3}+2k\pi, \left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi\right[\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, x \in \left]\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{3}+k\pi\right[\end{aligned}$$

et donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right)}.$$

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\cos(x)+\sin(x)\leq 1 &\Leftrightarrow \sqrt{1^2+1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\cos(x)+\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}\sin(x)\right)\leq 1\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right)\leq 1\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 1\\ &\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leq\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, x-\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi\right]\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, x\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right]\end{aligned}$$

et donc l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right]}.$$

3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a

$$\cos(x)^3+\sin(x)^3=1$$

ssi

$$\cos(x)^3+\sin(x)^3=\cos(x)^2+\sin(x)^2$$

c'est à dire

$$\cos(x)^2(1-\cos(x))+\sin(x)^2(1-\sin(x))=0.$$

Or pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos(x)^2(1-\cos(x))\geq 0$ et $\sin(x)^2(1-\sin(x))\geq 0$, et comme une somme de termes positifs est nulle ssi tous les termes sont nuls on en déduit que x est solution ssi

$$\cos(x)^2(1-\cos(x))=0 \text{ et } \sin(x)^2(1-\sin(x))=0$$

c'est à dire

$$\left(x\equiv\frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } x\equiv 0[2\pi]\right) \text{ et } \left(x\equiv 0[\pi] \text{ ou } x\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\right)$$

ce qui par distributivité de «et» sur «ou», puis en simplifiant donne

$$x\equiv 0[2\pi] \text{ ou } x\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi].$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\{2k\pi,k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

Remarque: De manière exactement semblable on peut résoudre pour tout $n \geq 3$ l'équation $\cos(x)^n + \sin(x)^n = 1$. Les cas $n = 0, 1, 2$ se traitant chacun à part.

4. Il y a de nombreuses façons de procéder.

On peut par exemple reconnaître une **somme usuelle**.

- ▷ Si $x \equiv 0[2\pi]$ alors $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.
- ▷ Sinon, $e^{ix} \neq 1$, et donc par somme géométrique

$$\begin{aligned} 0 + \sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) &= \mathrm{Im}\Big(1 + e^{ix} + \left(e^{ix}\right)^2 + \left(e^{ix}\right)^3\Big) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{4ix} - 1}{e^{ix} - 1}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{2ix} 2i\sin(2x)}{e^{i\frac{x}{2}} 2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\ &= \sin\left(\frac{3}{2}x\right)\frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

et par conséquent la somme est nulle ssi

$$\sin\left(\frac{3}{2}x\right) = 0 \ \text{ ou } \ \sin(2x) = 0$$

c'est à dire

$$\frac{3}{2}x \equiv 0[\pi] \ \text{ ou } \ 2x \equiv 0[\pi]$$

ou encore

$$x \equiv 0\left[2\frac{\pi}{3}\right] \ \text{ ou } \ x \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right].$$

On conclut donc que x est solution ssi

$$\boxed{x \equiv 0[2\pi] \ \text{ ou } \ x \equiv 0\left[\tfrac{2\pi}{3}\right] \ \text{ ou } \ x \equiv 0\left[\tfrac{\pi}{2}\right]}$$

ce qui peut se réécrire

$$x \equiv 0 \ \text{ ou } \ \frac{\pi}{2} \ \text{ ou } \ \frac{2\pi}{3} \ \text{ ou } \ \pi \ \text{ ou } \ \frac{4\pi}{3} \ \text{ ou } \ \frac{3\pi}{2}[2\pi]$$

Solution pour l'exercice 17 · Énoncé p. 6 · Indication p. 11 (Fermat pour $n = 2$)
D'après la formule de la tangente de l'angle moitié, comme $\theta \mapsto \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est bijective de $]-\pi, \pi[$ vers $\mathbb{R}$, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{U} \setminus \{-1\} \\ t &\mapsto \frac{1 - t^2}{1 + t^2} + i\frac{2t}{1 + t^2} \end{aligned}$$

est bijective (on parle de paramétrisation du cercle unité).

Il suffit donc de trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\frac{2t}{1+t^2}$ soient rationnels. Par exemple tous les $t \in \mathbb{Q}$ conviennent.

D'où il existe une infinité de solutions rationnelles.

Remarque: on a donc montré que pour tout $(p, q, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ on a

$$\left(d(q^2-p^2)\right)^2 + (d(2pq))^2 = \left(d(q^2+p^2)\right)^2$$

et on a donc exhibé une infinité de solutions à l'équation diophantienne

$$a^2 + b^2 = c^2$$

d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$.

On pourrait en fait montrer que l'on obtient ainsi toutes les solutions.

Solution pour l'exercice 18 · Énoncé p. 6 · Indication p. 11 (Valeur explicite)
On utilise une formule de duplication.

Par exemple, comme $\frac{\pi}{8} \neq \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$, on a, en posant

$$t = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

par les formules de la tangente de l'angle moitié,

$$1 = \tan\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2t}{1-t^2}$$

c'est à dire

$$2t = 1 \times (1-t^2)$$

ce qui est exactement l'équation du second degré

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

de discriminant $2^2 + 4 = 8 > 0$ et de racines réelles

$$\frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Or $1 < \sqrt{2}$ et comme $\frac{\pi}{8} \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $t \geq 0$.

Donc

$$\boxed{\tan\left(\tfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1}.$$

Une variante (équivalente) est de remarquer que

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{\frac{e^{i\frac{\pi}{8}}-e^{-i\frac{\pi}{8}}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}}{2}} \\ &= -i\frac{e^{i\frac{\pi}{8}}-e^{-i\frac{\pi}{8}}}{e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}} \\ &= -i\frac{\left(e^{i\frac{\pi}{8}}-e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)^2}{\left(e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{8}}-e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)} \\ &= -i\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}-2+e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}-e^{-i\frac{\pi}{4}}} \\ &= -i\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-2}{2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \boxed{\sqrt{2}-1}.\end{aligned}$$

Solution pour l'exercice 19 · Énoncé p. 6 · Indication p. 11 (Somme sur les diagonales descendantes)
La représentation graphique est la suivante

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé).

Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{k} = \binom{n+p+1}{p}$.

▷ **Initialisation**

On a

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{n+k}{k} = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}.$$

D'où le résultat pour $p = 0$.

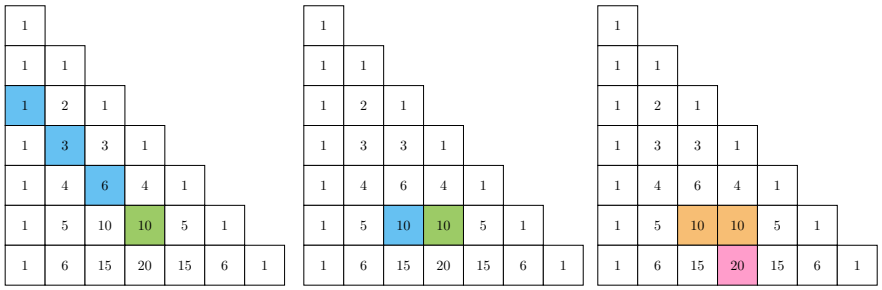
▷ **Hérédité**

Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{k} = \binom{n+p+1}{p}.$$

Alors, par définition d'une somme, par hypothèse de récurrence et par la formule de Pascal, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p+1}\binom{n+k}{k} &= \sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{k} + \binom{n+p+1}{p+1}\\ &= \binom{n+p+1}{p} + \binom{n+p+1}{p+1}\\ &= \binom{n+p+2}{p+1}\end{aligned}$$



ce qui est bien le résultat au rang $p+1$.

▷ **Conclusion**

Par récurrence on a bien

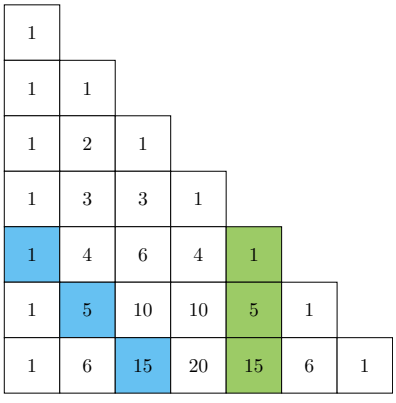
$$\forall p \in \mathbb{N}, \boxed{\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{k} = \binom{n+p+1}{p}}.$$

Variante

On peut aussi remarquer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{n}$$

et conclure à l'aide de la somme sur une colonne l'exercice 6.



Variante

On peut aussi remarquer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, par formule de Pascal

$$\binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{k-1}$$

et conclure par télescopage:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{p}\binom{n+k}{k} &= \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{p}\left(\binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{k-1}\right)\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{p}\left(\binom{n+(k+1)}{(k+1)-1} - \binom{n+(k)}{(k)-1}\right)\\ &= 1 + \left(\binom{n+(p+1)}{(p+1)-1} - \binom{n+1}{0}\right)\\ &= \boxed{\binom{n+p+1}{p}}.\end{aligned}$$

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1