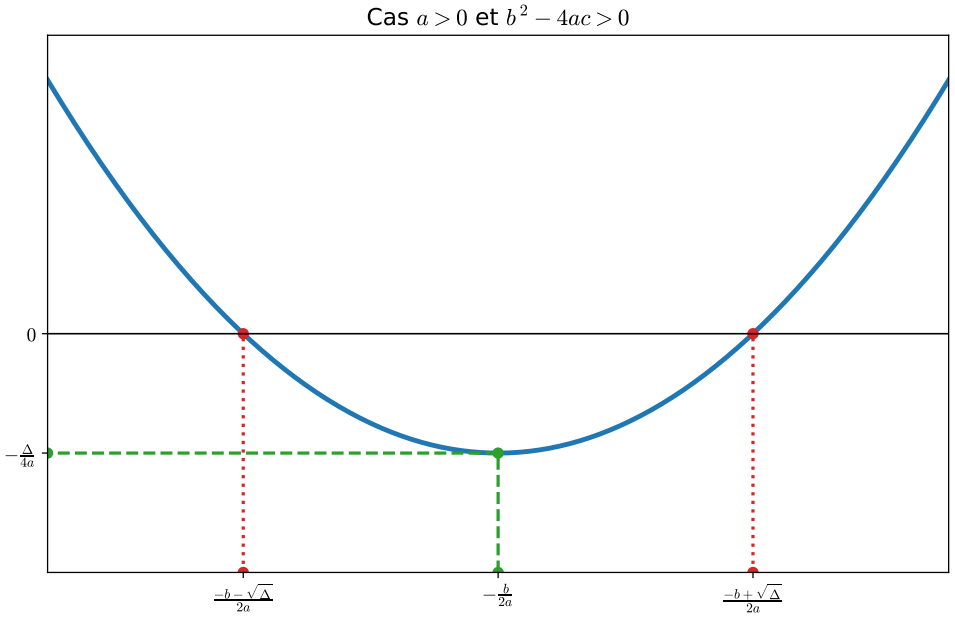
Trinômes

Énoncés 2
Essentiel: calculs à connaître 2
Digression: carrés et inégalité de Cauchy-Schwarz 5
Applications en vrac 7
Autres applications des trinômes 10
Indications 14
Solutions 20



$$aX^2+bX+c=a\left(\left(X-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2-\frac{b^2-4ac}{(2a)^2}\right)$$

Énoncés

Ne pas oublier de pratiquer le cahier de calculs.

Essentiel: calculs à connaître

Exercice 1 (◔★♣ Faits sur les trinômes réels)
Soient a, b, c des réels tels que $a \neq 0$.

On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto at^2 + bt + c. \end{aligned}$$

1. Dresser sans justification le tableau de variations de f.

   On distinguera selon la valeur de a.
2. Dresser sans justification le tableau de signes de f.

   On distinguera selon les valeurs de a et de $b^2 - 4ac$.

Indication p. 14 · Solution p. 20

Exercice 2 (◔★ Un ingrédient critique de plusieurs preuves)
Soient a, b, c des réels tels que $a \neq 0$.

Montrer que **si** pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ **alors** $b^2 - 4ac \leq 0$.

Indication p. 14

Exercice 3 (◔★♠ Cosinus et sinus hyperboliques)
1. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe une et unique solution à l'équation

   $$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$$

   d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   Expliciter cette solution en fonction de y.
2. Déterminer selon $y \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation

   $$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$

   d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   Expliciter ces solutions éventuelles en fonction de y.

Indication p. 14 · Solution p. 22

Exercice 4 (◔★ Une inégalité paramétrique)
Soit η un réel strictement positif.

Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$|ab| \leq \eta a^2 + \frac{1}{4\eta} b^2.$$

Indication p. 14

Exercice 5 (◔★ Extraction de racines complexes)
(Fera partie du **cours** du chapitre de nombres complexes.)

1. Soient $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

Déterminer (sous forme exponentielle) tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^2 = \rho e^{i\varphi}.$$

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On cherche à déterminer (sous forme algébrique) tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^2 = \alpha + i\beta.$$

2.1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$(a+ib)^2 = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a^2 - b^2 = \alpha \\ a^2 + b^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases} \\ \text{et} \\ ab \text{ de même signe que } \beta. \end{cases}$$

2.2. Conclure, c'est à dire déterminer (sous forme algébrique) tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^2 = \alpha + i\beta.$$

Remarque: la formule fera intervenir une disjonction de cas.

Indication p. 14

Exercice 6 (◔★ Tangente hyperbolique)
Déterminer selon $y \in \mathbb{R}$ le nombre de solutions de l'équation

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Expliciter ces solutions éventuelles en fonction de y.

Indication p. 15

Exercice 7 (◔★ Un petit calcul à connaître)

1. Déterminer le maximum et représenter graphiquement la fonction

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x(1-x).\end{aligned}$$

2. Soient $a < b$ deux réels.

Déterminer le maximum et représenter graphiquement la fonction

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto (x-a)(b-x).\end{aligned}$$

Indication p. 15

Exercice 8 (◔★ Encore une petite inégalité à connaître)

1. Montrer que pour tout $x > 0$ réel strictement positif,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

2. Soient a et b deux réels strictement positifs.

Montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}.$$

Indication p. 15

Exercice 9 (◔★ Équation d'un cercle)

Soient a, b, c des réels.

Montrer que le lieu des points M de coordonnées (x, y) vérifiant

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

est

- ▷ un cercle si $a^2 + b^2 - 4c > 0$,
- ▷ un point si $a^2 + b^2 - 4c = 0$,
- ▷ l'ensemble vide si $a^2 + b^2 - 4c < 0$,

et déterminer son centre et son rayon dans le premier cas.

Indication p. 15

Exercice 10 (◔★♣ Le début des relations coefficients-racines)
Soient s et p deux nombres complexes.

Soient x_1, x_2 deux nombres complexes.

Montrer que

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = s \\ x_1 \times x_2 = p. \end{cases}$$

si et seulement si x_1 et x_2 sont les deux racines (éventuellement doubles) du trinôme

$$X^2 - sX + p.$$

Indication p. 15

Digression: carrés et inégalité de Cauchy-Schwarz

On rappelle qu'étant donnés $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres on note

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Si vous manquez d'habitude avec le symbole "$\sum$« utilisez des $\cdots$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz fera partie du **cours** de plusieurs chapitres (dont celui d'espaces euclidiens).

Exercice 11 (◑★ Une démonstration paramétrique d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: variation de la norme selon une droite)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + tb_k)^2 \end{array}$$

1. Expliquer pourquoi,

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0.$$

2. Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, f(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma.$$

3. En déduire que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}$$

Indication p. 16

Exercice 12 (◑★ Une démonstration paramétrique d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: optimisation d'une inégalité locale)
Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.

1. Montrer que pour tout $\eta > 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \eta \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 + \frac{1}{4\eta} \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2$$

2. Soit $(A, B) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \eta &\longmapsto A\eta + \frac{1}{\eta} B \end{aligned}$$

admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$ et le déterminer.

3. En déduire que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}$$

Indication p. 16

Exercice 13 (◑☆ Encore une autre démonstration d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: par normalisation)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels non identiquement nulles.

On pose

$$A = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \quad \text{et} \quad B = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

1. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{A} - \frac{b_k}{B} \right)^2 \geq 0.$$

2. En déduire que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}.$$

3. Commenter le lien entre la question 1 et l'exercice 11.

Indication p. 16

Exercice 14 (◑☆ Encore une autre démonstration d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: par calcul de somme double)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux familles de n réels.

1. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2.$$

2. En déduire que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k)^2}.$$

3. Commenter géométriquement l'égalité précédente dans le cas $n = 2$.

Indication p. 16

Applications en vrac

Exercice 15 (◔☆ Applications directes)

1. Mettre sous forme canonique le trinôme du second degré suivant:

$$-X^2 - \sqrt{8}X + 4.$$

2. Représenter graphiquement le graphe d'équation

$$y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

3. Déterminer l'ensemble des solutions réelles de l'équation

$$x(x^3 - 2x) = 3.$$

4. Déterminer, si il existe, le maximum de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x-1)(3-x). \end{aligned}$$

5. Déterminer les racines complexes de

$$X^2 - 2X - i.$$

6. Représenter graphiquement le lieu des points M de coordonnées (x, y) tels que

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 \leq 0.$$

Indication p. 16

Exercice 16 (◔★ Des exemples d'équation bicarrée)

1. Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^4 - 13z^2 + 36 = 0.$$

2. Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^4 + 2z^2 - 3 = 0.$$

3. Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que

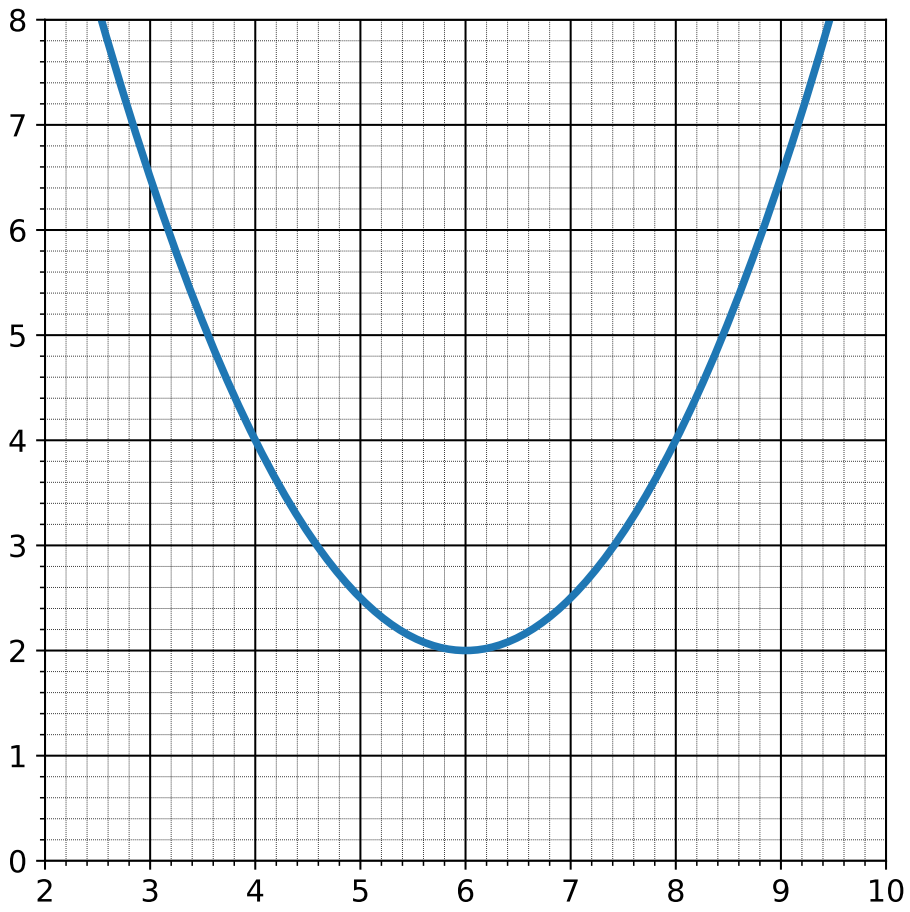
$$z^4 - 6z^2 + 25 = 0.$$

Indication p. 17

Exercice 17 (◔☆ Lecture graphique)

On admet que le graphique suivant représente une fonction trinomiale second degré.

Déterminer son expression explicite.



Indication p. 17

Exercice 18 (◔★ Construction d'exercice)
Déterminer b, c deux réels tels que le trinôme $-X^2 + bX + c$ admette -2 et $\frac{1}{2}$ comme racines.

Indication p. 17

Exercice 19 (◔☆ Somme et produit: un peu de complexes)
Déterminer l'ensemble des couples de complexes $(z, \xi) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\begin{cases} z + \xi = i \\ z \times \xi = 2i. \end{cases}$$

Indication p. 17

Exercice 20 (◔★ Interpolation: cas très particulier)
Déterminer un trinôme du second degré

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

tel que

$$\begin{cases} P(1) = -2 \\ P(2) = -4 \\ P(3) = -4. \end{cases}$$

Indication p. 17

Exercice 21 (◔★ Calcul de racines)
Déterminer l'ensemble des racines complexes du polynôme

$$X^8 + (1 - 8i)X^5 - 8iX^2.$$

Indication p. 17

Exercice 22 (◔☆ Un encadrement)
Soient a et b deux réels de somme 2.

Montrer que leur produit est inférieur ou égal à 1.

Indication p. 17

Exercice 23 (◔★ Égalité de deux carrés)
Déterminer l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\left(2z^2+6z+1\right)^2 = \left(z^2+4z-1\right)^2$$

Indication p. 17

Autres applications des trinômes

Exercice 24 (◑★ Interpolation: cas particulier)
Soient $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ trois réels deux à deux distincts et $y_0, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ trois réels.

Montrer qu'il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que le polynôme

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

vérifie

$$\begin{cases} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ P(x_2) = y_2. \end{cases}$$

Indication p. 18

Exercice 25 (◑☆ Le tout début des sommes de Newton)
Soient $s, p \in \mathbb{C}$ deux nombres complexes et $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ les deux racines (éventuellement doubles) du trinôme

$$X^2 - sX + p.$$

1. Exprimer
$$x_1^2 + x_2^2$$
en fonction de s et p.
2. Exprimer
$$x_1^3 + x_2^3$$
en fonction de s et p.

Indication p. 18

Exercice 26 (◑★ Intégration et éléments simples : le tout début)
Nécessite le chapitre d'intégration/dérivation de Terminale.

(Fera partie du **cours** de plusieurs chapitres, dont celui d'intégration.)

On admet qu'il existe une fonction $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

1. Soit $\delta > 0$.

Déterminer l'ensemble des primitives de

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^2+\delta^2} \end{aligned}$$

2. Soient a, b, c trois réels tels que $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$.

Déterminer l'ensemble des primitives de

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c} \end{aligned}$$

Indication p. 18

Exercice 27 (◔☆ Trinôme et congruence)
Nécessite le chapitre d'arithmétique de Terminale.

Discuter, selon les valeurs de $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$, l'ensemble des solutions entières de

$$x^2 + bx + c \equiv 0 \ [5]$$

d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

Indication p. 18

Exercice 28 (◔★ Lien avec formes exponentielles)

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un réel.

Déterminer les racines complexes du trinôme

$$X^2 - 2\cos(\theta)X + 1.$$

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un réel et $r > 0$ un réel strictement positif.

Déterminer les racines complexes du trinôme

$$X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2.$$

Indication p. 18

Exercice 29 (◔☆ Le cas $\frac{\mathbb{Z}}{2}\mathbb{Z}$)

Nécessite le chapitre d'arithmétique de Terminale.

Déterminer toutes les équations du second degré « modulo 2 » et les résoudre.

Indication p. 18

Exercice 30 (◔★ Une généralisation de la forme canonique)

Soient a, b, c, d des réels tels que $a \neq 0$.

Montrer qu'il existe un réel x_0 et p, q des réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a\Big((x - x_0)^3 + p(x - x_0) + q\Big).$$

Indication p. 18

Exercice 31 (◑★▫ Parabole de sécurité)
Soit g une constante strictement positive.

Soit v_0 un réel strictement positif.

On dit qu'un point de coordonnées (x, y) est *atteignable* ssi il existe un angle $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{il existe } \ t \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha_0) t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha_0) t. \end{cases}$$

1. Montrer qu'un point de coordonnées $(0, y)$ est atteignable ssi $y \leq \frac{v_0^2}{2g}$.
2. Montrer qu'un point de coordonnées (x, y) avec $x \neq 0$ est atteignable ssi il existe un angle α_0 tel que $\cos(\alpha_0) \neq 0$ et
$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha_0)} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha_0) \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha_0)} \right).$$
3. Conclure qu'un point de coordonnées (x, y) est atteignable ssi
$$y \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$
4. Faire un schéma.

Indication p. 18

Exercice 32 (◔★▫ Un peu de Python: conditions emboîtées et calculs de flottants)
1. Écrire une fonction Python prenant en argument trois flottants a, b, c et renvoyant le nombre de solutions réelles de l'équation
$$ax^2 + bx + c = 0$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Tester votre programme pour `a = 1.0`, `b = 0.1`, `c = 0.0025`.

   Commenter.

Indication p. 19

Indications

Indication 1 · Énoncé p. 2 (Faits sur les trinômes réels)
Même si cela n'est pas demandé, un schéma est toujours apprécié.

1. Il y a 2 cas, $a > 0$ et $a < 0$.
2. Il y a $2 \times 3 = 6$ cas, selon le signe de a et celui de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Solution p. 20

Indication 2 · Énoncé p. 2 (Un ingrédient critique de plusieurs preuves)
Procéder par contraposée.

Indication 3 · Énoncé p. 2 (Cosinus et sinus hyperboliques)
Remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \neq 0$ et que par conséquent

$$\frac{e^x \pm e^{-x}}{2} = y$$

ssi

$$(e^x)^2 - 2ye^x \pm 1 = 0.$$

Reconnaître un trinôme en e^x et le résoudre.

Attention au passage (logique et au niveau du calcul) de e^x vers x.

Solution p. 22

Indication 4 · Énoncé p. 3 (Une inégalité paramétrique)
Utiliser $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$ avec α et β bien choisis ou remarquer que

$$\left(\sqrt{\eta}|a| - \frac{1}{2\sqrt{\eta}}|b|\right)^2 \geq 0.$$

Indication 5 · Énoncé p. 3 (Extraction de racines complexes)

1. Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

   $$r^2 e^{2i\theta} = \rho e^{i\varphi}$$

   ssi

   $$\begin{cases} r^2 = \rho \\ 2\theta \equiv \varphi \ [2\pi] \end{cases}.$$

   En déduire r (car $r > 0$) et θ modulo π.
2. Développer le carré et identifier les parties réelles et imaginaires. Faire attention aux conditions nécessaires et suffisantes entre une équation et la même équation « au carré », plus précisément pour x et y deux réels on a

$$(x = y) \Leftrightarrow (x^2 = y^2 \text{ et } x \text{ de même signe que } y).$$

Alternativement remarquer que $a^2 + b^2 = |a + ib|^2$.

On pourra se poser la question du cas particulier $\beta = 0$.

Enfin pour conclure remarquer qu'il s'agit d'un système « somme-différence » en a^2 et b^2.

Indication 6 · Énoncé p. 3 (Tangente hyperbolique)
On rappelle que pour p, q, r des réels ($q \neq 0$)

$$\frac{p}{q} = r$$

ssi

$$p = rq.$$

Se ramener ensuite à des calculs similaires à l'exercice 3.

Alternativement constater qu'il s'agit d'une équation (dite homographique) en e^{2x} et que, pour tout $(y, z) \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \times \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ on a

$$\frac{z-1}{z+1} = y \Leftrightarrow z = \frac{-y-1}{y-1}.$$

Indication 7 · Énoncé p. 4 (Un petit calcul à connaître)

1. On obtient $\frac{1}{4}$ atteint en $\frac{1}{2}$.
2. Par exemple se ramener au cas précédent.

Indication 8 · Énoncé p. 4 (Encore une petite inégalité à connaître)

1. De multiples méthodes équivalentes:
   - ▹ Étude de fonction,
   - ▹ inégalité arithmético-géométrique,
   - ▹ un carré est positif,
   - ▹ se ramener à un trinôme,
   - ▹ etc.
2. Les méthodes précédentes s'adaptent toutes mais le plus simple est d'utiliser le résultat précédent par homogénéité.

Indication 9 · Énoncé p. 4 (Équation d'un cercle)
Remarquer qu'en complétant les carrés,

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}.$$

Indication 10 · Énoncé p. 5 (Le début des relations coefficients-racines)

- ▹ On obtient la somme et le produit des racines en développant $(X - x_1)(X - x_2)$.
- ▹ À partir du système non linéaire, réinjecter pour obtenir une solution du trinôme.

Indication 11 · Énoncé p. 5 (Une démonstration paramétrique d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: variation de la norme selon une droite)
Un carré est toujours positif et une somme de termes positifs est positive.

Déterminer ensuite α, β, γ en développant pour tout k, $(a_k + tb_k)^2$ puis en utilisant la linéarité de la somme.

Ne pas oublier de traiter le cas $\alpha = 0$.

Si $\alpha \neq 0$ il s'agit d'un trinôme du second degré de signe constant.

Que dire de son discriminant ? (cf exercice 1)

Indication 12 · Énoncé p. 6 (Une démonstration paramétrique d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: optimisation d'une inégalité locale)
Utiliser l'inégalité de l'exercice 4 à l'intérieur de la somme puis utiliser la linéarité de la somme.

On pourra se rappeler de l'exercice 8.

Puis prendre le $\eta > 0$ minimisant le terme de droite dans la première égalité (un tel η étant obtenu par la seconde question).

Remarquer qu'il y a une valeur absolue à la fin et montrer que cela ne change pas grand chose, et ne pas oublier les cas dégénérés.

Indication 13 · Énoncé p. 6 (Encore une autre démonstration d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: par normalisation)

1. Un carré est positif.
2. Développer et regrouper. Ne pas rajouter à la fin une discussion pour la valeur absolue.
3. Il s'agit en fait de la démonstration par la première méthode en choisissant dès le début le t rendant minimal l'expression $\sum_{k=1}^{n} (a_k + tb_k)^2$.

Indication 14 · Énoncé p. 7 (Encore une autre démonstration d'un cas particulier de Cauchy-Schwarz: par calcul de somme double)

1. Il suffit de développer et de traiter à part le terme « diagonal ».
2. Un carré est positif.
3. Interpréter comme le module d'un produit de nombres complexes ou bien en produits scalaires et vectoriels.

Indication 15 · Énoncé p. 7 (Applications directes)

1. Application directe du cours (cf cours).
2. Mettre sous forme canonique et représenter (cf cours).
3. Il s'agit d'une équation bicarrée: $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.
4. Faire une étude de la dérivée n'est pas incorrect mais n'est pas non plus nécessaire. Cf par exemple l'exercice 7.
5. Pour déterminer des racines complexes de $1 + i$, les méthodes par forme exponentielle ou par forme algébrique fonctionnent toutes les deux, cf par exemple l'exercice 5.
6. On obtient un disque, cf 9.

Indication 16 · Énoncé p. 8 (Des exemples d'équation bicarrée)
Dans chacun des cas montrer que $z \in \mathbb{C}$ est solution ssi z^2 est dans un ensemble à préciser.

Puis résoudre les équations de type $z^2 = \xi$.

Dans le dernier cas voir l'exercice 5.

Indication 17 · Énoncé p. 8 (Lecture graphique)
Il y a trois paramètres à déterminer, pour cela effectuer trois mesures (par exemple valeurs en des points bien choisis ou tangentes).

Indication 18 · Énoncé p. 9 (Construction d'exercice)
Utiliser au choix (cela est équivalent) les relations coefficients racines ou bien développer $(-1) \times (X - (-2))\big(X - \frac{1}{2}\big)$.

Indication 19 · Énoncé p. 9 (Somme et produit: un peu de complexes)
Cela revient à déterminer les racines de

$$X^2 - iX + 2i$$

c'est à dire à déterminer des racines complexes de

$$(-i)^2 - 4 \times 2i = -1 - 8i.$$

Indication 20 · Énoncé p. 9 (Interpolation: cas très particulier)
Cela équivaut à déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} a + b + c &= -2 \\ 4a + 2b + c = -4 \\ 9a + 3b + c = -4. \end{cases}$$

Pour résoudre ce système linéaire (cas particulier de système de Vandermonde) on peut par exemple effectuer des opérations sur les lignes.

Ne pas oublier de vérifier la solution à la fin.

Indication 21 · Énoncé p. 9 (Calcul de racines)
Aide au calcul: $16^2 + 63^2 = 65^2$.

Indication 22 · Énoncé p. 9 (Un encadrement)
De très nombreuses façons de procéder:

- IAG, $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
- Étude de $t \mapsto t(2-t)$
- Étude de l'existence de racines réelles de $X^2 - 2X + p$ selon la valeur de p
- etc.

Indication 23 · Énoncé p. 10 (Égalité de deux carrés)
Plutôt que d'essayer de développer, ou pire d'essayer de prendre des racines, remarquer que $A^2 = B^2$ ssi $(A - B) = 0$ ou $(A + B) = 0$.

Indication 24 · Énoncé p. 10 (Interpolation: cas particulier)
Comme pour l'exercice 20 il s'agit de montrer que le système associé admet une et unique solution.

Indication 25 · Énoncé p. 10 (Le tout début des sommes de Newton)
Utiliser l'expression explicite n'est pas une bonne idée.

Plutôt remarquer que $(x_1+x_2)^2$ s'exprime en fonction de la somme des carrés et du produit.

Indication 26 · Énoncé p. 11 (Intégration et éléments simples : le tout début)

1. Remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^2+\delta^2} = \frac{1}{\delta} \times \frac{1}{\delta} \frac{1}{\left(\frac{x}{\delta}\right)^2+1}$$

et que (pour F une fonction dérivable, f une fonction et λ un réel), si $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$ alors $\frac{\mathrm{d}F(\lambda x)}{\mathrm{d}x} = \lambda f(\lambda x)$.

2. Mettre ax^2+bx+c sous forme canonique puis se ramener à la question précédente.

Indication 27 · Énoncé p. 11 (Trinôme et congruence)
On a $3 \times 2 \equiv 1\ [5]$ et $3^2 \equiv -1\ [5]$.

Par conséquent l'équation peut se réécrire

$$(x+3b)^2 + c + b^2 \equiv 0\ [5].$$

Il reste alors à discuter selon la valeur de $-(c+b^2)$.

Indication 28 · Énoncé p. 12 (Lien avec formes exponentielles)

1. Ne pas oublier de distinguer $\theta \equiv 0[\pi]$.

2. Calcul explicite ou se ramener au précédent.

Indication 29 · Énoncé p. 12 (Le cas $\frac{\mathbb{Z}}{2}\mathbb{Z}$)
Il y a au total $2 \times 2 = 4$ équations

- $x^2+0x+0 \equiv 0\ [2]$
- $x^2+0x+1 \equiv 0\ [2]$
- $x^2+1x+0 \equiv 0\ [2]$
- $x^2+1x+1 \equiv 0\ [2]$

les résoudre individuellement.

Indication 30 · Énoncé p. 12 (Une généralisation de la forme canonique)
Procéder par analyse synthèse, ou juste par calcul direct.

Indication 31 · Énoncé p. 13 (Parabole de sécurité)

1. Dans ce cas $\alpha_0 \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

2. Exprimer t en fonction de x.

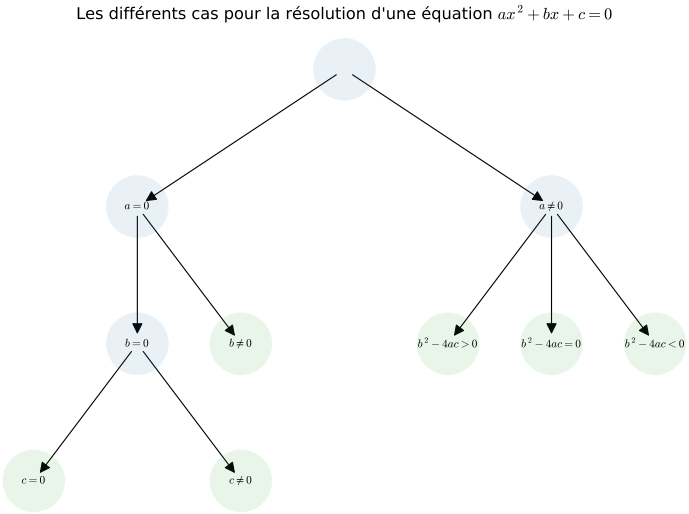
3. Remarquer que

$$\frac{1}{\cos(\alpha_0)^2} = 1 + \tan^2(\alpha_0)$$

et obtenir ainsi un trinôme du second degré en $\tan(\alpha_0)$.

Indication 32 · Énoncé p. 13 (Un peu de Python: conditions emboîtées et calculs de flottants)

1. En théorie il faut distinguer selon les cas suivants:



2. Comme `0.1` n'est pas exactement égal à $\frac{1}{10}$ (en tant que flottant), on observe que `0.1**2` $\neq$ `0.01` d'où une erreur par rapport au comportement théorique.

De manière générale tester l'égalité de deux flottants n'est jamais une bonne idée, il vaut mieux tester si leur différence est petite.

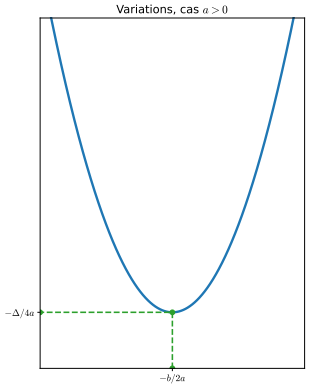
Solutions

Solution pour l'exercice 1 · Énoncé p. 2 · Indication p. 14 (Faits sur les trinômes réels)

1. On obtient

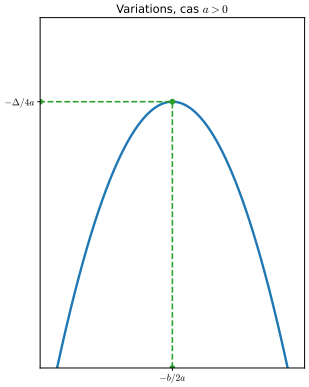
▷ Dans le cas $a > 0$,

	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$



▷ Dans le cas $a < 0$,

	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{b^2-4ac}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$



Par ailleurs pour déterminer ces tableaux de variations il suffit de partir du tableau de variation de $t \mapsto t^2$ puis d'effectuer une translation pour obtenir celui de $t \mapsto \left(t - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ et ensuite une dilatation pour obtenir celui de f.

2. On obtient, en notant $\Delta = b^2 - 4ac$, selon le signe de a et le signe de Δ, 6 cas possibles.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$	(I)	(II)	(III)
$a < 0$	(IV)	(V)	(VI)

(I) Dans le cas $a > 0$ et $\Delta > 0$ le tableau de signes

t	$-\infty$		$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$		$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$		$+\infty$
$f(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

[Faire un schéma]

(II) Dans le cas $a > 0$ et $\Delta = 0$ le tableau de signes

t	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(t)$		$+$	0	$+$	

[Faire un schéma]

(III) Dans le cas $a > 0$ et $\Delta < 0$ le tableau de signes

t	$-\infty$	$+\infty$
$f(t)$	$+$	

[Faire un schéma]

(IV) Dans le cas $a < 0$ et $\Delta > 0$ le tableau de signes

t	$-\infty$		$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$		$\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

[Faire un schéma]

(V) Dans le cas $a < 0$ et $\Delta = 0$ le tableau de signes

t	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$-$	

[Faire un schéma]

(VI) Dans le cas $a < 0$ et $\Delta < 0$ le tableau de signes

t	$-\infty$ $+\infty$
$f(t)$	$-$

[Faire un schéma]

Solution pour l'exercice 3 · Énoncé p. 2 · Indication p. 14 (Cosinus et sinus hyperboliques)

1. Soit $y \in \mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ la chaîne d'équivalences, comme $e^x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y &\Leftrightarrow e^x - 2y - e^{-x} = 0\\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow e^x \text{ racine de } X^2 - 2yX - 1.\end{aligned}$$

Or le trinôme réel $X^2 - 2yX - 1$ est de discriminant $4y^2 + 4 > 0$ et de racines

$$\frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

et on en déduit donc que

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = y + \sqrt{y^2+1} \\ \text{ou} \\ e^x = y - \sqrt{y^2+1} \end{cases}.$$

Or on a

$$0 \leq y^2 < y^2 + 1$$

d'où par stricte croissance de la racine,

$$|y| < \sqrt{y^2+1}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} y + \sqrt{y^2+1} &> 0\\ &\text{et}\\ y - \sqrt{y^2+1} &< 0.\end{aligned}$$

Par conséquent comme $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est bijective de réciproque ln, on en déduit que l'équation $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ admet une et une seule solution donnée par

$$\boxed{x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)}.$$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ la chaîne d'équivalences, comme $e^x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y &\Leftrightarrow e^x - 2y + e^{-x} = 0\\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow e^x \text{ racine de } X^2 - 2yX + 1.\end{aligned}$$

Or le trinôme réel $X^2 - 2yX + 1$ est de discriminant

$$4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$$

dont le signe dépend de y, contrairement au cas du sinus hyperbolique où le discriminant $4y^2 + 4$ était toujours strictement positif. On distingue donc selon la position de y par rapport à -1 et 1.

- ▹ Dans le cas $-1 < y < 1$, le discriminant est strictement négatif donc le trinôme n'admet pas de racine réelle : l'équation n'a pas de solution.
- ▹ Dans le cas $y = \pm 1$, le trinôme admet y pour racine double et donc

  $$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^x = y.$$

  Comme $e^x > 0$, l'équation n'a pas de solution si $y = -1$, et admet $x = \ln(1) = 0$ pour unique solution si $y = 1$.
- ▹ Dans le cas $|y| > 1$, le trinôme admet deux racines distinctes

  $$\frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

  Or on a

  $$0 \leq y^2 - 1 < y^2$$

  d'où par stricte croissance de la racine,

  $$\sqrt{y^2 - 1} < |y|$$

  c'est à dire que $y - \sqrt{y^2 - 1}$ et $y + \sqrt{y^2 - 1}$ sont tous les deux du signe de y. (On peut aussi le voir sur leur produit, qui vaut $1 > 0$, et leur somme, qui vaut $2y$.)

  Par conséquent comme $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est bijective de réciproque ln :

  - ▹ si $y < -1$, les deux racines sont strictement négatives et l'équation n'a pas de solution ;
  - ▹ si $y > 1$, les deux racines sont strictement positives et l'équation admet exactement deux solutions, $\ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right)$ et $\ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$.

En résumé, l'équation $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$ admet

$$\begin{cases}\text{aucune solution} & \text{si } y<1\\ \text{l'unique solution } x=0 & \text{si } y=1\\ \text{exactement deux solutions } x=\pm\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right) & \text{si } y>1.\end{cases}$$

La dernière écriture vient de ce que le produit des deux racines vaut 1, c'est à dire

$$\ln\left(y-\sqrt{y^2-1}\right)=\ln\left(\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}\right)=-\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$$

ce qui est cohérent avec la parité de $x\mapsto\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.