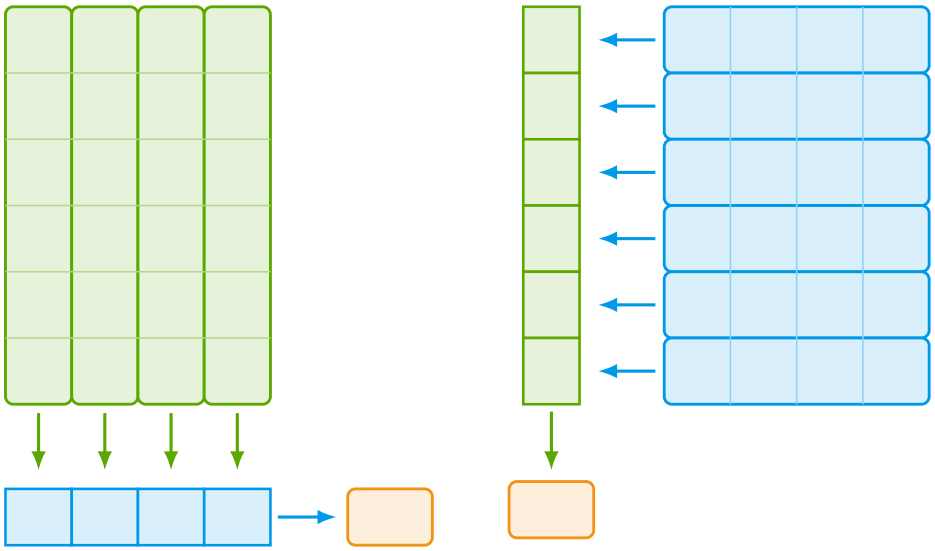
Sommes

Énoncés 2
Indications 16
Solutions 22



$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{j=0}^{n} b_j - \sum_{k=0}^{n} \left((a_k - a_{k-1}) \sum_{j=0}^{k-1} b_j \right)$$

Énoncés

Bien pratiquer le **cahier de calcul** !

Exercice 1 (◑★♠ Transformation d'Abel !)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, ..., a_{n+1}$ ainsi que $b_0, ..., b_{n+1}$ des réels.

1. Montrer que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k(b_{k+1} - b_k) = a_{n+1}b_{n+1} - a_0b_0 - \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k)b_{k+1}}.$$

2. Commenter.

Indication p. 16

Exercice 2 (◔★♣ Produit télescopique)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, ..., a_{n+1}$ des nombres tous non nuls.

Montrer que

$$\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \frac{a_{n+1}}{a_0}.$$

Indication p. 16

Exercice 3 (◔★ Produits courants et factorielle)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de la factorielle:

1. Le produit de tous les nombres pairs jusqu'à $2n$

$$P_n = \prod_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ est pair}}} k.$$

2. Le produit de tous les nombres impairs jusqu'à $2n+1$

$$I_n = \prod_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ k \text{ est impair}}} k.$$

Indication p. 16 · Solution p. 22

Exercice 4 (◔★ Une somme de beaucoup de petits termes peut être grande)
Expliciter une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Indication p. 16

Exercice 5 (◔★♣ Lien entre sommes partielles et terme général)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de S_n et S_{n-1}.

Indication p. 16

Exercice 6 (◔★♠ Équivalent de la série harmonique)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$,

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$

2. En déduire que

$$\frac{1}{\ln(n)} H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Indication p. 16

Exercice 7 (◑★ Signes alternés)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k.$$

d'au moins **3** méthodes différentes.

Indication p. 16

Exercice 8 (◑★ Espérance géométrique)
Soit $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} k x^k.$$

Indication p. 17

Exercice 9 (◔★ Un cas particulier de la formule de Cavalieri ou calcul des queues)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k a_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} a_k.$$

Indication p. 17

Exercice 10 (◔★ Exemple de produits de termes convergeant vers 1)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$$

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = 0.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Calculer

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = +\infty.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

4. Commenter.

Indication p. 17

Exercice 11 (◑★ Série harmonique en regroupant par puissance de deux)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$H_{2^n-1} \geq \frac{n}{2}$$

puis que

$$\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty.$$

Indication p. 17

Exercice 12 (◔★ Somme des inverses des carrés)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

3. Conclure qu'en posant $C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} C_n \leq 2$$

4. **Bonus** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3n}{2n+1}.$$

Que peut-on en déduire sur la limite de la suite ?

Indication p. 17

Exercice 13 (◔★ Intégrales, gendarmes et télescopages)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{40000} \frac{1}{\sqrt{k}} \in [398, 399].$$

3. Proposer un programme en `Python` calculant numériquement la valeur de cette somme.

Indication p. 18

Exercice 14 (◔★ Pot-pourri de sommes doubles)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$. Calculer les sommes suivantes:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j).$

2. $\displaystyle\sum_{0\leq i<j\leq n} q^{i+j}.$

3. $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} \binom{j}{i}.$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}.$

5. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i\neq j}} ij.$

6. $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} |i-j|.$

Indication p. 18

Exercice 15 (◑★ À vous de trouver une méthode !)

Calculer

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2025} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2025} k2^k$

3. $1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + 9^2 - 11^2 + \cdots + 2021^2 - 2023^2 + 2025^2.$

Indication p. 18

Exercice 16 (◔★ Formule de Duhamel pour les suites)
Soient $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_0 \in \mathbb{C}$ et pour $n \geq 0$

$$u_{n+1} = \alpha_n u_n + \beta_n.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k\right) u_0 + \sum_{k=1}^{n} \beta_{k-1} \left(\prod_{j=k}^{n-1} \alpha_j\right).$$

Indication p. 18

Exercice 17 (◑★ Zeta et eta, ou encore une alternance)
Soit $s \in \mathbb{C}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$$
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}.$$

Montrer que pour tout entier naturel n pair,

$$H_n = Z_n - 2^{1-s} Z_{\frac{n}{2}}.$$

Indication p. 18

Exercice 18 (◔★ Produits usuels ?)

1. Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner une forme fermée de

$$\prod_{k=0}^{n} q^k.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de la factorielle

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{5}{\sqrt{k}}.$$

Indication p. 18

Exercice 19 (◔★ Un encadrement de coefficients binomiaux)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$ on a

$$\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}.$$

En déduire que

$$\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

Indication p. 19

Exercice 20 (◑★ Un joli exo d'analyse discrète du Dr. B)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(u_0, ..., u_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

On définit la moyenne M et la variation totale V de $(u_0, ..., u_n)$ par

$$M = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|.$$

Montrer que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], |u_k| \leq |M| + V.$$

Indication p. 19

Exercice 21 (◔★ Quelques inégalités)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, ..., x_n) \in [0, 1]^n$.

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

2. Soit $n \geq 2$. Montrer que

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$$

Indication p. 19

Exercice 22 (◑★ Inégalité de Tchebychev)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ ainsi que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ des nombres réels.

1. Montrer que

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i) = n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

2. En déduire que

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{n}.$$

Indication p. 19

Exercice 23 (◔★ Encore une inégalité)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, ..., a_n) \in (0, +\infty)^n$.

Montrer d'au moins deux façons différentes

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2.$$

Indication p. 19

Exercice 24 (◑★ Regroupement ou récurrence)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Indication p. 19

Exercice 25 (◔★ Peut se faire sans récurrence)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2}{3} \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}.$$

Indication p. 19

Exercice 26 (◔☆ Encore un télescopage)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k \times (k!).$$

Indication p. 20

Exercice 27 (◑☆ Une somme triple peu intéressante)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculer

$$\sum_{(i,j,k)\in[\![1,n]\!]^3} \min(i, \max(j,k)).$$

Indication p. 20

Exercice 28 (◑☆ Somme de sommes harmoniques)
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} kH_k = \frac{n(n+1)}{2}H_n - \frac{n(n-1)}{4}.$$

Indication p. 20

Exercice 29 (◔☆ Somme alternée II)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} k$$

Indication p. 20

Exercice 30 (◔☆ Sommes et parties entières)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Indication p. 20

Exercice 31 (◔☆ C'est juste l'inégalité triangulaire)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$. Montrer que

$$\left| \frac{1-z^n}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^n}{1-|z|}.$$

Indication p. 20

Exercice 32 (◕☆ Découpage moins classique)
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} \right| \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 2.$$

Indication p. 20

Exercice 33 (◑☆ Cette magie est unique)
Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de termes strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} (u_k)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \right)^2.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = k$.

Indication p. 20

Exercice 34 (◔☆ Un zeste de produit trigonométrique)

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Rappeler la formule donnant $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

2. Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$P_n(\theta) = \prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right).$$

À l'aide de la question précédente, simplifier $P_n(\theta)$.

Indication p. 20

Exercice 35 (◔☆ Encore une autre méthode pour calculer la somme des cubes)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$S_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} ij.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} = S_n + 2 \times (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2.$$

2. En déduire une nouvelle preuve de

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

Indication p. 20

Exercice 36 (●★ Module des sommes de Gauss)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

L'objectif de cet exercice est de calculer le module de

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k^2\pi}{n}}. \end{aligned}$$

1. Montrer que

$$|S_n|^2 = \sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \omega^{(k-\ell)(k+\ell)}.$$

2. En déduire que

$$|S_n|^2 = \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{r(2k-r)}.$$

3. En déduire que

$$|S_n|^2 = n \sum_{\substack{r\in[\![0,n-1]\!] \\ n \mid 2r}} \omega^{-r^2}.$$

4. Conclure, c'est à dire déterminer $|S_n|$ en fonction de n.

Indication p. 20 · Solution p. 22

Exercice 37 (●★ Inégalité de Kuzmin-Landau)
Soient $\lambda \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $n \geq 2$ et $x_1, ..., x_n$ des réels tels que

$$\lambda \leq x_2 - x_1 \leq x_3 - x_2 \leq \cdots \leq x_n - x_{n-1} \leq 1 - \lambda.$$

L'objectif de cet exercice est de majorer la somme

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k} \right|.$$

On définit la fonction cotan sur $]0, \pi[$ par

$$\begin{array}{rccc} \text{cotan} : &]0\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}. \end{array}$$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction cotan.

Dans la suite on pose, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\zeta_k = \frac{e^{2i\pi x_k}}{e^{2i\pi x_{k+1}} - e^{2i\pi x_k}}.$$

2. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$,

$$|\zeta_k - \zeta_{k-1}| = \frac{1}{2}(\text{cotan}(\pi(x_k - x_{k-1})) - \text{cotan}(\pi(x_{k+1} - x_k))).$$

3. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k} = ((\zeta_{n-1} + 1)e^{2i\pi x_n} - \zeta_1 e^{2i\pi x_1}) - \sum_{k=2}^{n-1} e^{2i\pi x_k}(\zeta_k - \zeta_{k-1}).$$

4. Conclure que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k} \right| \leq \text{cotan}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right).$$

Indication p. 21 · Solution p. 24

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Transformation d'Abel !)

1. Adapter la preuve des sommes télescopiques. Ou bien repérer une somme télescopique bien choisie.
2. De très nombreux commentaires sont possibles. Par exemple
   - ▷ Il s'agit d'une formule généralisant les sommes télescopiques
   - ▷ Il s'agit d'une version discrète de l'intégration par parties (à méditer)
   - ▷ Cette transformée va parfois être très utile (demandez à vos parrains/marraines)
   - ▷ etc.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Produit télescopique)
Procéder exactement de même que pour les sommes télescopiques (par exemple par récurrence ou bien par découpage et changement d'indice).

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Produits courants et factorielle)

1. Remarquer que
$$P_n = \prod_{j=1}^{n} (2j)$$
2. Calculer $P_n \times I_n$ et utiliser la question précédente.

Solution p. 22

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Une somme de beaucoup de petits termes peut être grande)
Il y a plein d'exemples !

Quitte à construire un exemple, choisir une suite qui se télescope.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Lien entre sommes partielles et terme général)
Exprimer S_n en fonction de S_{n-1} et u_n. On remarquera que $S_{-1} = 0$ (somme vide).

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Équivalent de la série harmonique)

1. On peut par exemple utiliser que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ (étude de fonction).

   Ou bien (plus général), effectuer une « comparaison série-intégrale » c'est à dire comparer $\frac{1}{k}$ et $\frac{1}{k+1}$ à $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$.
2. Télescoper et simplifier.

Indication 7 · Énoncé p. 4 (Signes alternés)
Voici 8 méthodes différentes pour calculer cette somme.

- ▷ Une fois une expression explicite conjecturée, procéder par récurrence.
- ▷ On a pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Dériver l'égalité fonctionnelle et évaluer en -1.
- ▷ Regrouper les termes consécutifs deux par deux: $(-1+2)+(-3+4)+\cdots$ et distinguer selon la parité de n.

▷ Utiliser une transformée d'Abel.
▷ Calculer $\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k \text{ pair}}} k$. En déduire $\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ k \text{ impair}}} k$.
▷ Trouver un télescopage adapté.
▷ Pour n impair, exprimer $(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$ en fonction de $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$ et n. Pour le cas pair il suffit de rajouter un terme.
▷ Écrire pour tout k, $k = \sum_{i=1}^{k} 1$ et intervertir la somme triangulaire.
▷ etc.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Espérance géométrique)
Plusieurs méthodes, qui nécessitent toutes de distinguer le cas $x = 1$.
▷ Utiliser une transformée d'Abel (exercice 1).
▷ Poser $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$ et étudier f_n'. Ou bien (ici cela revient au même) $z \mapsto f_n(e^z)$.
▷ Encore plus astucieux: remarquer que $S_n = S_{n-1} + nx^n$ et qu'un changement d'indice permet d'obtenir $S_n = xS_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1}$.
▷ Utiliser la formule des queues 9.

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Un cas particulier de la formule de Cavalieri ou calcul des queues)
Constater que $k = \sum_{i=0}^{k-1} 1$.

Cette formule est très utile en probabilité, on a par exemple étant donnée une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^{n} \mathbb{P}(X = k)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > i).\end{aligned}$$

d'où le nom «formule des queues».

Indication 10 · Énoncé p. 5 (Exemple de produits de termes convergeant vers 1)
1. Pour tout $k \geq 2$, $1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$ et télescopage.
2. Pour tout $k \geq 2$, $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ et télescopage.
3. Pour tout $k \geq 2$, $1 - \frac{1}{k^2} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
4. On ne peut donc a priori rien dire d'un produit de termes tendant vers 1 !

Indication 11 · Énoncé p. 6 (Série harmonique en regroupant par puissance de deux)
1. Une somme est toujours plus grande que son plus petit terme fois le nombre de termes.
2. Regrouper par paquets entre deux puissances de deux consécutives.

Conclure par encadrement.

Indication 12 · Énoncé p. 6 (Somme des inverses des carrés)
1. Montrer que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+1}$ pour des réels α, β bien choisis et télescoper.
2. Remarquer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k}$. Faire le cas $k = 1$ à part.

3. La suite est croissante (pourquoi ?) et majorée.
4. Procéder par récurrence et en déduire un encadrement.

Indication 13 · Énoncé p. 7 (Intégrales, gendarmes et télescopages)
1. On peut multiplier par le conjugué ou calculer $\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et faire un schéma.
2. Remarquer que si pour tout k, $a_{k+1} \leq b_k \leq a_k$ alors pour tout k $b_k \leq a_k \leq b_{k-1}$.

Puis télescoper.
3. Utiliser une boucle « for » pour calculer des sommes.

Indication 14 · Énoncé p. 7 (Pot-pourri de sommes doubles)
Pour chacune des questions, faire un schéma.

1. Ici le problème est symétrique. Remarquer que par exemple à i fixé on a $[\![1,n]\!] = [\![1,i-1]\!] \sqcup \{i\} \sqcup [\![i+1,n]\!]$.
2. Ici le problème est symétrique. Remarquer que pour tous i et j, $q^{i+j} = (q^i)(q^j)$ et faire apparaître un produit de sommes. Ne pas oublier la disjonction de cas $q = 1$.
3. Ici remarquer qu'à j fixé, la somme $\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}$ se calcule.
4. Remarquer qu'à j fixé la somme $\sum_{i=1}^{j} i$ se calcule et voir une simplification apparaissant comme par magie.
5. Calculer les sommes $\sum_{1\leq i,j\leq n} ij$ et $\sum_{\substack{1\leq i,j\leq n \\ i=j}} ij$.
6. Par exemple distinguer selon $i < j$, $i = j$ et $i > j$.

Indication 15 · Énoncé p. 7 (À vous de trouver une méthode !)
1. Somme télescopique ou logarithme de produit télescopique.
2. Par exemple une transformée d'Abel ou bien le calcul de $\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$ pour tout x.
3. L'écrire sous forme de somme et faire comme le premier point, ou bien regrouper les termes 2 par 2.

Indication 16 · Énoncé p. 8 (Formule de Duhamel pour les suites)
Faire une récurrence ou un télescopage malin (adaptation de la variation de la constante).

Remarque: Cette formule n'a que peu d'intérêt pratique. Elle est le pendant discret de la très importante « formule de Duhamel » pour les équations différentielles.

Indication 17 · Énoncé p. 8 (Zeta et eta, ou encore une alternance)
Faire apparaître les termes pairs et impairs et exprimer les termes pairs à l'aide de $Z_{\frac{n}{2}}$.

On constatera que cette méthode peut être appliquée aux exercices 7 ou 29.

Indication 18 · Énoncé p. 8 (Produits usuels ?)
1. On a

$$\prod_{k=0}^{n} q^k = q^{\sum_{k=0}^{n} k}$$
$$= \boxed{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

2. On a

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{5}{\sqrt{k}} = 5^n \sqrt{\frac{1}{\prod_{k=1}^{n} k}}$$
$$= \boxed{\frac{5^n}{\sqrt{n!}}}$$

Indication 19 · Énoncé p. 9 (Un encadrement de coefficients binomiaux)
Par symétrie on peut se ramener à $k \in [\![0, n]\!]$.

Considérer par exemple le quotient entre $\binom{2n}{k}$ et $\binom{2n}{k+1}$.

Utiliser enfin que $\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$.

Indication 20 · Énoncé p. 9 (Un joli exo d'analyse discrète du Dr. B)
Montrer par exemple que $|u_k - M| \leq V$.

Indication 21 · Énoncé p. 9 (Quelques inégalités)

1. Par exemple par récurrence.

2. Constater que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $0 \leq 2 \leq k \leq n$.

Indication 22 · Énoncé p. 10 (Inégalité de Tchebychev)
Développer le produit à l'intérieur de la somme puis utiliser la linéarité.

Si nécessaire rajouter et enlever le cas $i = j$ dans le produit.

Indication 23 · Énoncé p. 10 (Encore une inégalité)
Encore une fois de nombreuses façons de procéder.

- Cauchy-Schwarz
- IAG et IAGH
- Développer et constater que si $i \neq j$, $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \geq 2$.
- Procéder par récurrence en utilisant l'IAG pour l'hérédité.

Indication 24 · Énoncé p. 10 (Regroupement ou récurrence)
Comme le résultat est donné on peut procéder par récurrence.

Alternativement en posant $S_0 = \sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k}$ et $S_1 = \sum_{\substack{k \in [\![1,2n]\!] \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k}$, exprimer les deux sommes en fonction de S_0 et S_1 (on obtient $S_1 - S_0$ et $S_0 + S_1 - 2S_0$).

Indication 25 · Énoncé p. 10 (Peut se faire sans récurrence)
Au pire faire une récurrence…

Pour faire sans identifier un télescopage:

- Soit en travaillant sur la fraction rationnelle $\frac{X^3-1}{X^3+1}$
- Soit en remarquant qu'une fois le résultat donné le télescopage peut se deviner !

Indication 26 · Énoncé p. 11 (Encore un télescopage)
Remarquer que pour tout k, $k \times (k!) = (k+1)! - k!$.

Indication 27 · Énoncé p. 11 (Une somme triple peu intéressante)
Procéder comme pour la somme $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \min(i,j)$. On obtient (sauf erreur de ma part)

$$\frac{n^2(n+1)(5n+1)}{12}.$$

Indication 28 · Énoncé p. 11 (Somme de sommes harmoniques)
En intervertissant la somme double et par linéarité il reste à sommer sur i des termes de la forme $\frac{1}{i}$, 1 et i (pour la seconde question).

Indication 29 · Énoncé p. 11 (Somme alternée II)
S'inspirer de l'exercice 7 ou 17.

Indication 30 · Énoncé p. 12 (Sommes et parties entières)
Grouper les termes deux par deux ou bien par pairs et impairs.

Indication 31 · Énoncé p. 12 (C'est juste l'inégalité triangulaire)
Inégalité triangulaire sur $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$.

Indication 32 · Énoncé p. 12 (Découpage moins classique)
Découper par blocs de la forme $[\![m^2, (m+1)^2[\![$ et traiter « à la main » le bloc restant.

Indication 33 · Énoncé p. 12 (Cette magie est unique)
Procéder par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour l'hérédité développer et obtenir une équation du second degré sur u_{n+1}.

Indication 34 · Énoncé p. 13 (Un zeste de produit trigonométrique)

1. RAS
2. La formule précédente permet de voir $\cos(\theta)$ comme un quotient de sinus qui se télescopent.

Indication 35 · Énoncé p. 13 (Encore une autre méthode pour calculer la somme des cubes)

1. Faire un schéma d'un carré de taille $(n+1) \times (n+1)$ et le décomposer en un carré $n \times n$, deux bandes $1 \times n$ et $n \times 1$ et un carré 1×1.
2. Simplifier et télescoper.

Indication 36 · Énoncé p. 14 (Module des sommes de Gauss)

1. On rappelle que $|z|^2 = z\overline{z}$ et l'identité remarquable $k^2 - \ell^2 = (k-\ell)(k+\ell)$.
2. Faire un beau schéma.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega^p\right)^k$ en fonction de p et n.
4. Pour vérifier votre résultat, il s'agit de

$$S_n = \begin{cases} (1+i)\sqrt{n} & \text{si } n \equiv 0[4] \\ \sqrt{n} & \text{si } n \equiv 1[4] \\ 0 & \text{si } n \equiv 2[4] \\ i\sqrt{n} & \text{si } n \equiv 3[4]. \end{cases}$$

Solution p. 22

Indication 37 · Énoncé p. 15 (Inégalité de Kuzmin-Landau)

1. Étude de fonction.

2. Angle moitié.

3. Transformée d'Abel.

4. Ne pas hésiter à faire un schéma, notamment pour les variations de sin.

Solution p. 24

Solutions

Solution pour l'exercice 3 · Énoncé p. 2 · Indication p. 16 (Produits courants et factorielle)
On a

$$\begin{aligned} P_n \times I_n &= \prod_{\substack{1\leq k\leq 2n \\ k \text{ est pair}}} k \times \prod_{\substack{1\leq k\leq 2n+1 \\ k \text{ est impair}}} k \\ &= \prod_{1\leq k\leq 2n+1} k \\ &= (2n+1)! \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{j=1}^{n}(2j) \\ &= 2^n \prod_{j=1}^{n} j \\ &= 2^n n! \end{aligned}$$

Du système

$$\begin{cases} P_n \times I_n = (2n+1)! \\ P_n = 2^n n! \end{cases}$$

on en déduit que

$$\boxed{\begin{cases} P_n = 2^n n! \\ I_n = \dfrac{(2n+1)!}{2^n n!} \end{cases}}.$$

Solution pour l'exercice 36 · Énoncé p. 14 · Indication p. 20 (Module des sommes de Gauss)

1. On a

$$\begin{aligned} |S_n|^2 &= S_n \overline{S_n} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \omega^{-\ell^2}\right) \\ &= \sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \omega^{k^2-\ell^2} \end{aligned}$$

d'où

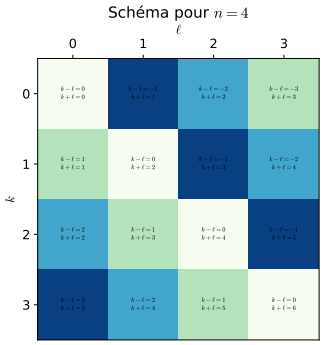
$$\boxed{|S_n|^2 = \textstyle\sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \omega^{(k-\ell)(k+\ell)}}.$$

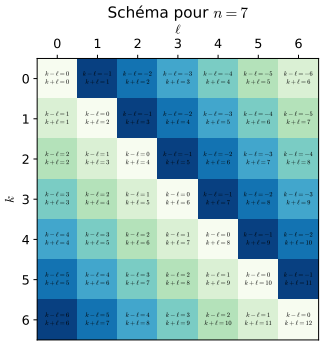
2. Comme $\omega^n = 1$, pour tout entier N, la valeur de ω^N ne dépend que de la classe d'équivalence de N modulo n (c'est à dire si $N_1 \equiv N_2[n]$ alors $\omega^{N_1} = \omega^{N_2}$).

On regroupe donc par exemple selon la classe d'équivalence de $k-\ell$ modulo n (ce qui revient à sommer sur les « diagonales »).

$$\sum_{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2} \omega^{(k-\ell)(k+\ell)} = \sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![0,n-1]\!]^2\\ k-\ell\equiv r[n]}} \omega^{(k-\ell)(k+\ell)}\right)$$
$$= \sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{r(2k-r)}\right)$$

la dernière égalité ayant lieu car pour k,ℓ,r trois entiers, si $k-\ell\equiv r[n]$ alors $(k-\ell)(k+\ell)\equiv r(2k-r)[n]$ et donc $\omega^{(k-\ell)(k+\ell)}=\omega^{r(2k-r)}$.





On a donc bien

$$\boxed{|S_n|^2 = \textstyle\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{r(2k-r)}}.$$

3. On obtient alors

$$\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{r(2k-r)} = \sum_{r=0}^{n-1}\omega^{-r^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^{2r}\right)^k$$

Or pour tout entier $p\in\mathbb{Z}$ on a (sommes géométriques)

- ▷ Si $n\mid p$, $\omega^p=1$ d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^p\right)^k = n$$

- ▷ Si $n\nmid p$, $\omega^p\neq 1$ d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^p\right)^k = \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p} = 0$$

Par conséquent

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^{2r}\right)^k = n\delta_{n|2r} = \begin{cases} n & \text{si } n\mid 2r\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

et donc

$$\boxed{|S_n|^2 = n\sum_{\substack{r\in[\![0,n-1]\!]\\ n\mid 2r}}\omega^{-r^2}}.$$

4. On procède par disjonction de cas.

▷ Si n est impair alors l'unique entier $r \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $n \mid 2r$ est 0 d'où $|S_n|^2 = n$.

▷ Si n est pair alors les deux seuls entiers $r \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $n \mid 2r$ sont 0 et $\frac{n}{2}$. Posons $m = \frac{n}{2}$.

Procédons de nouveau à une disjonction de cas

▷ Si m est pair, alors $n \mid m^2$ d'où $\omega^{-m^2} = 1$. Avec la contribution de $r = 0$ on obtient $|S_n|^2 = n(1+1) = 2n$.

▷ Si m est impair, alors $m+1$ est pair d'où $n \mid m^2 + m$ d'où $-m^2 \equiv m[n]$. Par conséquent $\omega^{-m^2} = \omega^m = -1$. Avec la contribution de $r = 0$ on obtient $|S_n|^2 = n(1-1) = 0$.

On obtient finalement

$$\boxed{|S_n| = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } n \equiv 1[2] \\ \sqrt{2n} & \text{si } n \equiv 0[4] \\ 0 & \text{si } n \equiv 2[4] \end{cases}}$$

Remarque: Gauss a obtenu (mais cela est beaucoup plus difficile que juste le module) une expression explicite pour S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \begin{cases} (1+i)\sqrt{n} & \text{si } n \equiv 0[4] \\ \sqrt{n} & \text{si } n \equiv 1[4] \\ 0 & \text{si } n \equiv 2[4] \\ i\sqrt{n} & \text{si } n \equiv 3[4] \end{cases}$$

ces sommes étant très utiles, par exemple en arithmétique.

Solution pour l'exercice 37 · Énoncé p. 15 · Indication p. 21 (Inégalité de Kuzmin-Landau)

1. La fonction cotan est dérivable sur l'intervalle $]0, \pi[$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Soit $x \in]0, \pi[$. On a

$$\text{cotan}'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

d'où le tableau de variations suivant :

x	0		π
$\text{cotan}'(x)$		$-$	
cotan	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a, par la formule de l'angle moitié,

$$\begin{aligned}\zeta_k &= \frac{1}{e^{2i\pi(x_{k+1}-x_k)}-1}\\ &= \frac{1}{e^{i\pi(x_{k+1}-x_k)}2i\sin(\pi(x_{k+1}-x_k))}\\ &= \frac{1}{2i}\frac{e^{-i\pi(x_{k+1}-x_k)}}{\sin(\pi(x_{k+1}-x_k))}\\ &= \frac{1}{2i}\frac{\cos(\pi(x_{k+1}-x_k))-i\sin(\pi(x_{k+1}-x_k))}{\sin(\pi(x_{k+1}-x_k))}\\ &= -\frac{i}{2}\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k))-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Soit $k\in[\![2,n-1]\!]$. On a

$$\begin{aligned}|\zeta_k-\zeta_{k-1}| &= \left|\frac{1}{2i}\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k))-\frac{1}{2}-\frac{1}{2i}\operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1}))+\frac{1}{2}\right|\\ &= \frac{1}{2}\left|\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k))-\operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1}))\right|.\end{aligned}$$

De plus, par la question 1, la fonction cotan est décroissante sur $]0,\pi[$, et $0<x_k-x_{k-1}\leq x_{k+1}-x_k<1$, on en déduit que

$$\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k))\leq\operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1})).$$

Finalement,

$$\forall k\in[\![2,n-1]\!],\boxed{|\zeta_k-\zeta_{k-1}|=\tfrac{1}{2}(\operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1}))-\operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k)))}.$$

3. Par définition on a

$$\sum_{k=1}^{n}e^{2i\pi x_k}=\sum_{k=1}^{n-1}(e^{2i\pi x_{k+1}}-e^{2i\pi x_k})\zeta_k+e^{2i\pi x_n}$$

et par somme télescopique (méthode de la transformée d'Abel)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(e^{2i\pi x_{k+1}}-e^{2i\pi x_k})\zeta_k &= \sum_{k=1}^{n-1}e^{2i\pi x_{k+1}}\zeta_k-\sum_{k=1}^{n-1}e^{2i\pi x_k}\zeta_k\\ &= \sum_{k=2}^{n}e^{2i\pi x_k}\zeta_{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}e^{2i\pi x_k}\zeta_k\\ &= \sum_{k=2}^{n-1}e^{2i\pi x_k}\zeta_{k-1}+e^{2i\pi x_n}\zeta_{n-1}-e^{2i\pi x_1}\zeta_1-\sum_{k=2}^{n-1}e^{2i\pi x_k}\zeta_k\\ &= e^{2i\pi x_n}\zeta_{n-1}-e^{2i\pi x_1}\zeta_1+\sum_{k=2}^{n-1}e^{2i\pi x_k}(\zeta_{k-1}-\zeta_k)\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\textstyle\sum_{k=1}^{n}e^{2i\pi x_k}=((\zeta_{n-1}+1)e^{2i\pi x_n}-\zeta_1e^{2i\pi x_1})-\sum_{k=2}^{n-1}e^{2i\pi x_k}(\zeta_k-\zeta_{k-1})}.$$

4. Par l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k}\right| \leq \left|(\zeta_{n-1}+1)e^{2i\pi x_n}\right| + \left|\zeta_1 e^{2i\pi x_1}\right| + \sum_{k=2}^{n-1}\left|e^{2i\pi x_k}(\zeta_k-\zeta_{k-1})\right|$$
$$= |\zeta_{n-1}+1| + |\zeta_1| + \sum_{k=2}^{n-1}|\zeta_k-\zeta_{k-1}|.$$

De plus :

- ▷ D'après les calculs intermédiaires de la question 2, $|\zeta_1| = \left|\frac{e^{-i\pi(x_2-x_1)}}{2i\sin(\pi(x_2-x_1))}\right| = \frac{1}{2\sin(\pi(x_2-x_1))}$.
- ▷ De même, $|1+\zeta_{n-1}| = \frac{1}{2\sin(\pi(x_n-x_{n-1}))}$.
- ▷ D'après la question 2 et une somme télescopique

$$\sum_{k=2}^{n-1}|\zeta_k-\zeta_{k-1}| = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}(\operatorname{cotan}(\pi(x_k-x_{k-1})) - \operatorname{cotan}(\pi(x_{k+1}-x_k)))$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{cotan}(\pi(x_2-x_1)) - \frac{1}{2}\operatorname{cotan}(\pi(x_n-x_{n-1})).$$

D'où on déduit

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin(\pi(x_2-x_1))} + \operatorname{cotan}(\pi(x_2-x_1))\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin(\pi(x_n-x_{n-1}))} - \operatorname{cotan}(\pi(x_n-x_{n-1}))\right).$$

Il reste à utiliser les encadrements $\lambda \leq x_2-x_1 \leq 1-\lambda$ et $\lambda \leq x_n-x_{n-1} \leq 1-\lambda$.

- ▷ La fonction cotan est décroissante sur $]0,\pi[$, par conséquent, comme $0 < \pi\lambda \leq \pi(x_2-x_1) < \pi$,

$$\operatorname{cotan}(\pi(x_2-x_1)) \leq \operatorname{cotan}(\pi\lambda)$$

et, de même, comme $0 < \pi(x_n-x_{n-1}) \leq \pi(1-\lambda) < \pi$,

$$-\operatorname{cotan}(\pi(x_n-x_{n-1})) \leq -\operatorname{cotan}(\pi(1-\lambda)) = -\operatorname{cotan}(\pi-\pi\lambda) = \operatorname{cotan}(\pi\lambda).$$

- ▷ On a $0 < \pi\lambda \leq \pi(x_2-x_1) \leq \pi-\pi\lambda < \pi$. En observant les variations de la fonction sin sur l'intervalle $]0,\pi[$, il vient que

$$\sin(\pi(x_2-x_1)) \geq \sin(\pi\lambda) > 0$$

car $\sin(\pi\lambda) = \sin(\pi-\pi\lambda)$. On a aussi $0 < \pi\lambda \leq \pi(x_n-x_{n-1}) \leq \pi-\pi\lambda < \pi$ donc, de la même façon,

$$\sin(\pi(x_n-x_{n-1})) \geq \sin(\pi\lambda) > 0.$$

Et donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k}\right| \leq \frac{1}{\sin(\pi\lambda)} + \operatorname{cotan}(\pi\lambda).$$

Finalement, comme

$$\frac{1}{\sin(\pi\lambda)} + \operatorname{cotan}(\pi\lambda) = \frac{\cos(\pi\lambda)+1}{\sin(\pi\lambda)} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2}{2\sin\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}$$

on conclut que

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi x_k}\right| \leq \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}.$$