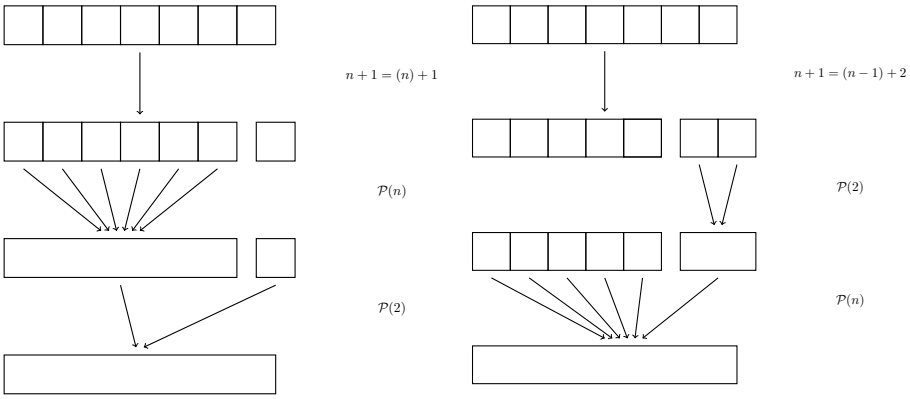
Logique

Énoncés 2
Vocabulaire mathématique 2
Méthodes de démonstration 5
Manipulations formelles 12
Indications 17
Solutions 25



$$((\mathcal{H}_1 \Rightarrow \mathcal{C}) \text{ et } (\mathcal{H}_2 \Rightarrow \mathcal{H}_1)) \Rightarrow (\mathcal{H}_2 \Rightarrow \mathcal{C})$$
$$((\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{C}_1) \text{ et } (\mathcal{C}_1 \Rightarrow \mathcal{C}_2)) \Rightarrow (\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{C}_2)$$

Énoncés

Vocabulaire mathématique

Exercice 1 (◔★♣ Formalisation des principes de preuves)
Relier chacun des principes suivants à son écriture formelle.

a. Principe de contraposée
b. Disjonction de cas
c. Double implication
d. Démonstration par l'absurde
e. Modus ponens
f. Principe de récurrence

(i) $(\mathcal{P} \text{ et } (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})) \Longrightarrow \mathcal{Q}$
(ii) $(\mathcal{P}_0 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1})) \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n)$
(iii) $(\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow ((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}))$
(iv) $((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\neg\mathcal{Q})) \Longrightarrow \mathcal{P}$
(v) $((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et } ((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R}))) \Longrightarrow \mathcal{R}$
(vi) $(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow ((\neg\mathcal{Q}) \Longrightarrow (\neg\mathcal{P}))$

Indication p. 17

Exercice 2 (◔★ Traductions II)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

Écrire à l'aide de quantificateurs et d'opérateurs logiques les propositions suivantes:

1. «f s'annule au moins une fois».
2. «f admet un maximum global».
3. «f est bornée».
4. «f est périodique».
5. «f s'annule au plus une fois».
6. «f est monotone».

Indication p. 17 · Solution p. 25

Exercice 3 (◔★ Unicité)
Soit E un ensemble *non vide* et $\mathcal{P}(x)$ un prédicat dépendant d'une variable $x \in E$.

1. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes
   (i) $\exists \xi \in E, \forall x \in E, (\mathcal{P}(x) \Longrightarrow x = \xi)$,
   (ii) $\forall (x_1, x_2) \in E^2, (\mathcal{P}(x_1) \text{ et } \mathcal{P}(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)$.
2. Quelle propriété de $\mathcal{P}$ ces propositions traduisent-elles ?

Indication p. 17

Exercice 4 (◔★ Découpage de ε I)
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) $x = y$,
(ii) $\forall \varepsilon \geq 0, |x - y| \leq \varepsilon$,
(iii) $\forall \varepsilon > 0, |x - y| \leq \varepsilon$,
(iv) $\forall \varepsilon > 0, |x - y| < \varepsilon$.

Indication p. 17

Exercice 5 (◔★ Force et faiblesse)
Étant données deux propositions $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ on dit parfois que «$\mathcal{P}_1$ est plus fort que $\mathcal{P}_2$» si $\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2$.

1. Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ trois propositions.

On suppose $\mathcal{C}_1$ est plus fort que $\mathcal{C}_2$.

Que peut-on dire des propositions $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{C}_2$?

2. Soient $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{C}$ trois propositions.

On suppose $\mathcal{H}_1$ plus fort que $\mathcal{H}_2$.

Que peut-on dire des propositions $\mathcal{H}_1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ et $\mathcal{H}_2 \Longrightarrow \mathcal{C}$?

3. Commenter.

Indication p. 17

Exercice 6 (◔★ Propriété vraie ÀPCR)
On dit qu'un prédicat $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n est vrai ÀPCR (À Partir d'un Certain Rang) ssi

$$\exists M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq M \Longrightarrow \mathcal{P}(n).$$

1. Soient $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$ deux prédicats dépendant d'un entier naturel n.

Montrer que **si** $\mathcal{P}(n)$ est vrai ÀPCR et $\mathcal{Q}(n)$ est vrai ÀPCR **alors** $\mathcal{P}(n)$ ou $\mathcal{Q}(n)$ est vrai ÀPCR.

2. Soient $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$ deux prédicats dépendant d'un entier naturel n.

Montrer que **si** $\mathcal{P}(n)$ est vrai ÀPCR et $\mathcal{Q}(n)$ est vrai ÀPCR **alors** $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$ est vrai ÀPCR.

Indication p. 17 · Solution p. 25

Exercice 7 (◔★ Monotonies)
Étant donnée une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on dit que

- ▷ φ est **croissante** ssi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y),$$

- ▷ φ est **strictement croissante** ssi

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y).$$

1. Montrer que toute fonction strictement croissante est croissante.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$(f \text{ est croissante }) \iff (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) < f(y) \Rightarrow x < y).$$

Indication p. 18

Exercice 8 (◔★ Existence et unicité)
Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(x)$ un prédicat dépendant d'une variable $x \in E$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs universels et existentiels la proposition:

«Il existe un unique x de E tel que $\mathcal{P}(x)$.»

2. Écrire la négation formelle de la proposition précédente.
3. On écrit parfois cette proposition

$$\exists ! x \in E, \mathcal{P}(x).$$

Commenter cette écriture.

Indication p. 18

Exercice 9 (◔★ Supremum et maximum)
Soit $A \subset \mathbb{R}$.

On dit que A

- ▷ admet un **maximum** ssi

$$\exists \alpha \in A, \forall a \in A, a \leq \alpha$$

- ▷ admet un **supremum** ssi

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, ((\forall a \in A, a \leq \alpha) \text{ et } (\forall M \in \mathbb{R}, (\forall a \in A, a \leq M) \Longrightarrow \alpha \leq M))$$

1. Traduire en une phrase ces deux définitions.
2. Donner un exemple de partie possédant un supremum et pas de maximum.
3. Montrer que toute partie possédant un maximum possède un supremum.

Indication p. 18

Exercice 10 (◔★ Rationnels et irrationnels)
On rappelle qu'on dit que $x \in \mathbb{R}$ est rationnel si et seulement si il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$.

On dit que $x \in \mathbb{R}$ est irrationnel si et seulement si il n'est pas rationnel.

1. Montrer que la somme de deux nombres rationnels est rationnelle.
2. Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
3. Donner un exemple de nombre irrationnel.
4. Que dire de la somme de deux nombres irrationnels ?

Indication p. 18

Exercice 11 (◑★ Fonctions périodiques et périodes)
1. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $T > 0$.

   Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition «f est T-périodique».
2. Soient $T > 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions T-périodiques.

   A-t-on nécessairement $f + g$ T-périodique ?
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition «f est périodique».
4. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques.

   A-t-on nécessairement $f + g$ périodique ?
5. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $T > 0$.

   Écrire à l'aide de quantificateurs la proposition «T est la plus petite période de f».
6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique. Existe-t-il nécessairement $T > 0$ tel que T est la plus petite période de f ?

Indication p. 18

Méthodes de démonstration

Exercice 12 (◔★♣ Tiroirs)
Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$ des entiers.

On range $k\ell + 1$ chaussettes dans ℓ tiroirs.

Montrer qu'il existe au moins un tiroir contenant (au moins) $k + 1$ chaussettes.

Indication p. 18 · Solution p. 26

Exercice 13 (◔★ Quelques démonstrations)
Démontrer les propositions suivantes:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ impair}) \Longrightarrow (n \text{ impair})$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x = \max(x, 0) - \max(-x, 0)$
3. «Si la moyenne de 48 notes est de 12 alors au moins l'une des notes est inférieure à 12.»
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1, +\infty[, (1+x)^n \geq 1 + nx$.
5. *(Sans utiliser la décomposition en facteurs premiers)*

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique couple $(v, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que q est impair et

   $$n = 2^v q.$$

6. Soit n un entier naturel. Si $2^n - 1$ est premier alors n est premier.

Indication p. 18 · Solution p. 26

Exercice 14 (◔★ Parties paires et impaires)
Étant donnée une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit que

- ▷ φ est **paire** ssi

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(-x) = \varphi(x),$$

- ▷ φ est **impaire** ssi

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(-x) = -\varphi(x).$$

1. Donner un exemple de fonction paire, un exemple de fonction impaire, un exemple de fonction paire et impaire, et un exemple de fonction ni paire ni impaire.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

   Montrer qu'il existe deux fonctions $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
   - ▷ la fonction p est paire,
   - ▷ la fonction i est impaire,
   - ▷ $f = i + p$.

   Le couple (i, p) est-il unique ?

Indication p. 19

Exercice 15 (◔★ Argument d'Euclide)

1. Soient n un entier naturel et $a_1, \cdots, a_n$ des entiers naturels non nuls et différents de 1.

Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n + 1$$

n'est pas divisible par a_i.

2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers (c'est à dire que l'affirmation «Il existe un nombre fini de nombres premiers» est fausse).

3. On note pour tout entier naturel n, p_n le n-ième nombre premier.

Montrer que $p_n \leq 2^{2^n}$.

Indication p. 19

Exercice 16 (◑★ Quelle hypothèse de récurrence ?)

On rappelle que la fonction tangente, notée tan, de domaine de définition

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

est définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tan est dérivable n fois sur son ensemble de définition et on note $\tan^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

Ainsi $\tan^{(0)} = \tan$, $\tan^{(1)} = \tan'$, $\tan^{(2)} = \tan''$, $\tan^{(3)} = \tan'''$, etc.

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \tan^{(n)}(0) \geq 0.$$

Indication p. 19

Exercice 17 (◑☆ Un exercice complet)

Démontrer la proposition suivante:

«Toute fonction périodique et monotone est constante.»

Indication p. 19 · Solution p. 30

Exercice 18 (◕☆ Un exercice complet bis)
Soient $f_1, ..., f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions périodiques et $\ell \in \mathbb{R}$.

On suppose que

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \ell.$$

Indication p. 19

Exercice 19 (◔★ Espace affine avant l'heure)
Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer qu'il existe un unique couple (c, g) où $c \in \mathbb{R}$ et $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, tel que

$$\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

et

$$\forall x \in [-1, 1],\ f(x) = g(x) + c.$$

Indication p. 19

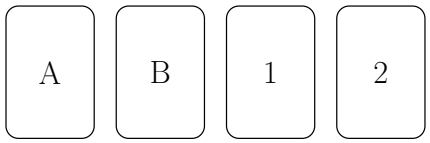
Exercice 20 (◔★ Un peu de prise d'initiative)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k. \end{cases}$$

Déterminer une expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication p. 20 · Solution p. 32

Exercice 21 (◔☆ Tâche de sélection de Wason)



On dispose de quatre cartes, chacune ayant une lettre sur une face et un chiffre sur l'autre face.

On dispose les cartes sur la table de telle sorte que sont visibles 4 faces : "A", "B", "1", "2".

Quelles cartes faut-il retourner pour vérifier si les cartes satisfont la propriété

« *au dos de chaque voyelle se trouve un chiffre pair* » ?

Indication p. 20

Exercice 22 (◑☆ Quelle récurrence ? III)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

- $a_0 < 0$
- $a_n > 0$
- il existe $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \leq 0$ pour tout $k \leq p$ et $a_k \geq 0$ pour tout $k > p$.

Montrer que l'équation

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$, admet une et unique solution réelle positive.

Indication p. 20

Exercice 23 (◑☆ Une question du Bac S 2003)
Déterminer tous les entiers x, y et z solutions de

$$x^2 + y^2 = 7z^2.$$

Indication p. 20 · Solution p. 33

Exercice 24 (◔★ Polynômes de Tchebychev camouflés)
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z^n + \frac{1}{z^n} \in \mathbb{Z}.$$

Indication p. 20 · Solution p. 34

Exercice 25 (◑☆ Un oral PC: Erdős-Surányi)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m) \in \{-1, +1\}^m$ tels que

$$n = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k k^2.$$

Indication p. 20 · Solution p. 35

Exercice 26 (◑★ Existence par comptage)
Soit $x \in \mathbb{R}$.

Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in [\![1, N]\!]$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN}.$$

Indication p. 20 · Solution p. 36

Exercice 27 (◑☆ Plusieurs façons de faire l'hérédité)
Montrer que pour tout $n \geq 3$ il existe $a_1, ..., a_n$ des entiers naturels non nuls deux à deux distincts tels que

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}.$$

Indication p. 21

Exercice 28 (◕☆ Quelle récurrence II)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2025$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \begin{cases} u_n - \frac{1}{u_n} & \text{si } u_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } u_n = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas périodique.

Indication p. 21

Exercice 29 (◔☆ Beaucoup de réels implique une proximité)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, ..., x_n \in [0, 1]$.

Montrer qu'il existe $i, j \in [\![0, n]\!]$ tels que $i \neq j$ et

$$|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}.$$

Indication p. 21

Exercice 30 (◑★ Existence sans savoir lequel)
Calculer

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}.$$

En déduire qu'il existe x, y irrationnels tels que x^y est rationnel.

Indication p. 21 · Solution p. 38

Exercice 31 (◑★ Un tout petit début de bootstrap)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in [0, +\infty[$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}.$$

Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Indication p. 21

Exercice 32 (◕★ Fejér-Jackson)
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$f_n(t) = \frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(2t)}{2} + \cdots + \frac{\sin(nt)}{n}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall t \in]0, \pi[, f_n(t) > 0.$$

Indication: On pourra utiliser le fait suivant (Théorème des Bornes Atteintes)

«Toute fonction continue sur un segment admet un minimum.»

Indication p. 21 · Solution p. 38

Manipulations formelles

Exercice 33 (◔★ Négation)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Donner la négation formelle des propositions suivantes:

1. $(\exists n \in \mathbb{N}, u_n = 0)$ ou $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0)$
2. «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée»
3. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Longrightarrow u_n \geq 1)$
4. «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante»
5. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall p \geq N, \forall q \geq N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$

Indication p. 22 · Solution p. 40

Exercice 34 (◔★ Découpage de ε I bis)
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:
   (i) $x < y$,
   (ii) $\exists \varepsilon > 0, x + \varepsilon < y$.
2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:
   (i) $x \leq y$,
   (ii) $\forall \varepsilon \geq 0, x \leq y + \varepsilon$,
   (iii) $\forall \varepsilon > 0, x < y + \varepsilon$,
   (iv) $\forall \varepsilon > 0, x \leq y + \varepsilon$.

Indication p. 22

Exercice 35 (◔★ Attention aux quantificateurs I)
Pour chacune des propositions suivantes, l'écrire avec une phrase et donner sa valeur de vérité.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$
(ii) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq y$
(iii) $(\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0)$
(iv) $(\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 0$ ou $x \geq 0)$

Commenter.

Indication p. 22

Exercice 36 (◑★ Résolution d'équations)
Résoudre les équations suivantes

1.
$$|x-1| + |x+1| = x + \frac{5}{2}$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2.
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1} + 2\sqrt{3} = 0$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3.
$$6x^3 + 7x^2 + 17x + 10 = 0$$
d'inconnue $x \in \mathbb{Q}$.

Indication p. 22

Exercice 37 (◔☆ Traduction I)
On considère la proposition suivante:

« Pour deux réels strictement positifs distincts, il existe toujours un multiple entier du plus petit strictement supérieur au plus grand. »

Comment s'écrit formellement cette proposition ?

1. $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[, x < y \Longrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}, n \cdot x > y)$
2. $\forall x \in]0,+\infty[, \exists y \in]0,+\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, n \cdot x < y$
3. $\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[, (\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot x > y) \Longrightarrow x < y$
4. $\forall x \in]0,+\infty[, \exists y \in]0,+\infty[, \exists n \in \mathbb{N}, n \cdot x < y$

Indication p. 23 · Solution p. 41

Exercice 38 (◑★ Propositions formelles)
Montrer que les propositions suivantes sont vraies:

1. $(\mathcal{P} \text{ et } \neg\mathcal{P}) \Longrightarrow (\mathcal{P} \text{ ou } \neg\mathcal{P})$.
2. $((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})) \Longleftrightarrow ((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{R})$.
3. $((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})) \Longrightarrow \mathcal{Q}$.
4. $((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{P}$.
5. $((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})) \Longrightarrow \mathcal{R}$.

Indication p. 23 · Solution p. 41

Exercice 39 (◔★ Attention aux quantificateurs II)
Soit E une partie de $\mathbb{R}$, on considère les propositions suivantes:

(i) $\forall x \in E\ \forall y \in E\ x < y$
(ii) $\forall x \in E\ \exists y \in E\ x < y$
(iii) $\exists x \in E\ \forall y \in E\ x < y$
(iv) $\exists x \in E\ \exists y \in E\ x < y$
(v) $\forall y \in E\ \exists x \in E\ x < y$
(vi) $\exists y \in E\ \forall x \in E\ x < y$

Dans chacun des cas suivants déterminer sans justification lesquelles des propositions sont vraies.

1. $E = \mathbb{R}$
2. $E = [0, 1]$
3. $E =]0, +\infty[$
4. $E = \varnothing$
5. $E = \{0\}$
6. $E = [0, 1[$

Indication p. 23

Exercice 40 (◑★ Découpage de ε II)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que les propositions suivantes

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
(iii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$
(iv) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$
(v) $\forall \varepsilon \in]0, 1], \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < 3\sqrt{\varepsilon}$

sont équivalentes.

Indication p. 23

Exercice 41 (◔★ Disjonction exclusive en vrac)
Étant données $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions, on note

$$\mathcal{P} \text{ xor } \mathcal{Q}$$

la proposition

$$(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et } \neg(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}).$$

1. Dresser la table de vérité de l'opérateur xor .
2. Soient $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ trois propositions. Montrer que
   - ▷ $(\mathcal{P} \text{ xor } \mathcal{Q}) \text{ xor } \mathcal{R} \iff \mathcal{P} \text{ xor } (\mathcal{Q} \text{ xor } \mathcal{R})$,
   - ▷ $\mathcal{P} \text{ et } (\mathcal{Q} \text{ xor } \mathcal{R}) \iff (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ xor } (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{R})$.

Indication p. 23

Exercice 42 (◑☆ Un peu d'analyse)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Considérons les propositions

$$(\mathcal{L}) : \quad \exists k \geq 0, \forall x \in I, \forall y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$$
$$(\mathcal{U}) : \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I, |x - y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
$$(\mathcal{C}) : \quad \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |x - y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Montrer que $\mathcal{L} \Longrightarrow \mathcal{U}$ et que $\mathcal{U} \Longrightarrow \mathcal{C}$.

Indication p. 23

Exercice 43 (◔☆ NAND et NOR)
Étant données $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions, on note

$$\mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{Q} = \neg(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$$
$$\mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{Q} = \neg(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}).$$

1. Exprimer les opérateurs logiques «¬», « et » et « ou » à l'aide uniquement de l'opérateur $\overline{\wedge}$.
2. Exprimer les opérateurs logiques «¬», « et » et « ou » à l'aide uniquement de l'opérateur $\overline{\vee}$.

Indication p. 24 · Solution p. 43

Exercice 44 (◔☆ Encore des inégalités et de la logique)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

Montrer

$$(\forall x \in \mathbb{R}, x < a \implies x \leq b) \iff (a \leq b).$$

Indication p. 24

Exercice 45 (◔☆ Pseudocroissance)
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété (1) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, \forall m \geq p, u_m \geq u_n. \tag{1}$$

1. Montrer que toute suite croissante vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
2. Montrer qu'il existe une suite vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ et qui n'est pas croissante.
3. Montrer que la somme de deux suites vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Indication p. 24

Exercice 46 (◔☆ Sinus est-il une fonction de cosinus ?)
Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = f(\cos(x)).$$

Indication p. 24

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Formalisation des principes de preuves)
Cf le cours.

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Traductions II)

1. On dit qu'une fonction s'annule si il existe un point où elle vaut 0.
2. Ne pas confondre admettre un maximum et être majorée !
3. Il existe deux caractérisations du caractère borné: majorée et minorée ou bien de valeur absolue (ou module, ou norme) majorée.
4. Une fonction est dite périodique si elle admet une période.
5. «Au plus une fois» signifie 0 ou 1 fois.
6. Monotone signifie croissante ou décroissante.

Solution p. 25

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Unicité)

1. Pour (ii) $\Longrightarrow$ (i) procéder par exemple par contraposée, et remarquer que E non vide est une hypothèse importante.
2. Cf le titre de l'exercice.

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Découpage de ε I)
Au lieu de montrer 4×3 implication, effectuer une chaîne d'équivalence.

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Force et faiblesse)

1. Utiliser la transitivité de l'implication. On obtient que $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{C}_1$ est plus fort que $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{C}_2$.
2. Attention au sens. On obtient $\mathcal{H}_1 \Longrightarrow \mathcal{C}$ est plus faible (ou moins fort) que $\mathcal{H}_2 \Longrightarrow \mathcal{C}$.
3. Un théorème peut s'écrire sous forme abstraite $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{C}$ avec $\mathcal{H}$ les hypothèses et $\mathcal{C}$ les conclusions.

   Informellement, un théorème est donc « d'autant plus fort » c'est à dire d'autant plus utile que ses hypothèses sont faibles et ses conclusions sont fortes.

   Avez-vous des exemples de telles situations ?

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Propriété vraie ÀPCR)

1. N'importe quel rang convenant pour l'un des deux convient.
2. N'importe quel rang plus grand que les deux rangs (par exemple le max) convient.

En bonus on pourra se poser la question de savoir si il est possible de généraliser à un nombre fini de prédicats (Oui dans les deux cas) et un nombre quelconque de prédicats (Oui pour la disjonction, parfois Non pour la conjonction).

Solution p. 25

Indication 7 · Énoncé p. 4 (Monotonies)
1. Regarder l'exercice 5.
2. Contraposée.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Existence et unicité)
Il existe un unique (parfois écrit «il existe un et unique») signifie qu'il existe x satisfaisant $\mathcal{P}$ (existence) et que si deux éléments x_1, x_2 satisfont $\mathcal{P}$ alors ce sont les mêmes (unicité).

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Supremum et maximum)
Le supremum, si il existe (il est alors unique, pourquoi ?) est un majorant qui est plus petit que tout majorant (c'est le plus petit des majorants).

Montrer que si le maximum existe (il est alors unique, pourquoi ?) alors c'est un/le supremum.

Indication 10 · Énoncé p. 5 (Rationnels et irrationnels)
1. Somme de fractions.
2. Par l'absurde avec une soustraction.
3. Par exemple $\sqrt{2}$.
4. Cela dépend: prendre des exemples.

Indication 11 · Énoncé p. 5 (Fonctions périodiques et périodes)
1. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a l'égalité entre $f(x+T)$ et $f(x)$.
2. Oui, le démontrer par rédaction automatique.
3. Il existe $T > 0$ tel que f est T-périodique.
4. Non, il faut exhiber un contre-exemple. Par exemple, est-ce possible que $t \mapsto \cos(t) + \cos\left(\sqrt{2}t\right)$ atteigne la valeur 2 en dehors de 0 ?
5. Toute période est supérieure ou égale à T et T est une période.
6. Non, que dire de la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, c'est à dire valant 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels ?

Indication 12 · Énoncé p. 5 (Tiroirs)
Procéder par exemple par l'absurde.

Solution p. 26

Indication 13 · Énoncé p. 6 (Quelques démonstrations)
1. Contraposée.
2. Disjonction de cas.
3. Contraposée.
4. Récurrence.
5. Récurrence forte pour l'existence.
6. Contraposée + Bernoulli.

Solution p. 26

Indication 14 · Énoncé p. 6 (Parties paires et impaires)
Procéder par Analyse-Synthèse.

Indication 15 · Énoncé p. 7 (Argument d'Euclide)

1. Regarder le reste de la division euclidienne.
2. Procéder par l'absurde et utiliser le fait que tout entier admet un diviseur premier.
3. Procéder par récurrence forte sur n.

Indication 16 · Énoncé p. 7 (Quelle hypothèse de récurrence ?)
Noter que de manière générale, la dérivée étant une notion locale et non ponctuelle, la connaissance de $f(0)$ ne donne **aucune** information sur $f'(0)$.

L'hypothèse de récurrence doit donc porter sur la fonction dérivée $\tan^{(n)}$ et non le nombre dérivé $\tan^{(n)}(0)$.

Regarder les petits cas pour conjecturer une forme de $\tan^{(n)}$.

Indication 17 · Énoncé p. 7 (Un exercice complet)
Commencer par faire un schéma.

Il y a de nombreuses façons de procéder (par sens direct, par contraposée, etc.), et dans tous les cas il est utile de remarquer que : $\forall T > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, y - nT \leq x$.

Solution p. 30

Indication 18 · Énoncé p. 8 (Un exercice complet bis)
Se ramener à $\ell = 0$.

Remarquer que le point important est que les périodes ne sont pas nécessairement les mêmes et surtout pas nécessairement commensurables.

Faire le cas d'une seule fonction et vérifier que si f est périodique alors $f(x+\tau) - f(x)$ l'est aussi quel que soit τ.

Pour la culture, on peut (à partir d'une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$) trouver deux fonctions périodiques f_1 et f_2 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) + f_2(x) = x$ et donc en particulier $f_1(x) + f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Indication 19 · Énoncé p. 8 (Espace affine avant l'heure)
Procéder par analyse-synthèse.

Pour l'analyse remarquer que déterminer la constante c suffit pour déterminer la fonction g et qu'une constante est entièrement déterminée par son intégrale sur un segment (non réduit à un point).

Indication 20 · Énoncé p. 8 (Un peu de prise d'initiative)
Étant donné la définition une récurrence forte est probablement adaptée.

Il reste à trouver l'expression, par exemple en regardant les premiers termes.

Une expression peut être donnée selon plusieurs cas.

Solution p. 32

Indication 21 · Énoncé p. 9 (Tâche de sélection de Wason)
Écrire sous la forme $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

Indication 22 · Énoncé p. 9 (Quelle récurrence ? III)
Faire une récurrence sur non seulement le signe mais aussi le tableau de variations.

Indication 23 · Énoncé p. 9 (Une question du Bac S 2003)
Montrer que si $7|x^2+y^2$ alors $7|x$ et $7|y$.

Solution p. 33

Indication 24 · Énoncé p. 10 (Polynômes de Tchebychev camouflés)
Commencer par $n = 2, 3, ...$

Puis se rendre compte que l'on peut procéder par récurrence double.

Alternativement développer par brute force le binôme et regrouper les termes.

Solution p. 34

Indication 25 · Énoncé p. 10 (Un oral PC: Erdős-Surányi)
Remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+4)^2 - (n+3)^2 - (n+2)^2 + (n+1)^2 = 4$ et procéder par récurrence d'ordre 4.

Solution p. 35

Indication 26 · Énoncé p. 10 (Existence par comptage)
Commencer par montrer qu'il existe p_1, p_2 deux entiers entre 0 et N distincts tels que

$$|\{p_1 x\} - \{p_2 x\}| < \frac{1}{N}.$$

Solution p. 36

Indication 27 · Énoncé p. 10 (Plusieurs façons de faire l'hérédité)
Pour assurer le «deux à deux distincts» imposer $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

Remarquer que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.

Pour l'hérédité, par exemple si $a_1 < \cdots < a_n$ conviennent alors

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1$$

ou bien

$$1 = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \times 1$$

ou bien pour tout A,

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{A+1} = \frac{1}{A(A+1)}.$$

Indication 28 · Énoncé p. 11 (Quelle récurrence II)

1. Montrer que $\mathbb{Q} \setminus \{-1, 0, 1\}$ est stable.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ où $p_n \wedge q_n = 1$, on a $(|q_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Indication 29 · Énoncé p. 11 (Beaucoup de réels implique une proximité)
Par exemple les ordonner et faire la somme des $x_{k+1} - x_k$.

Ou bien faire un principe des tiroirs.

Indication 30 · Énoncé p. 11 (Existence sans savoir lequel)
Disjonction de cas selon le caractère rationnel ou non de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

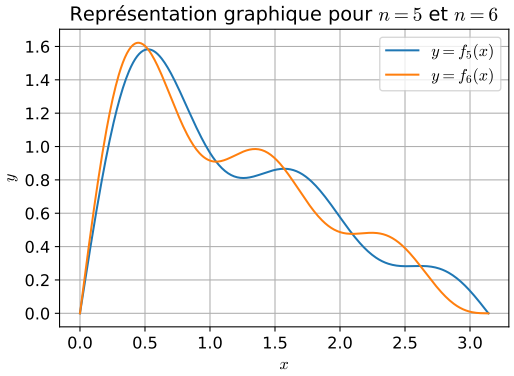
Solution p. 38

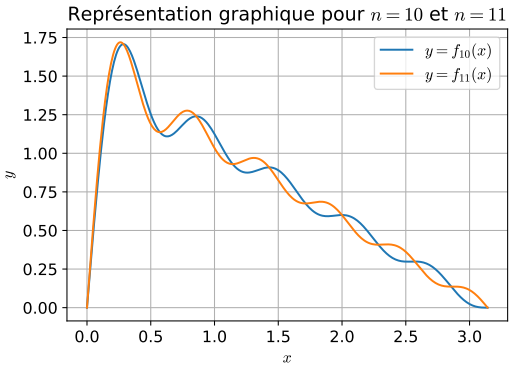
Indication 31 · Énoncé p. 11 (Un tout petit début de bootstrap)
Commencer par montrer que $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est borné.

Pour cela procéder par récurrence ou bien partir d'un encadrement moins précis et itérer par bootstrap.

Indication 32 · Énoncé p. 12 (Fejér-Jackson)
Avant de faire l'exercice, vérifier que vous êtes au point sur l'étude de fonctions et la trigonométrie.

Puis regarder les schémas suivants:





Pour éventuellement le traiter, montrer d'abord que pour tout $t \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n'(t) = 0 \Longrightarrow f_n(t) \geq f_{n-1}(t).$$

Terminer par récurrence.

Solution p. 38

Indication 33 · Énoncé p. 12 (Négation)
Utiliser les règles de négation de manière automatique, en commençant par traduire pour les 2 et 4.

Solution p. 40

Indication 34 · Énoncé p. 12 (Découpage de ε I bis)

1. Un sens est direct, car quel que soit $\varepsilon > 0$, $y - \varepsilon < y$. Dans l'autre sens faire un schéma pour choisir un ε adapté.
2. Utiliser la contraposée de la question précédente pour une implication.

Indication 35 · Énoncé p. 13 (Attention aux quantificateurs I)
Le commentaire est que l'ordre des quantificateurs est essentiel !

Indication 36 · Énoncé p. 13 (Résolution d'équations)

1. Procéder par disjonction de cas.
2. Procéder par analyse-synthèse.

   Dans la phase d'analyse élever au carré après avoir distribué des deux côtés de l'égalité pour faire disparaître les racines.
3. Procéder par analyse-synthèse. Si $\frac{p}{q}$ est solution avec $\frac{p}{q}$ fraction irréductible, montrer que q divise 6 et p divise 10.

   Se ramener ainsi à un nombre fini de cas.

Par ailleurs ne pas hésiter à faire des schémas.

Indication 37 · Énoncé p. 13 (Traduction I)
Remarque culturelle (pas vraiment une indication): cette propriété s'appelle le caractère archimédien de $\mathbb{R}$.

Solution p. 41

Indication 38 · Énoncé p. 14 (Propositions formelles)
Pour chaque proposition il y a au moins trois manières de procéder:

- ▷ Par table de vérité
- ▷ Par calcul propositionnel
- ▷ Par rédaction mathématique

Solution p. 41

Indication 39 · Énoncé p. 14 (Attention aux quantificateurs II)
Traduire les propositions en énoncé « concret » peut aider

(i) L'ensemble est vide (pourquoi ?)
(ii) Tout élément admet un élément strictement plus grand (pouvant dépendre du premier)
(iii) Impossible (pourquoi ?)
(iv) Il existe deux éléments comparables distincts.
(v) Tout élément admet un élément strictement plus petit.
(vi) Impossible (pourquoi ?)

Indication 40 · Énoncé p. 14 (Découpage de ε II)
Commencer par traiter les exercices 4 et 34.

Indication 41 · Énoncé p. 15 (Disjonction exclusive en vrac)
Pour le deuxième point, utiliser par exemple la table de vérité précédente.

Indication 42 · Énoncé p. 15 (Un peu d'analyse)
Cet exercice est en fait un aperçu du cours sur les fonctions continues, la condition $\mathcal{L}$ est la «lipschitzité», la condition $\mathcal{U}$ l'«uniforme continuité» et la $\mathcal{C}$ la «continuité».

Pour $\mathcal{L} \Longrightarrow \mathcal{U}$, à $\varepsilon > 0$ fixé choisir un η explicite en fonction de ε et k.

Pour $\mathcal{U} \Longrightarrow \mathcal{C}$, remarquer qu'il s'agit d'une interversion toujours vraie (notion uniforme vs notion non uniforme).

Bonus: que dire des réciproques ?

Indication 43 · Énoncé p. 15 (NAND et NOR)
Commencer par exprimer $\neg$, le reste suit par les règles de calcul.

Solution p. 43

Indication 44 · Énoncé p. 16 (Encore des inégalités et de la logique)
La réciproque est immédiate.

Pour le sens direct procéder par exemple par contraposée.

Alternativement se ramener à $a = 0$ par soustraction.

Indication 45 · Énoncé p. 16 (Pseudocroissance)

1. Trouver un p en fonction de n qui convient.
2. Faire un schéma.
3. On reverra cette idée d'ÀPCR dans le chapitre de limites de suites, pour l'instant, remarquer que le max des rangs convient pour une conjonction.

Indication 46 · Énoncé p. 16 (Sinus est-il une fonction de cosinus ?)
Se demander si c'est le cas ou non car dans un cas il faudrait exhiber une telle fonction et dans l'autre montrer que ce n'est pas le cas (en prenant par exemple des valeurs particulières).

Solutions

Solution pour l'exercice 2 · Énoncé p. 2 · Indication p. 17 (Traductions II)

1. «f s'annule au moins une fois»

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0}.$$

2. «f admet un maximum global»

$$\boxed{\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(y)}.$$

3. «f est bornée»

$$\boxed{\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq C}.$$

4. «f est périodique»

$$\boxed{\exists T \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)}.$$

5. «f s'annule au plus une fois»

$$\boxed{\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \Longrightarrow x = a)}.$$

ou alternativement

$$\boxed{\forall x_1 \in \mathbb{R}, \forall x_2 \in \mathbb{R}, (f(x_1) = 0 \text{ et } f(x_2) = 0) \Longrightarrow x_1 = x_2}.$$

6. «f est monotone»
Une option est de traduire «f est monotone» en «f est croissante ou f est décroissante» ce qui donne (attention aux quantificateurs universels qui sont **dans** les parenthèses).

$$\boxed{\begin{array}{c}(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b) \Longrightarrow (f(a) \leq f(b))) \text{ ou} \\ (\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, (a \leq b) \Longrightarrow (f(a) \geq f(b)))\end{array}}.$$

Remarque: il y a évidemment d'autres écritures possibles, comme par exemple en quantifiant sur les ensembles de trois points rangés dans l'ordre croissant et sur le fait que leurs images sont ordonnées.

Solution pour l'exercice 6 · Énoncé p. 3 · Indication p. 17 (Propriété vraie ÀPCR)

1. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$ vrais ÀPCR.

Fixons $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, $\mathcal{P}(n)$.

Alors en particulier, pour tout $n \geq M$, on a $\mathcal{P}(n)$ ou $\mathcal{Q}(n)$.

D'où $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ ou } \mathcal{Q}(n) \text{ est vrai ÀPCR}}$.

2. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$ vrais ÀPCR.

Fixons $M_{\mathcal{P}} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M_{\mathcal{P}}$, $\mathcal{P}(n)$.

Fixons $M_{\mathcal{Q}} \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{Q}(n)$.

Posons

$$M = \max(M_{\mathcal{P}}, M_{\mathcal{Q}}).$$

Alors (le maximum est un majorant) on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq M \Longrightarrow (n \geq M_{\mathcal{P}} \text{ et } n \geq M_{\mathcal{Q}}).$$

Soit $n \geq M$.

- ▷ Comme $n \geq M_{\mathcal{P}}$ on a $\mathcal{P}(n)$.
- ▷ Comme $n \geq M_{\mathcal{Q}}$ on a $\mathcal{Q}(n)$.

Et par conséquent $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{Q}(n)$.

On a donc bien montré $\boxed{\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{Q}(n) \text{ est vrai ÀPCR}}$.

Remarques:

- ▷ Pour la disjonction « ou » on observe qu'étant donné un rang pour chaque prédicat, n'importe quel rang plus grand qu'au moins un de ces rangs convient. Par exemple le minimum.
- ▷ Pour cette raison une disjonction quelconque de propriétés vraies ÀPCR est vraie ÀPCR: n'importe quel rang convenant pour l'une convient pour la disjonction.
- ▷ Pour la conjonction « et » on observe qu'étant donné un rang pour chaque prédicat, n'importe quel rang plus grand que tous ces rangs convient. Par exemple le maximum.
- ▷ Étant donné un nombre fini de prédicats $\mathcal{P}_1(n), ..., \mathcal{P}_N(n)$ vrais ÀPCR, si $M_1, ..., M_N$ sont des rangs correspondants, alors en prenant (par exemple) le rang $M = \max(M_1, ..., M_N)$ on observe que le prédicat $\mathcal{P}_1(n)$ et $\mathcal{P}_2(n)$ et $\cdots$ et $\mathcal{P}_N(n)$ est vrai ÀPCR.
- ▷ Pour un nombre quelconque de prédicats, ce n'est plus forcément le cas.

  Par exemple pour tout $k \in \mathbb{N}$ posons $\mathcal{P}_k(n) = «n \geq k»$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k(n)$ est vrai ÀPCR, et la conjonction de tous les $\mathcal{P}_k(n)$ ne l'est pas.
- ▷ Cette notion de propriété vraie ÀPCR sera revue dans tous les chapitres d'analyse.

Solution pour l'exercice 12 · Énoncé p. 5 · Indication p. 18 (Tiroirs)
Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de tiroir contenant au moins $k+1$ chaussettes.

On a donc (négation d'un quantificateur existentiel) que tout tiroir contient au plus k chaussettes.

Comme il y a ℓ tiroirs, on en déduit (somme d'inégalités) qu'il y a au plus $k \times \ell$ chaussettes.

Absurde.

On a donc bien montré qu'$\boxed{\text{il existe un tiroir contenant (au moins) } k+1 \text{ chaussettes.}}$

Ce principe est appelé **principe des tiroirs**. Il s'agit d'un « théorème d'existence » utile par exemple en combinatoire.

Solution pour l'exercice 13 · Énoncé p. 6 · Indication p. 18 (Quelques démonstrations)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On procède par contraposée.

Supposons n pair c'est à dire 2 divise n.

Alors 2 divise n^2 c'est à dire n^2 pair.

On a donc bien montré

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ impair}) \Longrightarrow (n \text{ impair})}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

On procède par disjonction de cas.

- ▷ Si $x \geq 0$.

  Alors $\max(x, 0) = x$ et $\max(-x, 0) = 0$.

  Et on a bien

  $$x = x - 0.$$

- ▷ Si $x \leq 0$.

  Alors $\max(x, 0) = 0$ et $\max(-x, 0) = -x$.

  Et on a bien

  $$x = 0 - (-x).$$

Dans tous les cas $x = \max(x, 0) - \max(-x, 0)$.

On a donc bien montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, x = \max(x, 0) - \max(-x, 0)}.$$

3. Posons $N = 48$ et $x_1, ..., x_N$ les N notes.

On veut montrer que

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k = 12 \Longrightarrow \exists k \in [\![1, N]\!], x_k \leq 12.$$

On procède par contraposée.

Supposons

$$\forall k \in [\![1, N]\!], x_k > 12.$$

Alors par somme d'inégalités on a

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k > 12.$$

Et en particulier on a

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \neq 12.$$

Par contraposée on a donc

Si la moyenne de 48 notes est de 12 alors au moins l'une des notes est inférieure à 12.

4. Soit $x > -1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons

$$\mathcal{P}_n : \qquad \text{«}(1+x)^n \geq 1+nx\text{»}$$

et montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout n, $\mathcal{P}_n$.

▷ **Initialisation**

Pour $n = 0$ on a

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0x$$

donc $\mathcal{P}_0$.

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}_n$ c'est à dire

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Alors comme $(1+x) > 0$, par produit **positif** d'inégalités on obtient

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

c'est à dire en développant

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2.$$

Comme un carré est toujours positif, $nx^2 \geq 0$ et de l'inégalité précédente on déduit qu'en particulier

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + 0.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$.

▷ **Conclusion**

On a montré $\mathcal{P}_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$. Donc par récurrence on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Comme cela est vrai pour tout $x > -1$ on a donc

$$\boxed{\forall x \in]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx}.$$

5. Il y a plusieurs façons de procéder (par exemple procéder par analyse synthèse et considérer $v = \max\big(\{k \in \mathbb{N} \mid 2^k \text{ divise } n\}\big)$). On propose ici une preuve avec unicité et existence séparées et une récurrence forte pour l'existence.

▷ **Unicité**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit (v_1, q_1) et (v_2, q_2) deux couples vérifiant les conditions.

Alors

$$2^{v_1} q_1 = 2^{v_2} q_2.$$

En particulier 2^{v_1} divise $2^{v_2} q_2$. Comme q_2 est impair il est premier avec 2 et donc 2^{v_1} divise 2^{v_2}. Donc

$$v_1 \leq v_2.$$

De même, par symétrie,

$$v_2 \leq v_1.$$

Par conséquent

$$v_2 = v_1.$$

De $2^{v_1} q_1 = 2^{v_2} q_2$ comme $2^{v_1} = 2^{v_2} \neq 0$ on déduit que

$$q_1 = q_2.$$

D'où $\boxed{\text{l'unicité}}$.

▷ **Existence**

On procède par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$.

▷ **Initialisation**

On a $n = 1 = 2^0 \times 1$ et 1 impair.

▷ **Hérédité**

Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vérifiée pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.

On procède par disjonction de cas.

▷ Si n est impair on a

$$n = 2^0 \times n$$

et n impair.

▷ Si n est pair soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$.

Comme $n > 0$ on a $m < n$ et donc (entiers) $m \leq n - 1$.

Par conséquent par hypothèse de récurrence il existe $(v, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que q impair et $m = 2^v q$. (Fixons ce couple).

Alors

$$n = 2^{v+1} q$$

et q impair.

Dans tous les cas la propriété est vérifiée pour n.

▷ **Conclusion**

Par récurrence forte on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il $\boxed{\text{existe}}$ un couple $(v, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que q impair et $n = 2^v q$.

6. On procède par <u>contraposée</u>.

On constate tout d'abord que $2^0 - 1 = 0$ et $2^1 - 1 = 1$ ne sont pas premiers.

<u>Supposons que $n \geq 2$ n'est pas premier</u> (est composé).

Il existe alors $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = ab$, $a \neq 1$ et $b \neq 1$.

On a alors (identité de Bernoulli ou juste somme géométrique)

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= (2^a)^b - 1 \\ &= (2^a)^b - 1^b \\ &= (2^a - 1)\Big(1 + 2^a + (2^a)^2 + \cdots + (2^a)^{b-1}\Big). \end{aligned}$$

Or comme $a \neq 1$, $2^a - 1 \neq 1$ et comme $b \geq 2$, $1 + 2^a + (2^a)^2 + \cdots + (2^a)^{b-1} \neq 1$.

Par conséquent (comme $2^n - 1 \geq 2$) $2^n - 1$ <u>n'est pas premier</u>.

On a donc bien montré par contraposée,

Si $2^n - 1$ est premier alors n est premier.

Solution pour l'exercice 17 · Énoncé p. 7 · Indication p. 19 (Un exercice complet)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique et monotone.

Quitte à considérer $-f$ on peut supposer que f est croissante.

<u>Remarque</u>: le «Quitte à considérer $-f$ on peut supposer que f est croissante» résume l'argument suivant:

- *On commence par montrer que si f est croissante et périodique alors f est constante.*
- *On considère ensuite f une fonction monotone et périodique.*
  - *Si f est croissante et périodique alors on a déjà montré que f est constante.*
  - *Si f est décroissante, alors la fonction $-f$ est croissante et périodique, donc par ce qui précède elle est constante. Donc f est aussi constante.*

Soit $T > 0$ une période de f.

<u>Remarque</u>: statistiquement, certaines de vos preuves seront par l'absurde. On propose dans ce qui suit une preuve par l'absurde et une preuve directe, montrant que l'absurde n'était pas nécessaire ici.

- **Version 1: par l'absurde**

  Supposons par l'absurde que f n'est pas constante.

  Il existe donc $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x \neq y$ et $f(x) \neq f(y)$.

  Quitte à intervertir x et y on peut supposer que $x < y$.

  Comme f est croissante et que $f(x) \neq f(y)$, on a donc

  $$f(x) < f(y).$$

  Posons

$$n = \left\lfloor \frac{y-x}{T} \right\rfloor + 1$$

alors, en particulier

$$n > \left(\frac{y-x}{T} - 1 \right) + 1$$

et donc comme $T > 0$,

$$nT > y - x.$$

On a alors

$$\boxed{x + nT > y}.$$

Remarque: l'expression explicite de n n'a pas d'incidence sur la suite de la preuve, seule l'inégalité $x + nT > y$ est utilisée. Néanmoins, pour montrer qu'il existe un entier n tel que $x + nT > y$, le plus simple est d'exhiber un tel entier explicite (après un calcul au brouillon)

Par croissance de f on a alors

$$f(x + nT) \geq f(y).$$

Mais par T-périodicité de f on a aussi

$$f(x + nT) = f(x).$$

On aboutit donc à une contradiction.

Donc $\boxed{f \text{ est constante}}$.

▷ **Version 2: démonstration directe** (sans raisonnement par l'absurde)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x < y$.

Comme f est croissante, on a

$$f(x) \leq f(y).$$

Posons

$$n = \left\lfloor \frac{y-x}{T} \right\rfloor + 1.$$

Alors (même calculs que précédemment)

$$x + nT > y.$$

Par conséquent, par T-périodicité de f et croissance de f,

$$f(x) = f(x + nT) \geq f(y).$$

Par conséquent $f(x) = f(y)$.

De même, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $x > y$, on a $y < x$ donc $f(y) = f(x)$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ si $x = y$ on a évidemment $f(x) = f(y)$.

On a donc montré

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x)=f(y)$$

c'est à dire $\boxed{f \text{ est constante}}$.

Solution pour l'exercice 20 · Énoncé p. 8 · Indication p. 20 (Un peu de prise d'initiative)

▷ **Version 1: par récurrence forte**

On calcule les premiers termes de la suite:

- ▷ $u_0 = 1$
- ▷ $u_1 = u_0 = 1$
- ▷ $u_2 = u_0 + u_1 = 1 + 1 = 2$
- ▷ $u_3 = u_0 + u_1 + u_2 = 1 + 1 + 2 = 4$
- ▷ $u_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 1 + 2 + 4 = 8$
- ▷ $u_5 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1 + 1 + 2 + 4 + 8 = 16$
- ▷ $u_6 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32$

et on peut donc conjecturer que pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n\geq 1. \end{cases}$$

Démontrons maintenant cette conjecture.

Pour $n\in\mathbb{N}$ posons

$$\mathcal{P}_n : \qquad u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n\geq 1. \end{cases}$$

et montrons par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}$ que pour tout n, $\mathcal{P}_n$.

▷ **Initialisation**

Pour $n=0$ on a

$$u_0 = 1$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

▷ **Hérédité**

Soit $n\in\mathbb{N}$ et supposons que $\forall k\in[\![0,n]\!]$, la proposition $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est à dire que

$$\forall k\leq n,\quad u_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 2^{k-1} & \text{si } k\geq 1. \end{cases}.$$

Calculons alors u_{n+1}.

Par définition

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k$$

et donc, par hypothèse de récurrence ($u_0=1$ et $u_k = 2^{k-1}$ pour $k\geq 1$),

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \\ &= 1 + (2^n - 1) \\ &= 2^n = 2^{(n+1)-1} \end{aligned}$$

c'est à dire $\mathcal{P}_{n+1}$.

▷ **Conclusion**

On a montré $\mathcal{P}_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \leq n, \mathcal{P}_k) \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$. Donc par récurrence forte on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}}.$$

▷ **Version 2: par réécriture et récurrence simple**

On a $u_0 = 1$.

D'où $u_1 = u_0 = 1$.

Soit $n \geq 1$.

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n \\ &= u_n + u_n \\ &= 2u_n. \end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 1$.

Ainsi,

$$\forall n \geq 1, u_n = 2^{n-1} \times 1.$$

On a donc bien

$$\boxed{u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}}.$$

Solution pour l'exercice 23 · Énoncé p. 9 · Indication p. 20 (Une question du Bac S 2003)
On observe que $x = y = z = 0$ est solution.

Montrons que c'est la seule.

Soit $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ une solution. Quitte à intervertir x et y on peut supposer $x \neq 0$, et quitte à remplacer x par $-x$ on peut supposer $x > 0$.

On peut écrire modulo 7

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \bmod 7.$$

Supposons que $7 \nmid x$. Comme $7 \nmid x$ et que 7 est premier, x est inversible modulo 7.

En notant ξ un inverse de x modulo 7, c'est à dire un entier tel que

$$x\xi \equiv 1 \bmod 7$$

et en multipliant par ξ^2 on en déduit

$$(\xi y)^2 \equiv -1 \bmod 7.$$

Or la table des carrés modulo 7 est:

$x \bmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \bmod 7$	0	1	4	2	2	4	1

et on aboutit donc à une contradiction.

Donc pour toute solution non nulle $7 \mid x$.

Si $7 \mid x$ alors $7 \mid y$ et donc en posant $x = 7\tilde{x}$ et $y = 7\tilde{y}$ on obtient

$$7\tilde{x}^2 + 7\tilde{y}^2 = z^2$$

donc on peut écrire $z = 7\tilde{z}$. On obtient alors

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 7\tilde{z}^2.$$

On obtient donc une solution $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ avec $0 < \tilde{x} < x$.

Par principe de **descente infinie** il n'existe pas de solution non nulle.

Remarque: ici le point clé est que -1 n'est pas carré modulo le nombre premier 7. Un résultat très classique est que -1 est un carré modulo le nombre premier impair p ssi $p \equiv 1 \bmod 4$.

Solution pour l'exercice 24 · Énoncé p. 10 · Indication p. 20 (Polynômes de Tchebychev camouflés)
Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}, z^n + \frac{1}{z^n} \in \mathbb{Z}.$$

▷ **Initialisation**

On a bien

$$z^0 + \frac{1}{z^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}$$

et par hypothèse

$$z^1 + \frac{1}{z^1} = z + \frac{1}{z} \in \mathbb{Z}.$$

▷ **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $z^n + \frac{1}{z^n} \in \mathbb{Z}$ et $z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}} \in \mathbb{Z}$.

On a

$$\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=z^{n+2}+z^n+\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z^{n+2}}.$$

Ce qui peut se réécrire

$$z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}=\underbrace{\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right)}_{\in\mathbb{Z}}\underbrace{\left(z+\frac{1}{z}\right)}_{\in\mathbb{Z}}-\underbrace{\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)}_{\in\mathbb{Z}}.$$

Et comme $\mathbb{Z}$ est stable par produit et différence, on conclut que

$$z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}\in\mathbb{Z}.$$

▷ **Conclusion**

On a donc montré que $z^0+\frac{1}{z^0}\in\mathbb{Z}$ et $z^1+\frac{1}{z^1}\in\mathbb{Z}$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, si $z^n+\frac{1}{z^n}\in\mathbb{Z}$ et $z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\in\mathbb{Z}$ alors $z^{n+2}+\frac{1}{z^{n+2}}\in\mathbb{Z}$.

Par récurrence double on a donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, z^n+\tfrac{1}{z^n}\in\mathbb{Z}}.$$

Remarque: on a en fait montré l'existence d'une suite de polynômes à coefficients entiers, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{Z}[X])^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N}, z^n+\frac{1}{z^n}=P_n\left(z+\frac{1}{z}\right).$$

Ces polynômes vérifient la relation de récurrence : $P_0=2$, $P_1=X$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}, P_{n+2}(X)=XP_{n+1}(X)-P_n(X).$$

Ils sont fortement liés aux polynômes de Tchebychev, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis par $T_0=1$, $T_1=X$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}, T_{n+2}(X)=2XT_{n+1}(X)-T_n(X).$$

(Cf DM dédié aux polynômes de Tchebychev) Cela n'est pas une surprise car pour $\theta\in\mathbb{R}$ et $z=e^{i\theta}$ on a

$$\left(e^{i\theta}\right)^n+\frac{1}{\left(e^{i\theta}\right)^n}=2\cos(n\theta)$$

tandis que

$$T_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta).$$

Solution pour l'exercice 25 · Énoncé p. 10 · Indication p. 20 (Un oral PC: Erdős-Surányi)
On constate tout d'abord que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(n+4)^2-(n+3)^2-(n+2)^2+(n+1)^2=4.$$

Ainsi pour tout $M\in\mathbb{N}$, si il existe $n\in\mathbb{N}$ et $(\varepsilon_k)_{k\in[\![0,n]\!]}\in\{-1,1\}^{n+1}$ tels que

$$M = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k k^2$$

on a

$$M + 4 = \sum_{k=0}^{n+4} \tilde{\varepsilon_k} k^2$$

en posant

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0, n]\!], \tilde{\varepsilon_k} &= \varepsilon_k \\ \widetilde{\varepsilon_{n+1}} &= 1 \\ \widetilde{\varepsilon_{n+2}} &= -1 \\ \widetilde{\varepsilon_{n+3}} &= -1 \\ \widetilde{\varepsilon_{n+4}} &= 1. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 1 &= 1^2 \\ 2 &= -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 \\ 3 &= -1^2 + 2^2 \end{aligned}$$

et donc par **récurrence d'ordre 4** on peut bien écrire tout entier naturel de cette manière.

[À rédiger en détails]

Solution pour l'exercice 26 · Énoncé p. 10 · Indication p. 20 (Existence par comptage)
Tout d'abord pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\{t\} \in [0, 1[$.

On constate ensuite que

$$[0, 1[= \bigcup_{k=0}^{N-1} [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[.$$

(Faire un schéma)

Il y a donc N intervalles de la forme $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[$ pour $k \in [\![0, N-1]\!]$ (les «tiroirs») et $N+1$ nombres $\{0\}, \{x\}, \{2x\}, ..., \{Nx\}$ (les «chaussettes») qui sont tous dans $[0, 1[$.

Par principe des tiroirs il existe donc $k \in [\![0, N-1]\!]$ et $p_1, p_2 \in [\![0, N]\!]$ tels que $p_1 \neq p_2$ et

$$\begin{aligned} \{p_1 x\} &\in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[\\ \{p_2 x\} &\in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[. \end{aligned}$$

En particulier on a

$$|\{p_1 x\} - \{p_2 x\}| < \frac{1}{N}.$$

En effet on a

$$\begin{aligned} \frac{k}{N} \leq \{p_1 x\} &< \frac{k+1}{N} \\ -\frac{k+1}{N} < -\{p_2 x\} &\leq -\frac{k}{N} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$-\frac{1}{N} < \{p_1 x\} - \{p_2 x\} < \frac{1}{N}$$

et de même

$$-\frac{1}{N} < \{p_2 x\} - \{p_1 x\} < \frac{1}{N}.$$

Il existe donc $p_1, p_2 \in [\![0, N]\!]$ tels que $\boxed{p_1 \neq p_2}$ et

$$\boxed{|\{p_1 x\} - \{p_2 x\}| < \tfrac{1}{N}}.$$

(Fixons de tels entiers.)

On a donc, par définition de la partie fractionnaire,

$$|(p_1 x - \lfloor p_1 x \rfloor) - (p_2 x - \lfloor p_2 x \rfloor)| < \frac{1}{N}$$

ce qui peut se réécrire

$$|(p_1 - p_2)x - (\lfloor p_1 x \rfloor - \lfloor p_2 x \rfloor)| < \frac{1}{N}.$$

Quitte à les intervertir on peut supposer que $p_1 > p_2$, posons alors

$$q = p_1 - p_2.$$

Comme

$$\begin{aligned} 0 \leq p_1 \leq N \\ 0 \leq p_2 \leq N \end{aligned}$$

et $p_1 \neq p_2$ on a alors

$$\boxed{q \in [\![1, N]\!]}.$$

Et comme $q > 0$, de l'inégalité précédente on déduit que

$$\left| x - \frac{\lfloor p_1 x \rfloor - \lfloor p_2 x \rfloor}{p_1 - p_2} \right| < \frac{1}{|p_1 - p_2| N}$$

c'est à dire, en posant

$$\boxed{p = \lfloor p_1 x \rfloor - \lfloor p_2 x \rfloor} \in \mathbb{Z},$$

on a bien

$$\boxed{\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{qN}}.$$

Solution pour l'exercice 30 · Énoncé p. 11 · Indication p. 21 (Existence sans savoir lequel)
On a

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} &= \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\\ &= \sqrt{2}^{2}\\ &= 2.\end{aligned}$$

On sait de plus que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

On procède par disjonction de cas.

- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.

  Alors avec $x=\sqrt{2}$ et $y=\sqrt{2}$ on a bien x, y irrationnels tels que $x^y \in \mathbb{Q}$.
- Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

  Alors avec $x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $y=\sqrt{2}$ on a bien x, y irrationnels tels que $x^y \in \mathbb{Q}$.

Dans tous les cas $\boxed{\text{il existe } x, y \text{ irrationnels tels que } x^y \text{ est rationnel}}$.

Solution pour l'exercice 32 · Énoncé p. 12 · Indication p. 21 (Fejér-Jackson)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,\pi[$.

On a f_n dérivable (fonctions trigonométriques usuelles) et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

Comme $t \in]0,\pi[$ on a $e^{it} \neq 1$, et donc par somme géométrique et angle moitié

$$\begin{aligned}f_n'(t) &= \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\big(e^{ikt}\big)\\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(e^{i(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+1)t}\frac{-2i\sin\big(\frac{n}{2}t\big)}{-2i\sin\big(\frac{t}{2}\big)}\right)\\ &= \frac{\cos\big(\frac{n+1}{2}t\big)\sin\big(\frac{n}{2}t\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}\end{aligned}$$

par conséquent

$$f_n'(t) = 0 \iff \left(\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) = 0 \text{ ou } \sin\left(\frac{n}{2}t\right) = 0\right)$$

c'est à dire

$$f_n'(t) = 0 \iff \left(\frac{n+1}{2}t \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \text{ ou } \frac{n}{2}t \equiv 0[\pi]\right)$$

ce qui équivaut à

$$f_n'(t) = 0 \iff (nt \equiv \pi - t[2\pi] \quad \text{ou} \quad nt \equiv 0[2\pi]).$$

Supposons $f_n'(t) = 0$.

On procède par disjonction de cas,

- Si $nt \equiv 0[2\pi]$ alors $\sin(nt) = 0$. Et en particulier $\sin(nt) \geq 0$.
- Si $nt \equiv \pi - t[2\pi]$ alors $\sin(nt) = \sin(\pi - t)$ et comme $\pi - t \in]0, \pi[$ on a $\sin(\pi - t) > 0$. Et en particulier $\sin(nt) \geq 0$.

Dans tous les cas $\boxed{\sin(nt) \geq 0}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ notons désormais

$$\mathcal{H}_n : \forall t \in]0, \pi[, f_n(t) > 0.$$

- **Initialisation**

  Pour $n = 1$, on a pour tout $t \in]0, \pi[$, $f_1(t) = \sin(t) > 0$.

  D'où $\boxed{\mathcal{H}_1}$.
- **Hérédité**

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{H}_n$.

  La fonction f_{n+1} étant continue sur le segment $[0, \pi]$ elle est bornée et atteint ses bornes par le théorème des bornes atteintes.

  En particulier elle admet un minimum.

  Soit $\xi \in [0, \pi]$ tel que

  $$f_{n+1}(\xi) = \min_{t \in [0,\pi]} (f_{n+1}(t)).$$

  Supposons par l'absurde que le minimum est atteint en un point intérieur, c'est à dire qu'il existe $\xi \in]0, \pi[$ tel que

  $$f_{n+1}(\xi) = \min_{t \in [0,\pi]} (f_{n+1}(t)).$$

  Comme f_{n+1} est dérivable sur $[0, \pi]$ et admet un minimum en le point intérieur $\xi \in]0, \pi[$ on en déduit

  $$f_{n+1}'(\xi) = 0.$$

  Par le point précédent on a par conséquent

  $$\sin((n+1)\xi) \geq 0.$$

Et donc,

$$f_{n+1}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\xi)}{k} + \frac{\sin((n+1)\xi)}{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\xi)}{k} = f_n(\xi).$$

Et par hypothèse de récurrence $f_n(\xi) > 0$.

Or

$$f_{n+1}(0) = f_{n+1}(\pi) = 0.$$

On aboutit donc à une contradiction.

Le minimum est donc atteint en 0 et π et uniquement en ces points.

En particulier on a bien

$$\forall t \in]0, \pi[, f_{n+1}(t) > 0$$

ce qui est bien $\boxed{\mathcal{H}_{n+1}}$.

▷ **Conclusion**

On a montré $\mathcal{H}_1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1})$, par récurrence on a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, \pi[, \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kt)}{k} > 0}.$$

Remarque On aurait en fait pu raffiner la preuve en dressant explicitement le tableau de variations de f_{n+1} et en observant (en reprenant les calculs du début) que si f_{n+1} admet un minimum local en t, alors $f_{n+1}(t) = f_n(t)$ tandis que si f_{n+1} admet un maximum local en t, alors $f_{n+1}(t) > f_n(t)$.

Remarque culturelle: f_n représente la somme partielle de la série de Fourier d'un signal triangulaire (cf Physique).

Solution pour l'exercice 33 · Énoncé p. 12 · Indication p. 22 (Négation)

1. En utilisant les règles de négation on obtient

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0) \text{ et } (\exists n \in \mathbb{N}, u_n \leq 0)}.$$

2. La proposition «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée» s'écrit $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ et donc la négation est

$$\boxed{\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M}.$$

3. En utilisant les règles de négation on obtient

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, (n \geq N \text{ et } u_n < 1)}.$$

4. La proposition «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante» peut s'écrire $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, u_n = u_m$ et la négation est donc

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, u_n \neq u_m}.$$

Alternativement, si on écrit «$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante» sous la forme $\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = C$, la négation est

$$\boxed{\forall C \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \neq C}.$$

Les deux propositions sont équivalentes.

5. En utilisant les règles de négation on obtient

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N}^*, \exists p \geq N, \exists q \geq N, |u_p - u_q| > \varepsilon}.$$

Solution pour l'exercice 37 · Énoncé p. 13 · Indication p. 23 (Traduction I)
Il s'agit de la proposition $\boxed{\text{n°1}}$.

Solution pour l'exercice 38 · Énoncé p. 14 · Indication p. 23 (Propositions formelles)

1. Quelle que soit la valeur de vérité de la proposition $\mathcal{P}$, la proposition $\mathcal{P}$ et $\neg\mathcal{P}$ est toujours Fausse.

Donc

$$\boxed{(\mathcal{P} \text{ et } \neg\mathcal{P}) \Longrightarrow (\mathcal{P} \text{ ou } \neg\mathcal{P})}.$$

2. On a

$$\begin{aligned}
((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})) &\Longleftrightarrow ((\neg\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{R}) \text{ et } (\neg\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R})) && \text{(réécriture implication)}\\
&\Longleftrightarrow (\neg\mathcal{P} \text{ et } \neg\mathcal{Q}) \text{ ou } \mathcal{R} && \text{(distributivité de ou sur et)}\\
&\Longleftrightarrow (\neg(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})) \text{ ou } \mathcal{R} && \text{(négation d'une disjonction)}\\
&\Longleftrightarrow ((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{R}) && \text{(réécriture implication)}
\end{aligned}$$

et donc au final on a bien

$$\boxed{((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})) \Longleftrightarrow ((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{R})}.$$

Remarque: cette équivalence est à la base de la disjonction de cas.

3. Par la question précédente on a

$$((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})) \Longleftrightarrow ((\neg\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{P}) \Longrightarrow \mathcal{Q}).$$

De plus quelle que soit la valeur de vérité de $\mathcal{P}$, la proposition $\neg\mathcal{P}$ ou $\mathcal{P}$ est toujours Vraie.

Par conséquent on a $((\neg\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{P}) \Longrightarrow \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{Q}$.

Et donc on a bien montré que

$$\boxed{((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})) \Longrightarrow \mathcal{Q}}.$$

Remarque: il s'agit du cas le plus classique de démonstration par disjonction de cas, où les deux cas sont les négations l'un de l'autre.

4. Pour varier proposons trois démonstrations différentes (il y a bien sûr d'autres façons de procéder).

▷ **Par calcul propositionnel**

On a

$$\begin{aligned}(\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q} &\Longleftrightarrow (\neg(\neg\mathcal{P}) \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q} && \text{(réécriture implication)}\\ &\Longleftrightarrow (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q} && \text{(double négation)}\\ &\Longleftrightarrow (\mathcal{P} \text{ et } \neg\mathcal{Q}) \text{ ou } (\mathcal{Q} \text{ et } \neg\mathcal{Q}) && \text{(distributivité de et sur ou)}\\ &\Longleftrightarrow \mathcal{P} \text{ et } \neg\mathcal{Q} && \text{(disjonction avec une propriété toujours fausse)}\end{aligned}$$

Et en particulier, comme $\mathcal{P}$ et $\neg\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$ on a bien

$$\boxed{((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{P}}.$$

▷ **Par table de vérité**

On établit la table de vérité suivante

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\neg\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$	$\neg\mathcal{Q}$	$(\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})$ et $\neg\mathcal{Q}$	$((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})$ et $\neg\mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{P}$
V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	V

et donc on a bien

$$\boxed{((\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{P}}.$$

▷ **Par contraposée**

En ayant tout d'abord démontré le principe de contraposée et le modus ponens, on a par contraposée

$$(\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow (\neg\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P})$$

et par conséquent

$$(\neg\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } \neg\mathcal{Q} \Longleftrightarrow (\neg\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}) \text{ et } \neg\mathcal{Q}$$

d'où (modus ponens)

$$((\neg\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}) \text{ et } \neg\mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{P}$$

Remarque: il s'agit d'une écriture du principe du raisonnement par l'absurde.

5. Par disjonction de cas (cf questions précédentes) on a

$$((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R})) \Longleftrightarrow ((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{R}).$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned}((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})) \Longleftrightarrow ((\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) &\quad \text{(disjonction de cas)}\\ \Longrightarrow \mathcal{R} &\quad \text{(modus ponens).}\end{aligned}$$

Et donc on a bien

$$\boxed{((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})) \Longrightarrow \mathcal{R}}.$$

Remarque: il s'agit d'une écriture du principe de disjonction de cas.

Solution pour l'exercice 43 · Énoncé p. 15 · Indication p. 24 (NAND et NOR)

1. On a pour toutes propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$,

- ▷ $\neg\mathcal{P} \iff \mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{P}$ comme on peut le voir sur une table de vérité

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$	$\mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{P}$
V	F	F
F	V	V

- ▷ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} \iff (\mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{Q}) \mathbin{\overline{\wedge}} (\mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{Q})$ car $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} \iff \neg(\mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{Q})$.
- ▷ $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q} \iff (\mathcal{P} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{P}) \mathbin{\overline{\wedge}} (\mathcal{Q} \mathbin{\overline{\wedge}} \mathcal{Q})$ car $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q} \iff \neg(\neg\mathcal{P}$ et $\neg\mathcal{Q})$.

On remarque l'importance des parenthèses, l'opérateur $\overline{\wedge}$ n'étant **pas** associatif.

2. De même pour toutes propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$,

- ▷ $\neg\mathcal{P} \iff \mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{P}$ comme on peut le voir sur une table de vérité

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$	$\mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{P}$
V	F	F
F	V	V

- ▷ $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} \iff (\mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{P}) \mathbin{\overline{\vee}} (\mathcal{Q} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{Q})$ car $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q} \iff \neg(\neg\mathcal{P}$ ou $\neg\mathcal{Q})$.
- ▷ $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q} \iff (\mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{Q}) \mathbin{\overline{\vee}} (\mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{Q})$ car $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q} \iff \neg(\mathcal{P} \mathbin{\overline{\vee}} \mathcal{Q})$.

On remarque l'importance des parenthèses, l'opérateur $\overline{\vee}$ n'étant **pas** associatif.